

Kijk en vergelijk

M. Abels

Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht / RSG Brokledede, Breukelen

Vooraf

'I don't know much about Algebra, ...', zingt Sam Cook in zijn lied 'What a wonderful world.'

Vroeger hoorde ik nog wel eens mijn leerlingen zingen: 'Wat heb ik nu aan algebra, als ik voor de keuze sta, ...', maar de laatste tijd niet meer. Zou dit komen door de vernieuwingen in het wiskundeonderwijs? Nee, natuurlijk niet, maar het is wel te merken dat door deze vernieuwingen de ideeën over wiskunde en wiskunde leren bij veel leerlingen aan het veranderen zijn.

De twaalfjarigen van nu hebben bijna allemaal gewerkt met nieuwe reken-wiskunde methoden op de basisschool. Zij zijn dit schooljaar gestart met het nieuwe leerplan voor wiskunde en maken in de brugklas voor het eerst kennis met algebra.

In het Mathematics in Context project¹ waarin een leerplan ontworpen wordt voor Amerikaanse kinderen is de situatie anders. Omdat dit programma bestemd is voor 10- tot 14-jarigen is het mogelijk om de kinderen al op jongere leeftijd kennis te laten maken met verschillende aspecten van de algebra. Dit betekent niet dat de algebra zoals die in het Nederlandse leerplan beschreven staat twee jaar eerder gestart wordt. In het MSP project is gekozen voor een andere start. Anton Roodhardt heeft een jaar geleden in het artikel 'Een ander begin van de algebra' hierover verteld.²

We zijn nu een jaar verder en laten zien hoe deze algebra verder ontwikkeld is. Daarbij ligt het accent op manipulaties met symbolen.

Vertalen

In het najaar van '93 is voor grade 6 (vergelijkbare leeftijd: groep 8 basisschool) het pakket *Comparing Quantities*³ geschreven.

De wiskundige inhoud daarvan kan als volgt omschreven worden: het maken van gelijkwaardige vergelijkingen, het substitueren van getallen maar ook van variabelen in formules, het oplossen van eerstegraads vergelijkingen, het oplossen van stelsels vergelijkingen met twee of meer onbekenden. Deze opsomming geeft mis-

schien de indruk dat het gaat om een zeer formeel stukje wiskunde. Dat is het in wezen ook, maar de praktijkuitwerkingen zullen laten zien dat het vertaald is naar situaties die passen bij deze leeftijdsgroep. Tenminste, daar is bij het ontwerpen van uit gegaan. Of dit klopt kan nog niet gezegd worden aan de hand van Amerikaanse leservaringen, want het materiaal wordt daar pas in het voorjaar van '94 uitgeprobeerd. Omdat ik erg benieuwd was naar ervaringen met dit soort algebra kon ik de verleiding niet weerstaan van het materiaal een Nederlandse versie te maken en mijn brugklassers van de RSG Brokledede in Breukelen ermee te confronteren. Of dat 'zomaar' kon? Nou,.. eh, ja, na overleg met de sectie op school, na overleg met de leerlingen, na het vertalen van het materiaal, na het plannen van de lessen, na het denken over de organisatie in de klas, een groep van 29 leerlingen, ...

In eerste instantie wilden we weten of ze de problemen konden oplossen, maar minstens zo interessant zou zijn hoe ze aan hun oplossingen zouden komen. Mijn leerlingen waren al vanaf het begin van het schooljaar gewend dat ik meer aandacht besteed aan de manieren van oplossen dan aan de oplossingen zelf. Dat zou nu mooi van pas komen en ik had me voorgenomen extra aandacht te geven aan het schriftelijk weergeven van de manier van oplossen door middel van woorden, plaatjes en/of berekeningen. Dan zou ik niet alleen tijdens klasgesprekken, maar ook bij het zien van hun uitwerkingen hun strategieën kunnen achterhalen. Tenslotte was Nanda Querelle bereid om een aantal lessen te observeren en daar verslagen van te maken.

