Het eierverfprobleem, revisited

F.P. Vos
Hogeschool Midden Nederland

Inleiding

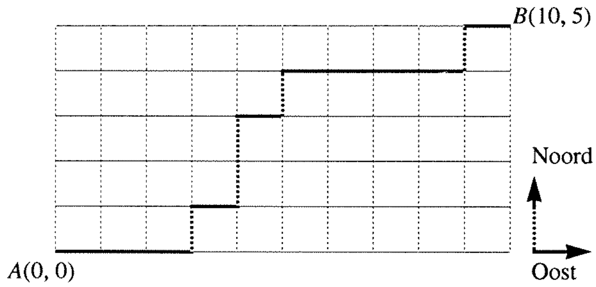
Bij wiskunde A zijn binomiaalcoëfficiënten en de driehoek van Pascal verplichte stof. In deze lessen wordt vaak het stratenplan van New York gebruikt als model. Met dit model kunnen allerlei telproblemen, zoals het eierverfprobleem, opgelost worden. Dit artikel geeft enkele suggesties voor verdieping van de lessen.
Het eierverfprobleem is een aardig telprobleem uit de discrete wiskunde, en u kon het zes jaar geleden al op deze pagina's vinden[1]:
Het is al bijna Pasen en ik heb tien eieren die ik met de kleuren rood, oranje, groen, blauw, paars of zilver wil verven. Eén manier om dat te doen kunnen we kortweg noteren met $r^3o^1g^0b^1p^4z^1$ (geen groen dus). Ik kan ook de eieren anders over de kleuren verdelen met bijvoorbeeld $r^2o^2g^2b^2p^2z^0$ (van alle kleuren twee, behalve van zilver), of alleen zilver nemen met $r^0o^0g^0b^0p^0z^{10}$. Zo zijn er veel verschillende manieren. Hoeveel eigenlijk?

Bij dit probleem gaan we ervan uit dat de ongeschilderde eieren aan het begin niet van elkaar te onderscheiden zijn. Ook maakt het niet uit in welke volgorde de kleuren worden aangebracht. Wat telt is het gekleurde resultaat *na afloop* van het schilderen van àlle aanwezige eieren. Overigens: je komt er niet uit door te zeggen 'ik heb voor elk ei zes kleuren, dus het antwoord is 6^{10} (= ongeveer 60 miljoen)'. Dan zou je er namelijk van uitgaan, dat je tijdens het schilderen voor het eerste ei een kleur kiest (bijvoorbeeld blauw) en daarna voor het tweede ei (bijvoorbeeld paars), enzovoort. Maar voor het uiteindelijke kleurenresultaat had deze volgorde net zo goed andersom kunnen zijn.

Stratenplan en hokjesgraaf

Een aardige manier om het antwoord van het eierverfprobleem te vinden is gebruik te maken van een rechthoekige *hokjesgraaf.* Deze lijkt sprekend op het stratenplan van New York, dat we vanaf de vierde klas van havo en vwo tegenkomen bij het onderwerp kansrekening.

Bij het stratenplan van New York wordt geteld hoeveel verschillende kortste wegen er zijn om van bijvoorbeeld $A(0, 0)$ naar $B(10, 5)$ te gaan. In een figuur teken je dan elf verticale en zes horizontale straten om de posities van A en B aan te geven. Omdat B de coördinaten (10, 5) heeft kun je eenvoudig onthouden dat dit een 10×5-hokjesgraaf is. Hierin herken je het aantal ingesloten huizenblokken waar je langs gaat lopen. Met een binaire codering, bijvoorbeeld N = 'één stap noord' en O = 'één stap oost' kun je aangeven hoe je in het stratenplan loopt. Om van A naar B te gaan zul je tien keer naar het oosten en vijf keer naar het noorden moeten gaan. *OOONONNONOOOONO* is dan de aanduiding voor één van de routes van A naar B (het is verboden naar zuid of west te gaan):



Er zijn natuurlijk ook andere routes mogelijk. Bijvoorbeeld langs de zuidelijke en oostelijke rand van de wijk loopt de bijzondere route *OOOOOOOOOONNNNN.* Het gaat ons nu om het totaal aantal kortste routes van A naar B. Dit is gelijk aan het totaal aantal binaire codes bestaande uit vijftien tekens: vijf voor de N-richting en tien voor de O-richting.
Het aantal routes kun je dan met een binomiaalcoëfficiënt berekenen: je staat vijftien keer op een straathoek waar je een keuze moet maken, daarvan moet je tien keer oost kiezen anders kom je niet in B uit.

