Chaos in vwo 5

C.J. van de Giessen
Isala College, Silvolde

Inleiding

De mens is geneigd te denken dat hij beter kan voorspellen als hij nauwkeuriger kan rekenen. Dat is niet het geval en dat is maar goed ook. De chaostheorie, die gaat over kleine veranderingen met grote gevolgen, laat dat zien. Zonder chaos zou alles regelmatig en gladjes verlopen, zou de toekomst voorspelbaar en het leven saai zijn. Zonder chaos zou er wellicht zelfs geen leven zijn. Een volmaakt regelmatig kloppend hart zou zich van een verstoring niet kunnen herstellen en het snel begeven.
De chaostheorie staat momenteel volop in de belangstelling en wordt te pas en te onpas gebruikt. De vlinder van Lorenz is een welhaast bij iedereen bekend begrip. Het uitsterven van de sauriërs, verklaard met de catastrofetheorie, dat wil zeggen plotseling optredende slechte externe omstandigheden, blijkt met behulp van de chaostheorie zeer plausibel verklaard te kunnen worden. En in bepaalde disciplines is zelfs chaosmanagement de nieuwe trend.
In het Museon in Den Haag was tot en met 6 maart 1994 de tentoonstelling *Chaos, grenzen aan de voorspelbaarheid* te zien. In dezelfde periode werd in het naastgelegen Omniversum de film *De ontdekkers* vertoond, die tot op zekere hoogte bij de tentoonstelling aansluit.
Eind 1993 bezochten de leerlingen van het Isala College die wiskunde B en/of natuurkunde in hun pakket hadden de tentoonstelling en de film. Ter voorbereiding van dit bezoek is bij de vakken natuurkunde, levensbeschouwing/filosofie en wiskunde aandacht aan de chaostheorie geschonken. Naar aanleiding van de lessen *wiskunde en chaos* is dit artikel tot stand gekomen.
Achtereenvolgens wordt aandacht besteed aan:
- de chaostheorie in algemene zin
- het dynamisch systeem van de logistische groei
- chaos in de klas
- chaostheorie en het leerplan vwo wiskunde B.

De chaostheorie

Het studieterrein van de chaos kent grofweg twee componenten. De analyse-achtige component wordt chaostheorie genoemd, de meetkundige component gaat over fractals. In het begin van de jaren zeventig ontwikkelden de chaostheorie en de theorie van de fractalen zich gescheiden. Beide theorieën gaan over structuren die voorkomen in onregelmatige patronen. In de chaostheorie gaat het vooral over dynamische modellen, bij de fractaltheorie staan de meetkundige structuren centraal. Al spoedig bleek dat vormen die in de natuur voorkomen, zoals bijvoorbeeld wolken, bliksemschichten of varens, uitstekend met fractals beschreven kunnen worden. Ook grafische voorstellingen van chaotisch gedrag blijken fractale vormen te bezitten.
Waar de 'klassieke' wiskunde gaat over vloeiende vormen, gladde formules en gehele dimensies, houdt de chaoswiskunde zich bezig met ruwe vormen en gebroken dimensies, maar ook met eenvoudige formules die verre van eenvoudige uitkomsten laten zien. In 1986 is het begrip chaos gedefinieerd als 'stochastisch gedrag van een deterministisch systeem'. In deze definitie zijn de kernwoorden stochastisch, dat wil zeggen geleid door het toeval, en deterministisch, dat wil zeggen bepaald door vastliggende procedures. Het woord gedrag geeft aan dat het om een dynamisch proces gaat waarin de orde en de on-orde (om het misleidende begrip wanorde te vermijden) op elkaar inspelen.
Centraal in de chaostheorie en ook bij de fractalmeetkunde staat de iteratie, de herhaling van eenzelfde algoritme. Meetkundig leidt iteratie van een eenvoudig tekenalgoritme tot de fraaiste vormen. Een bekend voorbeeld uit de tijd van voor de fractals is de boom van Pythagoras.

