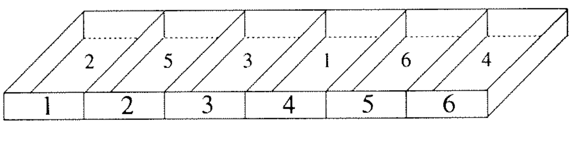
# Sinterklaas en het getal e

**B. Boon**
Christelijk Gymnasium Sorgvliet, Den Haag

Op dit moment zijn we met z'n zessen thuis en mijn dochter besloot dat er voor Sinterklaas maar eens lootjes getrokken moesten worden. Zo gezegd, zo gedaan. Helaas bleek bij de eerste trekking één van ons zichzelf getrokken te hebben, dus moest het over. De tweede keer trok weer iemand zichzelf en de vraag rees hoe zeldzaam dit was. Een reden voor mij om eens met dit (bekende en opgeloste[1]) probleem aan de slag te gaan en een uitdaging dat zo te doen dat het ook voor de welwillende niet-wiskundige te volgen is. Het gestoei leverde zulke aardige resultaten op, dat ik het probleem ook aan de leerlingen van een tweede klas heb voorgelegd. En, mits u er wat bij vertelt over permutaties en faculteiten, kunnen zij het concrete geval heel goed volgen. Maar oordeelt u zelf.

## Permutaties

Voor ons doel is het handig om personen te vervangen door genummerde bakjes. De lootjes worden eveneens genummerd en willekeurig in de bakjes geworpen.




Het resultaat in bovenstaande tekening noteren we als 2 5 3 1 6 4. Het is een verwisseling of *permutatie* van de getallen 1 tot en met 6. Kortweg zullen we spreken over een permutatie van 6. Zoals bekend is het aantal mogelijke permutaties van 6 gelijk aan 6!. Nemen we de getallen 1 tot en met $n$, dan zijn er $n!$ permutaties.

Lootje 3 zit in het derde bakje (persoon drie heeft zichzelf getrokken). In de permutatie 2 5 3 1 6 4 is dat te zien doordat 3 op de derde plaats staat. We noemen 3 een *dekpunt* van deze permutatie. We willen weten hoeveel *dekpuntvrije* permutaties er zijn. Omdat het uitschrijven van 720 permutaties tijdrovend en vervelend is, proberen we het probleem systematisch aan te pakken.

## Permutaties zonder dekpunten

We onderzoeken het aantal permutaties van 1 tot en met $n$ zonder dekpunten en noteren dat aantal als $Z(n)$ (Z van *zonder* dekpunten). We vinden:

$n = 1$ één permutatie (1) met dekpunt. $Z(1) = 0$
$n = 2$ twee permutaties (12 en 21) waarvan één zonder dekpunt. Dus $Z(2) = 1$.
$n = 3$ zes permutaties, waarvan twee zonder dekpunten (231 en 312); $Z(3)= 2$.
$n = 4$ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ permutaties, waarvan 9 zonder dekpunten; $Z(4) = 9$.

Met enig doorzettingsvermogen valt het geval $n = 5$ nog te onderzoeken ($Z(5) = 44$), maar voor $n = 6$, laat staan hoger, wordt het te gortig. Computer erbij? Nu, 't viel mij nog niet mee een programma te schrijven dat redelijk snel $Z(7)$ berekent. Maar goed, ik ben ook geen ervaren programmeur. Dan maar eens op zoek naar regelmaat in de Z-waarden.

## Regelmaat in de *Z*-waarden?

Hebben de dekpuntvrije permutaties van 6 misschien iets te maken met dekpuntvrije permutaties van 5? Neem bijvoorbeeld de permutatie 2 3 4 5 6 1. Wissel lotnummer 6 met het lot in het zesde bakje.