Zo zijn we in oktober '93 gestart met het uitproberen van de nederlandse versie van het pakket *Comparing Quantities* dat als titel kreeg:

Kijk en vergelijk

Het pakketje begint met een situatie waarin ruilhandel een rol speelt. In plaatjes kunnen de leerlingen zien wat tegen wat geruild kan worden. Hier zijn de leerlingen informeel bezig met het substitueren van variabelen voor variabelen, zonder dat aan de variabelen een waarde

wordt gekoppeld. Deze wisselstrategie wordt hierna toegepast in andere probleempjes die ook door middel van plaatjes worden gepresenteerd, bijvoorbeeld:

Laat zien hoe jij een antwoord zoekt op de volgende vraag: Hoeveel bananen zijn er nodig om de balans in evenwicht te houden?

Tijdens een klasgesprek legt Marcel zijn strategie uit: 'Vijf bananen is één meloen. Ik zag een meloen en aan de andere kant twee bananen en een peer. Dus die peer is drie bananen.' De meeste leerlingen hadden dezelfde strategie gebruikt.

Mirjam niet: 'De bananen zijn bijvoorbeeld tien kilo. Dus een meloen is vijf kilo. Ik zag in het tweede plaatje een meloen liggen dus twee bananen en een peer is vijf kilo. En $5 : 3 = 1,6$ dus een peer is 1,6 en ... eh.' Ze kwam er niet meer uit. Ik vroeg of iemand anders op de manier van Mirjam het probleem kon oplossen.

John: 'Eerst naar die tien bananen, dan is vijf bananen vijf kilo en één meloen is ook vijf kilo. Dus die peer moet wel drie bananen zijn.'

Een andere leerling merkte nog op: 'Je kan ook eerst uitrekenen hoeveel één banaan is en dan weet je ook drie bananen'.

Op het eerste gezicht lijkt het er misschien op dat Mirjam niet beschikt over enige maatkennis, maar ik denk dat ze niet door maatkennis gehinderd wordt. Ze zal best weten dat een banaan geen kilo weegt en heeft het getal 10 als een soort variabele, een onbekende, gebruikt.

In dit eerste deel van het pakket worden de maniertjes ook benoemd: ruilen of wisselen en halveren. Later komen daar nog bij: verdubbelen, samennemen, verschil nemen.

Hieronder staat nog een, naar mijn mening, voor kinderen heel aardig probleem. Het is onbewerkt overgenomen uit het boek 'Neue mathematische Aufgaben für Denker und Tüftler' van Michael Holt⁴ vanwege de mooie illustratie (en met een knipoog naar emancipatorisch onderwijs). De redeneringen van de leerlingen spreken voor zich.

Touwtrekken

Vier jongens zijn even sterk als vijf meisjes.

De hond is even sterk als twee meisjes en een jongen.

Kijk nu naar het volgende plaatje. Wie wint? Geef een redenering.

Uit het leerlingenwerk:

omdat de hond even sterk is als twee meisjes en één jongen als je die bij die drie meisjes optelt krijg je vijf meisjes (dat kunnen de jongens nog aanvullen) en dan komt er nog een jongen bij en dan winnen dus de meisjes en de hond.

de meisjes winnen want ze hebben 1 jongen meer bij 2 zie je dat 1 hond - 2 meisjes en 1 jongen "waant" is.

De hond geldt voor 2 meisjes en 1 jongen + 2 meisjes = 5 meisjes en 1 jongen.

Nu 5 jongens en 4 meisjes zijn even sterk maar die hond geldt ook nog eens als 1 jongen dus de meisjes zijn sterker.

Koffie en thee

Het tweede hoofdstuk begint met het volgende probleem; het is een bewerking van een idee van Bertus van Etten.⁵

Babs werkt op een klein kantoor. Ze neemt de telefoon aan en zorgt voor de koffie en thee. Als ze niet in de kantine is, nemen de mensen zelf koffie of thee en leggen het geld neer. De koffie kost een kwartje, de thee 15 cent. Op een keer vindt ze f 1,10, maar geen briefje waarop staat wat ze genomen hebben. Na wat gepuzzel denkt Babs het toch te weten.

1. Zoek uit wat ze bedacht kan hebben. Weet je zeker dat het goed is wat je bedacht hebt? Waarom?
2. Op een dag vindt ze weer geld zonder een briefje erbij en ze zegt: 'Ja, nu kan ik het niet weten!' Wat zou er gelegen kunnen hebben? Weet je het zeker? Waarom?