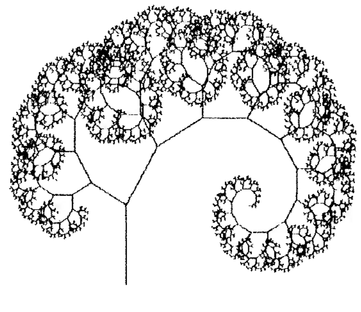

fig. 1: Scheve boom van Pythagoras

De kromme van Von Koch is een ander voorbeeld. Deze kromme komt tot stand door een lijnstuk in drie gelijke stukken te verdelen en het middelste stuk te vervangen door de opstaande zijden van een gelijkzijdige driehoek. Herhaaldelijk toegepast op de zijden van een vierkant levert dat een figuur op die op een sneeuwvlok lijkt.

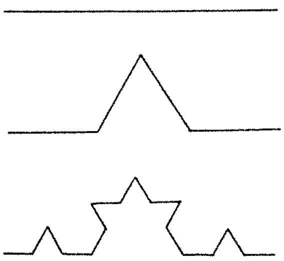

fig. 2: Tekening bij algoritme voor Von Kochkromme

Door de procedure tot in het oneindige te herhalen ontstaat een kronkelvorm die in elk punt gelijkvormig is aan de vorm als totaliteit. De figuur overdekt het vlak niet volledig, daarom is de dimensie van de figuur kleiner dan 2. Maar ook is de figuur niet meer als een ééndimensionale kromme te beschouwen. Het blijkt dat de dimensie van de Von Koch fractal een gebroken getal is en wel ongeveer 1,26.
Een heel bijzonder terrein vormt de algoritmische plantenwereld van de zogenaamde Lindenmayersystemen.