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \underline{6} \quad \underline{1}$$

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \underline{1} \quad || \quad \underline{6}$$

We krijgen $2\,3\,4\,5\,\underline{1}\,\underline{6}$. Zetten we het zesde bakje weg, dan hebben we een permutatie van 5, in dit geval dekpuntvrij. Dat laatste is niet altijd zo. Door het wisselen kan het lot uit het zesde bakje terecht komen in een bakje met hetzelfde nummer. Dat is bijvoorbeeld het geval bij 6 5 4 3 2 1.

$$\underline{6} \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad \underline{1}$$

$$\underline{1} \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad \underline{2} \quad || \quad \underline{6}$$

Dat wordt $\underline{1}\,5\,4\,3\,2\,\underline{6}$. Er ontstaat dan door het weglaten van het zesde bakje een permutatie van 5 met één dekpunt (1). Maar omdat 4 loten in hun bakje blijven, ontstaat er nooit een permutatie van 5 met meer dan één dekpunt.

We kunnen dus op twee manieren dekpuntvrije permutaties van 6 maken:

1. We nemen een dekpuntvrije permutatie van 5. We plaatsen een zesde bakje bij met daarin lotnummer 6. Elke wisseling van lotnummer 6 met één van de andere loten geeft een dekpuntvrije permutatie van 6. Zo horen bij één dekpuntvrije permutatie van 5 vijf dekpuntvrije permutaties van 6 en geeft bijvoorbeeld

   2 1 4 3 5 (6):
   $\underline{6}$ 1 4 3 5 $\underline{2}$,
   2 6 4 3 5 $\underline{1}$,
   2 1 6 3 5 $\underline{4}$,
   2 1 4 $\underline{6}$ 5 3 en
   2 1 4 3 $\underline{6}$ $\underline{5}$.

   Totaal zijn er $Z(5)$ dekpuntvrije permutaties van 5. Dus deze methode levert $5 \cdot Z(5) = 5 \cdot 44 = 220$ dekpuntvrije permutaties van 6 op.
2. We nemen een permutatie van 5 met één dekpunt, bijvoorbeeld $\underline{1}$ 5 4 3 2. Ook nu zetten we het zesde bakje met lotnummer 6 erachter: $\underline{1}$ 5 4 3 2 $\underline{6}$. Door 1 en 6 te wisselen krijgen we een dekpuntvrije permutatie. Omdat de wisselmethode gelijk is aan de vorige, ontstaat er echt een permutatie die we nog niet hadden. De vraag is nu: hoeveel permutaties van 5 met één dekpunt zijn er? Antwoord: $5 \cdot Z(4)$. Het dekpunt kun je immers op vijf manieren kiezen (bakje 1 tot en met 5). Bij elk van die keuzen kun je de andere vier balletjes nog op $Z(4)$ manieren dekpuntvrij permuteren. Het totale aantal dekpuntvrije permutaties van 6 is dan:
   $Z(6) = 5 \cdot Z(5) + 5 \cdot Z(4) = 5 \cdot 44 + 5 \cdot 9 = 265$

## Kans op dekpuntvrije permutatie van 6

Het leeuwedeel van het werk zit er nu op. Immers we weten dat er in totaal $6! = 720$ permutaties van 6 zijn waaronder 265 dekpuntvrije. De kans dat in een gezelschap van zes personen niemand zichzelf trekt is dus $\frac{265}{720}$. Dat is 37%. Maar hoe zit het met permutaties van 7, 8 en verder?

## *n* loten in *n* bakjes

We pakken het probleem algemener aan: $n$ loten in $n$ bakjes. Door op dezelfde manier als hiervoor te redeneren vinden we de formule

$$Z(n) = (n-1)Z(n-1) + (n-1)Z(n-2) \qquad (1)$$

Met $(n-1)Z(n-1)$ het aantal vanuit de dekpuntvrije permutaties van $n-1$ en $(n-1)Z(n-2)$ het aantal vanuit de permutaties van $n-1$ met één dekpunt. Nu kunnen we $Z(7)$ en volgende $Z$-waarden snel berekenen: $Z(7) = 6 \cdot 265 + 6 \cdot 44 = 1854$

## De finale: expliciete formules

Maar we hebben voor de doorzetters nog wat in petto! Eerst leiden we uit (1) een formule af voor de kansen. De kans op een dekpuntvrije permutatie van $n$ noemen we $P(n)$.