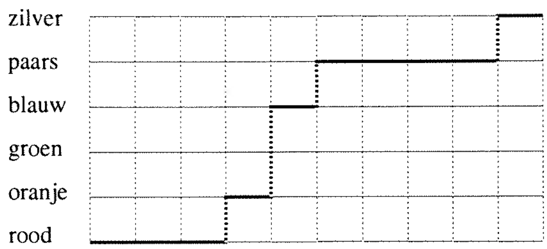
Dit geeft $\binom{15}{10} = \frac{15!}{10!\,5!} = 3003.$

En dat is hetzelfde als $\binom{15}{5}$ (= vijf keer noord kiezen).

In de klas wordt dit model vervolgens gebruikt om binaire situaties te visualiseren. Bijvoorbeeld:

- vijftien keer met een munt en daarvan vijf keer KOP gooien (dus tien keer MUNT)
- vijftien kinderen op een rij en daarvan zijn er vijf jongens (dus tien meisjes)
- vijftien schietpogingen en daarvan vijf keer raak (en dus tien keer mis).

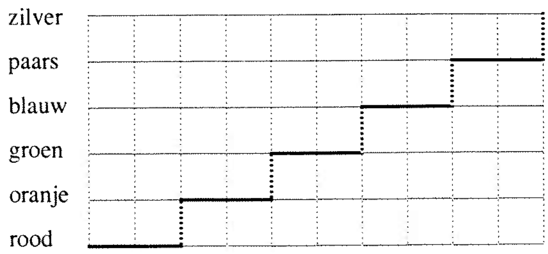
Hierin heb je telkens vijftien keuzemomenten en bij elk moment is het òf/òf: je kiest de ene mogelijkheid òf de andere mogelijkheid. Er zijn slechts twee mogelijkheden en ze sluiten elkaar uit. Bij de ene mogelijkheid ga je verticaal in de hokjesgraaf, bij de andere mogelijkheid ga je horizontaal.
We kunnen dit model dus gebruiken voor binaire situaties, maar dat hoeft niet! Er zijn ook andersoortige, niet-binaire telproblemen mee op te lossen. De hokjesgraaf is bijvoorbeeld ook goed te gebruiken voor het tellen van de gekleurde eieren:



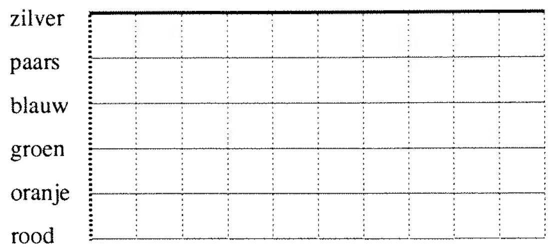
De getekende wandeling in deze hokjesgraaf geven we een interpretatie. De stappen in de horizontale richting tellen de eieren van de betreffende kleur (af te lezen op elke horizontale regel); elke stap in de verticale richting geeft aan dat we naar een volgende kleur overgaan. Daarmee krijgen we:

rood:	3 eieren
oranje:	1 ei
groen:	geen ei
blauw:	1 ei
paars:	4 eieren
zilver:	1 ei

Ofwel: hier is weergegeven de verdeling $r^3o^1g^0b^1p^4z^1$ uit het begin van dit artikel. De code $r^3o^1g^0b^1p^4z^1$ geeft aldus een route van links onder naar rechts boven in de hokjesgraaf aan.
Merk op: de benodigde hokjesgraaf telt in horizontale richting evenveel hokjes als eieren. Dit geeft ons de garantie dat ook elk ei een kleur krijgt! In verticale richting hebben we met zes kleuren maar vijf overgangen nodig. Elke kleur krijgt een regel en is dus als het ware een 'straatnaam' van een straat in New York. Daartussen zitten vijf hokjes! Aldus hebben we voor het eierverfprobleem met zes kleuren en tien eieren een 10×5-hokjesgraaf nodig.
Alle mogelijke kleurverdelingen bij dit eierverfprobleem (zes kleuren, tien eieren) zijn in deze hokjesgraaf weer te geven.