Dit was lastig, er werd druk gerekend. De leerlingen vonden wel een combinatie die f 1,10 kostte maar daarna bleven ze steken. Conclusie: dit moet anders. Het kwam goed uit dat de les was afgelopen, waardoor ik tijd had om over een andere presentatie van het probleem na te denken. De volgende les ben ik als volgt klassikaal gestart. Een fragment uit het observatieverslag van Nanda Querelle:

d(ocent): 'Weten jullie nog dat probleem van Babs in de kantine en die één gulden tien die ze vindt? Wie weet nog wat er weggenomen was?'

ll: 'Vier koffie en één thee.'

ll: 'Zes thee en twee koffie.'

d: 'De koffie kostte een kwartje en de thee vijftien cent!'

ll: 'Ik weet het: vier thee en twee koffie.'

d: 'Nou, Babs vond het ook lastig om steeds weer opnieuw al die berekeningen te maken. Ze dacht dat het wel handig zou zijn om twee lijstjes te maken: eentje voor de prijzen van aantallen kopjes koffie en eentje voor de prijzen van aantallen kopjes thee. Hoe zouden die twee lijstjes eruit hebben gezien? Schrijf ze eens op.'

Even later:

d: 'Hoe zou Babs nu die lijstjes gebruiken? Ze vindt bijvoorbeeld 75 cent.'

ll: 'Van elke rij neem je een getal en dan kijk je welke bij elkaar kunnen.'

d: 'Zoek dit eens op.'

d: 'Wie kan een ander bedrag noemen dat Babs als ze in de kantine terugkomt kan vinden?'

ll: 'f 1,50.'

d: 'Hoe weet je dat?'

ll: 'Gewoon, denken, het dubbele.'

d: 'Babs merkt dat het nog een heel gedoe is met die twee tabellen, eigenlijk wil ze liever op een papiertje alle combinaties hebben zodat ze niets meer hoeft uit te rekenen en alleen maar op het papiertje hoeft te

kijken.

(Enkele leerlingen steunen ooooh, kennelijk hebben ze in de gaten dat dit een heel gedoe wordt.)

Patrick: 'Dat is veel werk, heel veel.'

d: 'Ja, maar heb je een idee hoe je dat kunt doen? Heb je zoiets wel eens gezien?'

De docent tekent een horizontale en een verticale lijn op het bord. Een leerling wijst horizontaal en zegt: 'Doe je koffie zo en zo (wijst verticaal) de thee.'

Er ontstond even een discussie hoe de getallen bij de lijnen zouden komen en ook welke getallen, want 'nul koffie' hoorde er ook bij.

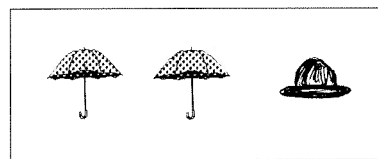
De leerlingen krijgen daarna de opdracht die tabel te gaan maken.

aantal thee							
3							
2							
1	15	40					
0	0	25					
	0	1	2	3	aantal koffie		

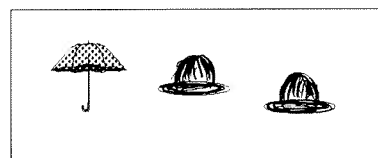
Bij het invullen ontdekken de leerlingen allerlei patronen. Ook merken ze dat de patronen die in verschillende richtingen te vinden zijn, helpen bij het invullen van de tabel. Dit is een belangrijke activiteit en het invullen van zo'n 'combinatietabel' wordt nog apart geoefend, want deze tabel gaat straks een belangrijke rol spelen als hulpmiddel bij het oplossen van problemen waarbij het gaat om twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Vergelijkingen in plaatjes

Het derde hoofdstuk gaat over 'vergelijkingen in plaatjes', waarbij met behulp van de gegeven vergelijkingen de (twee) onbekenden worden opgelost.