$$P(n) = \frac{Z(n)}{n!} = \frac{(n-1)\,Z(n-1)}{n!} + \frac{(n-1)\,Z(n-2)}{n!}$$

Deze formule kunnen we omwerken tot[2]

$$P(n) = \frac{n-1}{n} P(n-1) + \frac{1}{n} P(n-2)$$

hetgeen zich ook laat schrijven als:

$$P(n) = (1 - \tfrac{1}{n})\,P(n-1) + \tfrac{1}{n}P(n-2) =$$

$$P(n-1) - \tfrac{1}{n}\{P(n-1) - P(n-2)\} \text{ of ook}$$

$$P(n) - P(n-1) = -\tfrac{1}{n}\{(P(n-1) - P(n-2)\}$$

Met $P(1) = 0$ en $P(2) = \frac{1}{2}$, dus $P(2) - P(1) = \frac{1}{2}$, volgt voor $n = 3$:

$$P(3) - P(2) = -\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{3!} \text{ , dus}$$

$$P(3) = P(2) - \tfrac{1}{3!} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3!}$$

$$P(4) - P(3) = -\tfrac{1}{4} \cdot -\tfrac{1}{3!} = \tfrac{1}{4!} \text{ , dus}$$

$$P(4) = P(3) + \tfrac{1}{4!} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!}$$

Zo doorgaande vinden we $P(n) - P(n-1) = (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$, waaruit volgt dat

$$P(n) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!} - \ldots\ldots + (-1)^n \cdot \tfrac{1}{n!}$$

Wiskundigen herkennen hierin de $n$-de partiële som van de reeksontwikkeling van $\frac{1}{e}$, waarmee de titel van dit stukje verklaard is. De kans op een dekpuntvrije permutatie nadert dus voor toenemende $n$ naar $\frac{1}{e}$.
Eenvoudig is in te zien dat

$$|P(n) - \tfrac{1}{e}| < \frac{1}{(n+1)!}.$$

Dat betekent, dat de kans *heel snel* naar $\frac{1}{e}$ nadert. In de praktijk komt het er op neer dat de kans dat iemand zichzelf trekt praktisch onafhankelijk is van de grootte van de groep.
Dankzij die kleine fout is het ook mogelijk een expliciete uitdrukking voor $Z(n)$ te vinden.
Daar $Z(n) = n! \cdot P(n)$ is voor $n \geq 1$ de fout in de benadering $Z(n) \approx \frac{n!}{e}$ kleiner dan $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
Dus, aangezien $Z(n)$ een heel getal is, geldt:

$$Z(n) = \left[\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\right] \text{, de 'eerlijke' afronding van } \frac{n!}{e}.$$

Zo zie je maar weer waar een goed oud-Hollands gebruik als de viering van Sinterklaas toe kan leiden. Nadat ik in klas 6 iets over de reeksontwikkeling van $e^x$ had verteld, konden zij de generalisatie aardig volgen. Eigenlijk lijkt me het verhaal (tot aan de finale) het leukst in klas 4: een niet triviaal probleem waarbij je aardig in de slag moet met faculteiten en kansen. Dit jaar geef ik geen les in een vierde klas, maar volgend jaar zal ik m'n kans waarnemen!

## Noten

[1] Zie bijvoorbeeld de bijdrage van K.A. Post in het artikel 'Welgeteld' van M.C. van Hoorn, *Euclides 63*, (7), 1988, 208-209.
Toevoeging van de redactie:
Zeer onlangs verscheen van de hand van J. Breeman het artikel 'De wiskunde van Sinterklaas' over hetzelfde probleem. In: *Euclides*, *69*(4), 1994, 114-115.

[2] $$\frac{(n-1)Z(n-1)}{n!} + \frac{(n-1)Zn-2}{n!} =$$

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{Z(n-1)}{(n-1)!} + \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)Z(n-2)}{(n-1)(n-2)!} =$$

$$\frac{(n-1)}{n}P(n-1) + \frac{1}{n}P(n-2)$$

*(Advertentie)*