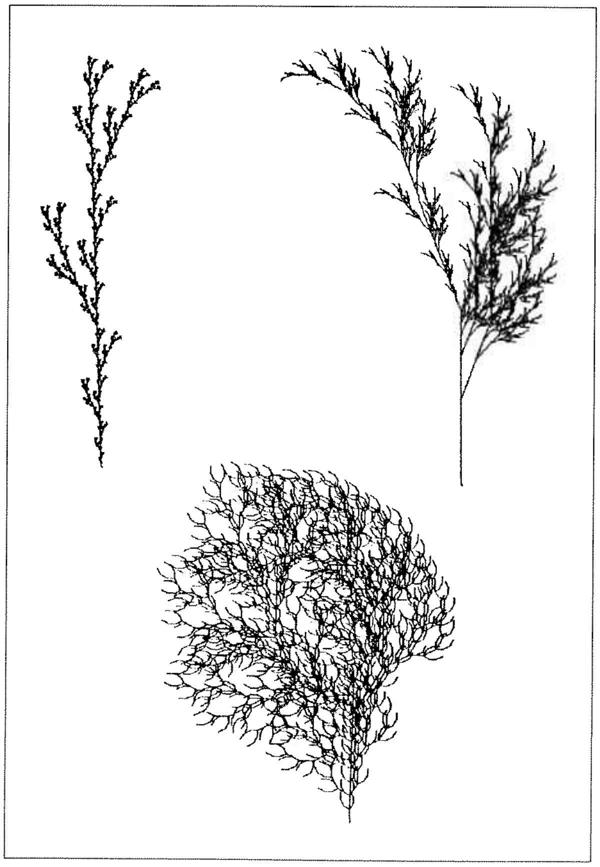

fig. 3: Algoritmische planten

Iteraties met een formule, dat wil zeggen de output wordt de input voor de volgende stap, zijn met een op school gangbare rekenmachine voor simpele voorschriften als $\sqrt{x}$ of $\sin x$ eenvoudig uit te voeren. Iteratie is niets anders dan het bij herhaling indrukken van een toets. Ingewikkelder formules zijn eenvoudig te programmeren voor een computer. In de boeken van Lauwerier zijn voorbeelden daarvan ruim voorhanden.
Bij het itereren van een eenvoudige kwadratische formule kan al orde en chaos optreden. Orde in de vorm van een constante of cyclische uitkomst, chaos in de vorm van het ontbreken van elke vorm van regelmaat. Orde en chaos zijn twee toestanden die horen bij eenzelfde systeem, zoals hier bijvoorbeeld de kwadratische formule. Een wiskundige is geïnteresseerd in de overgang van de ene naar de ander toestand. Waar en waarom gaat orde over in chaos en omgekeerd.
Niet-lineaire dynamische systemen vormen het gebied in de wiskunde dat gaat over processen die met de tijd veranderen en waarbij de situatie op een moment (output) bepalend is voor het gedrag op het volgend moment (input). Het weer van de meteoroloog, de aandelenkoersen van de econoom, de populaties van de bioloog en de bewegingen van de hemellichamen van de astronoom, zijn voorbeelden van dergelijke dynamische systemen. Het vakgebied van de niet-lineaire dynamische systemen leent zich heel goed voor onderzoeken en experimenten op het niveau van vwo 5.

Logistische groei

Het model van de logistische of geremde groei wordt vaak genoemd naar de opsteller de Belg Verhulst. In veel publikaties over chaos komt men dit model tegen omdat de formule zo eenvoudig is en de eigenschappen van het model zeer verrassend zijn. De formule is

$$x_{t+1} = a \cdot x_t \cdot (1 - x_t)$$

Hierin stelt x_t bijvoorbeeld de (relatieve) grootte van een populatie op tijdstip t voor. De output x_{t+1} stelt dan de grootte op een volgend tijdstip voor en is de nieuwe input om de volgende generatie te bepalen.
De parameter a is een constante die bepalend is voor de omstandigheden (voedsel, leefruimte) waarin de populatie zich ontwikkelen kan. De waarden van x zijn minimaal 0 en maximaal 1. De factor $(1 - x)$ is de factor die de rem op de groei is. Kleine waarden van x hebben nauwelijks een remmend effect, waarden van x dicht bij 1 hebben een zeer groot effect op de groei van de populatie. Door de iteratie, output wordt input, moet x_{t+1} ook in het interval [0,1] liggen. Dientengevolge is de waarde van a beperkt tot $0 < a \leq 4$.
De differentiaalvergelijking $x'(t) = ax(1 - x)$ beschrijft de geremde continue groei van een populatie als functie van de tijd. De oplossing van deze differentiaalvergelijking is $x(t) = e^{at}/(c + e^{at})$, met als grafiek de bekende logistische S-kromme. De iteratieformule beschrijft een discreet proces van geremde groei.

Er bestaat een aantal technieken om iteraties, zoals hier bij het model van de logistische groei, te onderzoeken. Uiteraard met gebruik van een computer om het routinematige rekenwerk snel en efficiënt te laten uitvoeren. Tijdreeksen (iteratiereeksen), de waarde van x uitgezet tegen t, kunnen getoond worden in de vorm van een tabel of lijndiagram. De reeksen kunnen nogal lang worden voordat zich conclusies beginnen af te tekenen.

Parameter a: 3.5

iteratie	*x*-waarde	iteratie	*x*-waarde
1	.315	11	.4108985
2	.7552125	12	.8472133
3	.6470331	13	.4530503
4	.7993344	14	.867285
5	.5613962	15	.402856
6	.8618068	16	.8419707
7	.4168354	17	.4656962
8	.8507928	18	.8708813
9	.4443055	19	.3935647
10	.8641434	20	.8353503