\$ 80



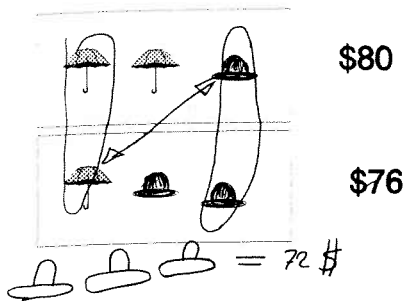
\$ 76

1. Wat is duurder, een hoed of een paraplu?
2. Hoeveel kost een hoed? En een paraplu?

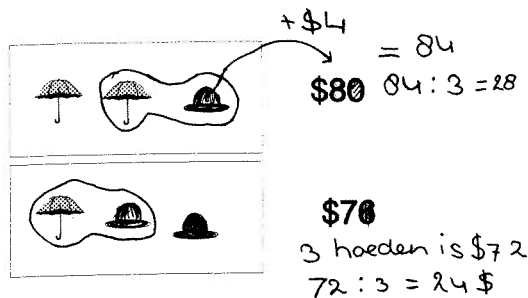
Bij de eerste vraag redeneert een leerling als volgt: 'De paraplu, ze hebben allebei één paraplu en één hoed en de bovenste is 80 dollar dus de plu is duurder.'

Bij de tweede vraag worden verschillende strategieën gebruikt. Een aantal leerlingen probeert gewoon verschillende getallen tot ze een oplossing vinden. Ze begrijpen dat die oplossing voor beide plaatjes moet kloppen. Andere strategieën zijn:

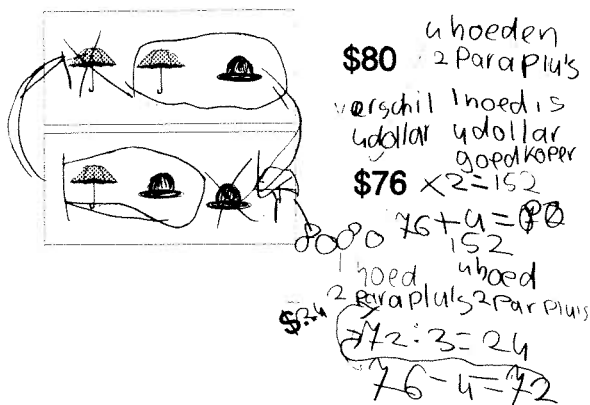
Met 'inwisselen':



Deze strategie is ook in de uitwerking hieronder te zien. Deze leerling wisselt een hoed voor een paraplu in het bovenste plaatje en telt vier dollar bij de prijs op. Daarna gebruikt hij de wisselstrategie nog een keer in het onderste plaatje om de prijs van een hoed uit te rekenen.



Met combineren en redeneren:

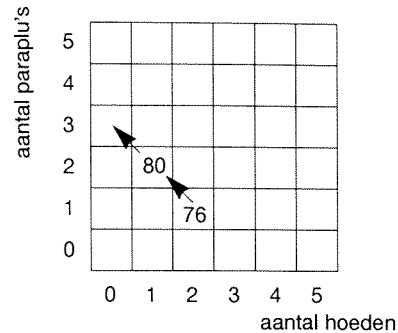


Na wat gepuzzel zie ik wat ze gedaan heeft: ze verdubbelt het tweede plaatje: $76 \times 2 = 152$ en gaat daarna vergelijken:

- 1 hoed 4 hoeden
- 2 paraplu's 2 paraplu's

Het verschil in prijs is \$72 en het verschil in artikelen 3 hoeden. Vandaar de berekening $72 : 3 = 24$, de prijs van een hoed.

Hierna wordt de tabel gebruikt als nieuwe strategie. Voor het hiervoor genoemde probleem gaat dit als volgt:



In de richting van de pijltjes is het patroon +4 en zo vind je de prijs van drie paraplu's: \$84. In dit patroon zie je de inwisselstrategie terug: een hoed inwisselen voor een paraplu geeft een prijsverhoging van 4 dollar.

Tenslotte komen in het pakket problemen aan de orde waarbij het gaat om stelsels van vergelijkingen met meer dan twee onbekenden. De gegevens worden in een soort matrix opgeschreven. Deze matrixnotatie wordt geïntroduceerd in de volgende context.

In het restaurant is vandaag elke taco even duur. Voor elke salade betaal je dezelfde prijs en de drankjes zijn even duur. Door deze speciale aanbieding heeft Mario het heel druk. Hij loopt van de ene naar de andere tafel om alle bestellingen op te nemen. Hieronder zie je hoe hij de bestellingen in zijn opschrijfboekje noteert.

T	S	D	\$
2	4	-	10
3	-	3	9
1	2	3	8
1	2	1	
1	-	1	
2	2	1	
4	2	3	

De leerlingen kunnen duidelijk verwoorden hoe ze de prijzen van de andere bestellingen vinden:

- 'Dat is de helft van het eerste tafeltje.'
- 'De bestelling van de tweede tafel gedeeld door drie.'
- 'Vierde en vijfde tafel samen.'
- 'Twee en vier samen.'