van elke kleur twee eieren (behalve zilver)
route: $r^2o^2g^2b^2p^2z^0$



alle tien eieren zilvergeschilderd
route: $r^0o^0g^0b^0p^0z^{10}$

Bij het eierverfprobleem met zes kleuren en tien eieren hebben we precies dezelfde hokjesgraaf, als die waarmee we in New York routes onderzochten. En nu moeten we eveneens van linksonder naar rechtsboven wandelen. Er zijn dan natuurlijk evenzoveel mogelijkheden. Het antwoord op dit eierverfprobleem is: er zijn 3003 verschillende manieren om de eieren te kleuren.
De generalisatie voor k kleuren en n eieren wordt dan opgelost met een hokjesgraaf van $k - 1$ hokjes verticaal en n hokjes horizontaal.

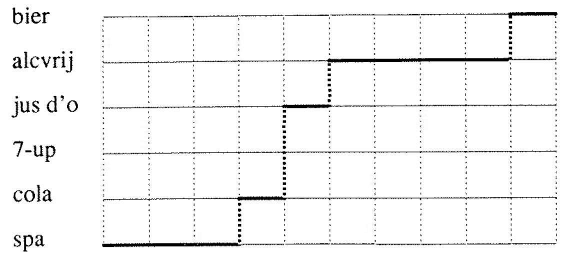
Daarin kun je op $\binom{n+k-1}{n}$ manieren een route vinden.

Dit is hetzelfde als $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Andere toepassingen

Misschien is het tijdens het behandelen van het onderwerp 'stratenplan en binomiaalcoëfficiënten' bij u in de klas net toevallig geen Pasen. Als het al bijna zomer is en de hele klas zit te smachten naar een koud drankje op een zonnig terras, dan kunt u natuurlijk een heel ander probleem nemen: het terras-probleem.
Er is een groep van tien mensen op een terrasje gearriveerd. De ober neemt de bestelling op. Er zijn zes drankjes mogelijk: spa, cola, 7-up, jus d'orange, alcoholvrij bier en 'gewoon' bier. Een mogelijke bestelling kan dus zijn $s^3c^17^0j^1a^4b^1$ *(geen 7-up). Het kan de ober niet schelen wèlke persoon wàt bestelt, hij moet alleen maar de juiste hoeveelheden van elk drankje bezorgen. Hoeveel verschillende mogelijke bestellingen kunnen er komen, als alle tien personen één drankje nemen?*

Dan wordt de hokjesgraaf als volgt:

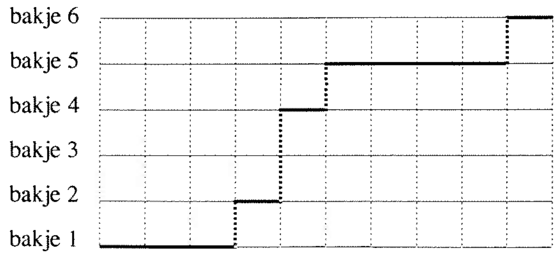


De interpretatie van deze graaf is vergelijkbaar met die van het eierverfprobleem: in horizontale richting tellen we het aantal bestellers, in verticale richting geven we de overgang naar het volgende drankje aan. Vandaar dat we bij zes drankjes (regels) maar vijf hokjes in verticale richting nodig hebben.
U moet bij het terrasprobleem trouwens niet tussendoor aan de klas vragen: 'wat is de kans dat de bestelling $s^3c^17^0j^1a^4b^1$ geplaatst wordt?' (we zitten tenslotte in het onderwerp kansrekening). De oplossing daarvan is namelijk ingewikkelder dan de eenvoudige vraagstelling doet vermoeden, omdat de bestellingen niet elk een even grote kans maken om door die tien individuele mensen gekozen te worden. Voor deze vraag heb je niets aan de hokjesgraaf als model, maar heb je multinomiaalcoëfficiënten nodig.