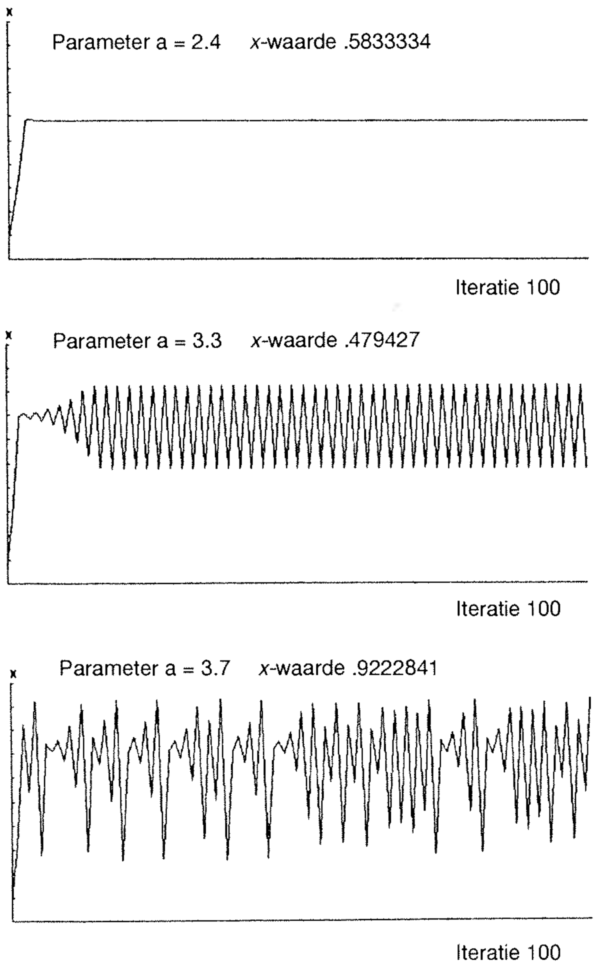

fig. 4: Lijngrafieken van tijdreeksen

Met de computer is dat echter geen probleem.
Een fraaie techniek is die van de grafische iteratie waarbij via de lijn $y = x$ output tot input wordt gemaakt en het model bij een gekozen waarde van a als een bergparabool aanwezig is.
De figuren die hier ter illustratie zijn opgenomen zijn screendumps van het programma dat in de klas is gebruikt en dat later in dit artikel kort besproken wordt.

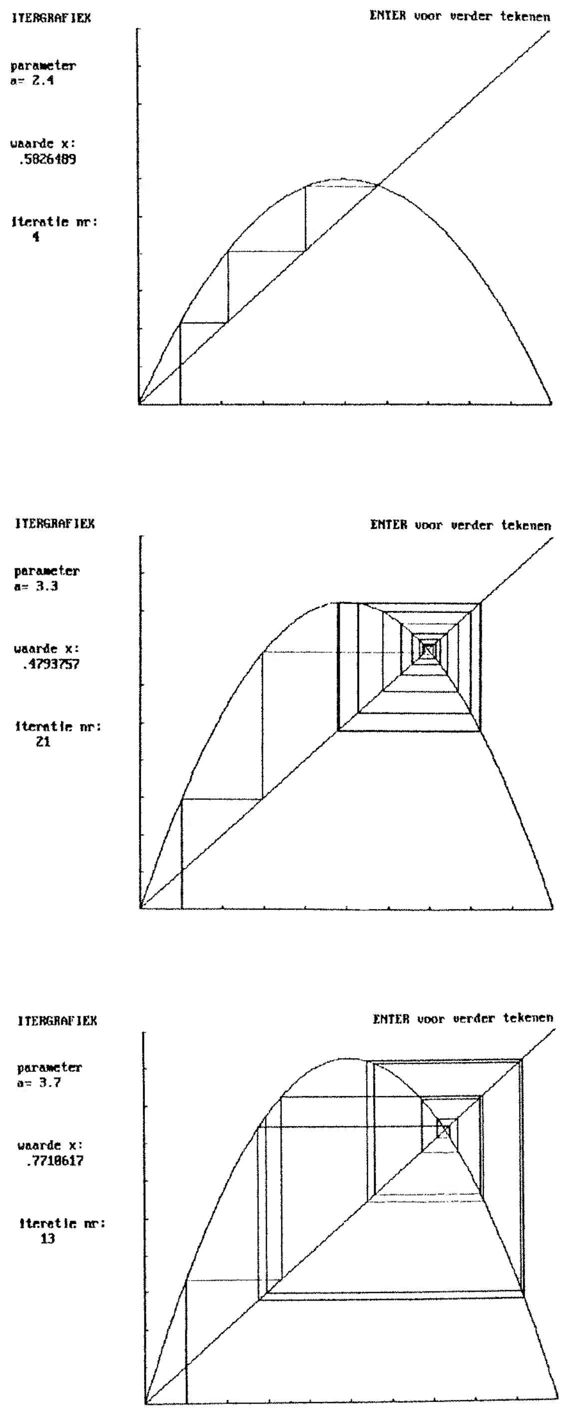

fig. 5: Iteratiegrafieken

Afhankelijk van de waarde van a, of anders gezegd afhankelijk van de omstandigheden waarin de populatie zich bevindt, kunnen de volgende situaties optreden:

- de populatie sterft uit; de waarde van x gaat naar 0
- de populatie wordt stabiel; de waarde van x gaat naar een constante
- de populatiegrootte wordt cyclisch
- de populatie vertoont chaotisch gedrag.