Hierna bedenken ze zelf een aantal bestellingen, waarmee ze informeel bezig zijn gelijkwaardige vergelijkingen op te schrijven. Het vinden van de prijzen van een taco, een salade en een drankje is tenslotte een kwestie van kijken en vergelijken.

Comparing Quantities

Het mini-experiment in mijn eigen brugklas heeft veel informatie opgeleverd over de moeilijkheidsgraad van de problemen en de opbouw van het pakket, maar ook over mijn leerlingen: sommigen werden gegrepen door de probleempjes die ze moesten oplossen en konden daar met elkaar goed mee aan de slag. Maar er waren ook leerlingen bij die na afloop vertelden dat ze sommige problemen niet zo leuk vonden: 'Als je niet zag hoe je moest beginnen dan kwam je er niet uit en dan zat je er maar tegen aan te kijken, en dat is niet leuk.' Zij kregen wel meer greep op de problemen nadat verschillende strategieën, het gebruik van de 'combinatietabel' en het schema (matrix) aan de orde waren geweest. Het spontaan gebruiken van symbolen of afkortingen bij het opschrijven van berekeningen ben ik in de leerlingenuitwerkingen nauwelijks tegengekomen. Misschien

kwam dit ook wel door mijn eigen houding in de les, ik wilde niet dat mijn leerlingen dergelijke formele notaties te vroeg zouden gaan gebruiken. Zij bleven hierdoor vaak plaatjes tekenen met daar omheen berekeningen. We verwachten dat de Amerikaanse kinderen eerder formele notaties zullen gebruiken, zij hebben dan immers al twee algebra pakketten gedaan waarin symbolen voorkomen. De praktijk zal uitwijzen of dit inderdaad gebeurt, ... maar daar moeten we nog even op wachten.

Noten

- [1] Zie M. van Reeuwijk (1993). Het Middle School Project in kaart gebracht. *Nieuwe Wiskrant* 13(2), 22-28.
- [2] Zie A. Roodhardt (1993). Een ander begin van de algebra. *Nieuwe Wiskrant* 12(3), 10-17.
- [3] Het pakket Comparing Quantities is ontworpen door Martin Kindt in samenwerking met Mieke Abels.
- [4] Holt, Michael (1988). *Neue mathematische Aufgaben für Denker und Tüftler*. DuMont Buchverlag, Köln.
- [5] Zie B. van Etten (sept. 1978-nov. 1980). Variabelen in de schoolwiskunde. *Wiskrant* 13 t/m 24, 223-226.

Wiskunde en werk

Wiskunde en werk is de nieuwste uitgave van de werkgroep Vrouwen en Wiskunde. De bundel laat leerlingen kennis maken met vrouwen in beroepen en de wiskunde die daar bij komt kijken: van verrassende beroepen zoals verloskundige of beeldhouwkundige tot beroepen in bijvoorbeeld de hardwaretechniek of de bouw. De gekozen voorbeelden zijn verwerkt tot lesmateriaal voor leerlingen van verschillende niveaus en schooltypes. De praktijksituatie in een bepaald beroep vormt steeds het uitgangspunt. Zo kunnen leerlingen zelf een tuin ontwerpen of het inkoopbeleid van hun eigen sportshop doorrekenen.

Het is niet toevallig dat de werkgroep Vrouwen en Wiskunde deze bundel heeft samengesteld: om allerlei redenen kiezen meisjes minder vaak wiskunde in hun pakket

dan jongens. In het algemeen hebben meisjes een minder helder toekomstbeeld dan jongens en zijn zij minder gericht op een toekomstig beroep of carrière. De werkgroep had daarom ter gelegenheid van haar tweede lustrum in 1992 veertien beroepsvrouwen uitgenodigd om een workshop te verzorgen met als thema 'Vrouwen gebruiken wiskunde in hun werk'. Het materiaal van deze workshops is uitgewerkt, met de bundel *Wiskunde en werk* als resultaat.

U kunt deze bundel bestellen bij:
Ledenadministratie NVvW
Jorisstraat 43
4834 VC Breda
Prijs: f 40,- exclusief verzendkosten