En als het geen Pasen is en ook geen terras-seizoen? Dan is het ook nog mogelijk dat u in de klas beschikt over concrete lesmaterialen zoals knikkers en bakjes (anders neemt u stompjes bordkrijt en koffiebekertjes, die u met een viltstift genummerd hebt). U kunt dan het volgende probleem nemen.

Ik heb hier zes genummerde bakjes: bakje 1, bakje 2, enzovoort, tot en met bakje 6. En ik heb hier tien identieke kogeltjes die ik over de bakjes ga verdelen. Alle kogeltjes komen in een bakje, maar niet elk bakje hoeft gevuld te worden. Ik noem het aantal kogeltjes dat in bakje 1 komt: x_1. En zo heb ik ook x_2, x_3, x_4, x_5 en x_6 voor het aantal kogeltjes in de andere bakjes.
Het mag voor iedereen duidelijk zijn dat $0 \le x_i \le 10$ en dat $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=10$. Eén mogelijke oplossing is $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=0$, $x_4=1$, $x_5=4$ en $x_6=1$ (dus bakje 3 blijft leeg). Maar er zijn vele andere oplossingen mogelijk. Hoeveel verschillende oplossingen eigenlijk?

Dan wordt de bijbehorende hokjesgraaf als volgt:



Ook nu is het antwoord weer af te lezen uit de 10×5-hokjesgraaf:

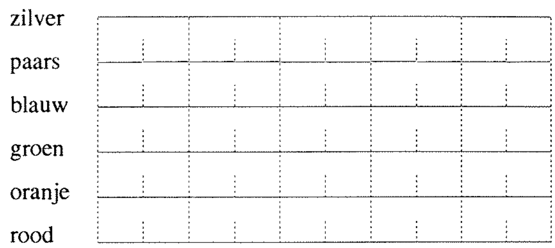
$\binom{15}{10}$ verschillende oplossingen.

Mocht u nog inspiratie voor andere voorbeelden zoeken (waslijnen bijvoorbeeld), dan verwijs ik u naar het al eerder genoemde artikel over het eierverfprobleem.

Beperkende voorwaarden

Als u nog een aantal leerlingen heeft die een extra uitdaging niet schuwen, dan kunt u ze bij het eierverfprobleem nog wat beperkende voorwaarden voorleggen. Bijvoorbeeld:
elke kleur mag alleen een even aantal keren gebruikt worden (nul mag ook). Dus $r^2o^2g^2b^2p^2z^0$ en $r^0o^0g^0b^0p^0z^{10}$ mogen wel, maar $r^3o^1g^0b^1p^4z^1$ mag niet meer. Hoeveel mogelijkheden zijn er nog overgebleven?

Ook nu geeft de hokjesgraaf weer uitkomst, want als je horizontaal gaat lopen moet je meteen twee passen maken. Dus raken sommige wegen geblokkeerd:

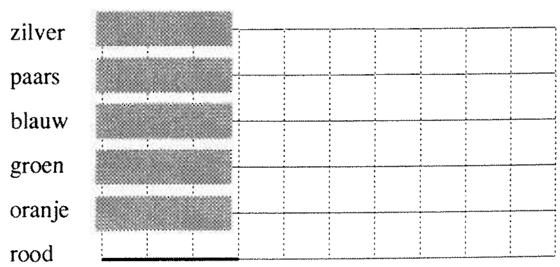


Wat je overhoudt is een hokjesgraaf van 5×5 hokjes.

Er blijven nog maar $\binom{15}{10} = 252$ mogelijkheden over.

Andere variant:
de kleur rood moet minstens drie keer gebruikt worden, de andere kleuren blijven naar keuze (nul mag ook). Hoeveel mogelijkheden zijn er nu nog?