In de grafische 'spinneweb'-iteraties worden stabiele situaties zichtbaar als een spiraal en de cyclische met periode 2 als een rechthoek. Het merkwaardige is dat het er in het geheel niet toe doet wat als beginwaarde van x wordt gekozen. Het enige verschil is dat de stabiele fase, de limiet in wiskundige termen, de aantrekker zoals die in de chaostheorie wordt genoemd, sneller of minder snel wordt bereikt.

De overgang van een stabiele naar een cyclische situatie met twee aantrekkers vindt plaats bij de waarde $a = 3$. Bij een verhoging van a ontstaat op een gegeven moment een cyclus met periode 4, bij verdere verhoging van a een periode 8 enzovoorts. Deze periodeverdubbeling gaat steeds sneller en bij $a \approx 3{,}57$ is het model 'chaotisch' geworden. Bij deze waarde van a heeft een miniem verschil in de beginwaarde van x tot gevolg dat de bijbehorende reeksen snel grote verschillen gaan vertonen. Hoe nauwkeurig je ook rekent, je bent er alleen maar zeker van dat de laatste decimaal van je input een onzekerheid bevat. Die '(on)zekerheid van de laatste decimaal' betekent dat de waarde die x bij een volgende iteratie zal aannemen niet meer te voorspellen is.

De chaotische toestand blijft na verdere verhoging van a eerst bestaan, maar gaat dan plotseling over in een cyclische toestand met een periode die nu geen macht van 2 meer is. Dit zijn de zogenaamde 'vensters', in de chaos duikt plotseling orde op. Deze vensters zijn goed te zien in het zogenaamde bifurcatie-diagram van het model. In een bifurcatie-diagram wordt tegen a de waarde uitgezet waar x, na langdurig itereren, naar toe wordt getrokken. Het diagram ontleent zijn naam aan de typerende en steeds terugkerende vertakkingen.

Bij uitvergroten van een gedeelte van dit diagram komen steeds dezelfde structuren terug. Het diagram is gelijkvormig in zichzelf, het diagram is een fractal.

Het merkwaardige is dat dit diagram niet specifiek is voor het logistisch model maar wel voor allerlei modellen die grofweg dezelfde soort grafiek laten zien, dus bijvoorbeeld ook $x_{t+1} = a \sin x_t$ op interval $[0, \pi]$.

Chaos in de klas

Het deel van de chaostheorie zoals hierboven geschetst bleek heel goed inpasbaar in het programma voor vwo 5. Met veel interesse hebben de leerlingen een viertal lessen besteed aan chaos en wiskunde, vooral gebaseerd op het logistische model. Twee lessen theorie aan de hand van werkbladen, een les onderzoek en experiment met een computerprogramma dat speciaal hiervoor bij de werkbladen is gemaakt en een afsluitende les.

Met behulp van de werkbladen werd allereerst gewerkt aan het itereren, zowel met de rekenmachine als grafisch. Het itereren op zich gaf geen enkel probleem al werd bij het grafisch itereren de 'trap' tussen grafiek en $y = x$ wel eens verkeerd opgebouwd. De leerlingen ervoeren dat de nauwkeurigheid van tekenen soms wel en soms niet tot grote verschillen aanleiding kan geven. Dat was een leuke bijkomstige illustratie van 'kleine verschillen – grote gevolgen'.

Dat bij het logistisch model een stabiele situatie optreedt vonden de leerlingen eigenlijk heel logisch. Maar als ze bleven 'vastzitten in een hok' dachten ze dat er iets fout gedaan was. Toen bleek dat iedereen dit overkwam en zo'n hok toch wel goed was, was de belangstelling pas goed gewekt.

Het spinneweb dat past bij $a = 4$ werd, logischerwijze, een puinhoop, hoe netjes er ook getekend werd. Chaos kwam wel heel simpel tot stand.

Verder onderzoek was gewenst, niet in het minst om het gedrag bij chaos wat beter in het vizier te krijgen. Er was behoefte aan sneller en nauwkeuriger wiskundig gereedschap, de computer dus.

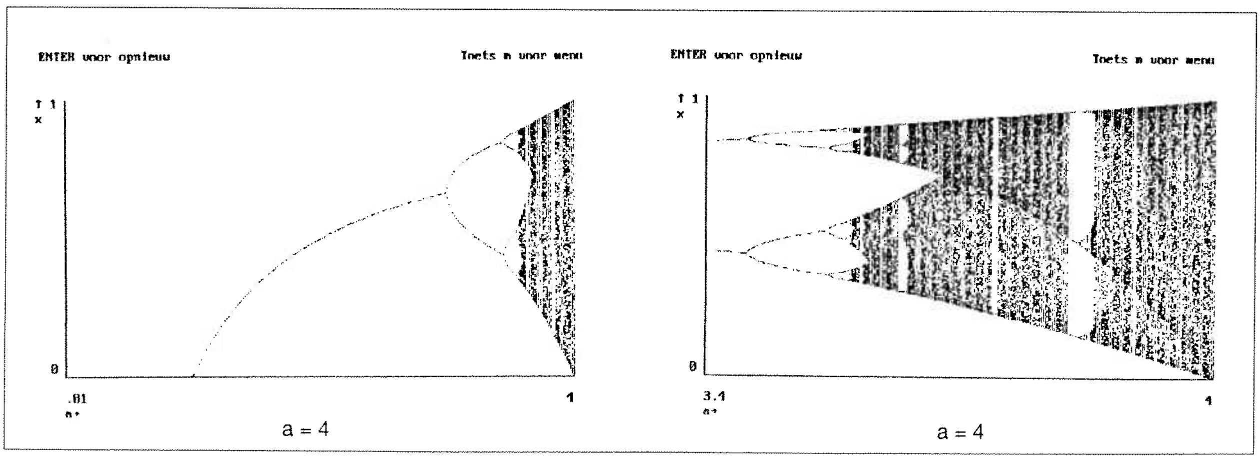

fig. 6: Bifurcatie-diagrammen

Het computerprogramma

Het computerprogramma bevat de opties TABEL, LIJNGRAFIEK, ITERGRAFIEK en SOUND om het logistisch model te onderzoeken. SOUND zet de waarde van x om in een toon. Convergent, periodiek en chaotisch gedrag wordt zodoende hoorbaar.

Isala college		carel van de giessen
silvolde	vwo 5 op zoek naar de CHAOS	wiskunde b
	tabel lijngrafiek itergrafiek sound deltabel deltagrafiek dubbelgrafiek bifurcatiediagram	
start met enter	kies met ↑↓	stop met escape

fig. 7: Menu computerprogramma

Met de opties DELTABEL, DELTAGRAFIEK en DUBBELGRAFIEK kan het effect van verschil in beginwaarden onderzocht worden. Het beginwaardenaspect was vooral voor de natuurkundesectie van belang.
Doel van het computeronderzoek was om na te gaan wat voor cycli optreden en bij welke waarden van a een overgang van de ene naar de andere cyclus ligt. De opdrachten stonden in de al eerder genoemde werkbladen. Opmerkelijk was dat er verschillende strategieën gevolgd werden, de keus hiervoor was ook bewust volledig open gelaten.
De een begon met TABEL en hield het daarbij, de andere opties hooguit als bevestiging gebruikend. Een ander werkte eerst met ITERGRAFIEK om zicht op de toestand te krijgen en checkte die vervolgens met GRAFIEK. Ook SOUND werd, na enig gespeel, onderkend als een middel om cyclisch gedrag op te sporen.