We gebruiken de hokjesgraaf weer, want als je in het startpunt vertrekt, dan moet je meteen verplicht drie horizontale passen maken. Dus kun je een deel van de graaf niet meer doorlopen:

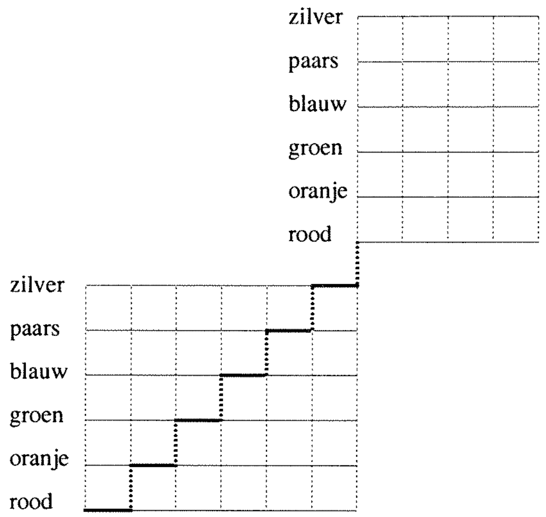


Het eerste deel van de route ligt nu vast: je moet minstens drie eieren aftellen in de regel van rood en hebt als begin van de route: r^3.... Pas hierna beginnen de keuzes, misschien komen er nog meer rode eieren bij, misschien ook niet. Je houdt daarmee alleen vrije keuzes binnen een 7 × 5-hokjesgraaf over.

Je hebt dan $\binom{12}{7} = 792$ mogelijkheden.

Of tenslotte:
alle kleuren moeten minstens één keer gebruikt worden. Hoeveel mogelijkheden?

Hiervoor kunnen we een hokjesgraaf-uit-twee-stukken gebruiken. Het eerste deel is voor 'de verplichte figuren' (daar is slechts één route toegestaan $r^1o^1g^1b^1p^1z^1$), het tweede deel voor de vrije keuze:



Ook hier heeft weer elke kleur zijn eigen regel: in het eerste deel van de hokjesgraaf tel je één ei voor elke kleur (dat was de eis in de vraagstelling), in het tweede deel komen alle kleuren opnieuw aan bod (voor de overgebleven vier eieren). Daarmee zijn alleen de routes in het tweede deel van de hokjesgraaf relevant. Dit is een 4 × 5-hokjesgraaf.

Daarin zijn $\binom{9}{4} = 126$ verschillende routes mogelijk.

Zoals u ziet is de hokjesgraaf handig om bepaalde telproblemen het hoofd te bieden. Hierbij worden van de leerlingen geen nieuwe reken-technieken gevraagd.
Je hoeft alleen maar te weten dat je in een M × N-hokjesgraaf $\binom{M+N}{M}$ verschillende kortste routes hebt van linksonder naar rechtsboven.

Wel nieuw voor de leerlingen is de interpretatie van de hokjesgraaf. Vooral het feit dat je in de horizontale richting iets van een geheel andere orde afleest dan in de verticale is nieuw. Het zijn niet aan elkaar tegengestelde (binaire) zaken zoals KOP-MUNT, maar het is anders: verticaal zet je kleuren neer en horizontaal tel je hoe vaak je van die kleuren neemt. Verticaal zijn dus de 'straat-namen' van belang terwijl je toch voor het eindantwoord alleen de hokjes tussen die straten telt.

De genoemde telproblemen zijn van hetzelfde type. In de studie van de combinatoriek heten ze 'distributie' (ik distribueer tien eieren over zes kleuren), 'herhalingscombinatie' of 'ongeordende keus met terugleggen'. In ons contextrijke wiskundeonderwijs staan ze niet op het programma, maar elke wiskundelera(a)r(es) is natuurlijk vrij om af en toe een uitstapje te maken.

Noot

[1] J.W. Nienhuys (1987). Het eierverfprobleem, *Nieuwe Wiskrant, 7*(1), 11-12.

Literatuur

Literatuursuggesties voor wie zich verder in telproblemen en hun oplossingen wil verdiepen:

Grimaldi, R.P. (1986). *Discrete and Combinatorial Mathematics*, Addison Wesley.

Vrie, E. de, e.a. (1990). *Discrete Wiskunde*, Open Universiteit.

Lint, J.H. van en J.W. Nienhuys (1991). *Discrete Wiskunde*, Academic Service.

Lemmens, P.W.H. en T.A. Springer (1992). *Hoofdstukken uit de combinatoriek*, Epsilon Uitgaven.