BIFURCATIE-DIAGRAM was op de leerlingcomputers niet beschikbaar, omdat deze computers te traag zijn en het scherm een te lage resolutie heeft. In de afsluitende les werd het bifurcatie-diagram nader onderzocht op de klascomputer (een 386-er). Aan de orde kwam de zelfgelijkvormigheid van het bifurcatie-diagram. Eenmaal aangeland op het terrein van de fractals werden er daar nog wat van onderzocht met het shareware programma *Fractint*.

Naast natuurkunde en wiskunde schonk ook het vak levensbeschouwing aandacht aan de chaostheorie. Daar ging het, uiteraard, om de mens die wordt beheerst door wetmatigheden en of de mens, die niet voorspelbaar is, ook vrij is.

De leerlingen vonden de chaoswiskunde 'weer eens iets anders', 'toch wel verrassend dat er van die rare dingen gebeuren', maar vooral 'intrigerend'. Ze legden zelf verbindingen naar limieten, en iteratie van een lineair systeem werd herkend als een exponentieel groeiproces. De afwisseling van theorie, onderzoek met de computer en de relatie met andere disciplines maakte de lessen boeiend voor leerling en leraar.

Chaostheorie en leerplan wiskunde B

Als wiskunde het antwoord van de mens is op de complexiteit van de wereld, dan hoort wiskunde vitaal, spiritueel en actueel te zijn. In de schoolwiskunde is dat niet het geval. De chaostheorie biedt op wiskundig gebied een uitdagende aanvulling op alle brave en continue functies, figuren en lichamen. Veel bekende zaken kunnen een dynamisch accent krijgen. Met chaostheorie blijkt dat er soms wat anders gebeurt dan wordt verwacht. Ook in de wiskunde moet je alert blijven, je kunt niet zeggen '... en zo gaat het maar door, voel je wel?'. Dat gebeurt in de schoolwiskunde al veel te vaak.

Tot slot een aantal overwegingen die wellicht ook van belang zijn voor een nieuw programma voor wiskunde B op het vwo.
In veel toepassingen is iteratie een belangrijk stuk algoritmiek. In wiskunde A vinden we er iets van in de beschrijving van de ontwikkeling van een populatie met behulp van Leslie-matrices. In wiskunde B speelt het iteratieprincipe in de theorie van de dynamische systemen een belangrijke rol. Dit zou er voor kunnen pleiten om in het B-programma iets van dynamische systemen op te nemen. Een ander argument daarvoor is dat het voor het aanzien van het vak nuttig zou kunnen zijn in de schoolwiskunde onderdelen op te nemen die van recenter datum zijn dan de klassieke analyse. De maatschappelijke betekenis zou daardoor ook sterker worden.
Ook de meetkunde kan in een bredere context dan momenteel het geval is, worden geplaatst. Fractale vormen, die dwarsverbanden leggen naar gebieden als natuur en kunst, spreken een ieder aan en bieden de mogelijkheid het onderwerp (zelf)gelijkvormigheid vanuit een andere invalshoek te benaderen. De enigszins weggeschoven aandacht voor het limietbegrip zou daarmee tevens een nieuwe impuls kunnen krijgen. En het Euclidisch dimensiebegrip kan worden uitgebreid tot gebroken dimensies. Waarschijnlijk zal een dimensie 1,3 voor de meeste leerlingen beter te bevatten zijn en hen ook meer aanspreken dan een gehele dimensie groter dan 3.
In de meetkundige en analytische aspecten van wat hier ruwweg als chaostheorie is aangeduid, speelt de inzet van de computer een essentiële rol. Zonder computer was deze theorie in het geheel niet tot stand gekomen.
De computer is een onmisbaar stuk wiskundig gereedschap geworden bij het uitvoeren van wiskundige expe-

rimenten en het bestuderen van modellen. De betekenis van de computer, ook voor de schoolwiskunde, stijgt daarmee uit boven die van een veredelde (grafische) rekenmachine.
Er zijn vele mogelijkheden om de wiskunde in de bovenbouw tot een dynamisch en creatief vak te maken, een vak dat aan de basis van veel andere disciplines ligt. Hopelijk worden die mogelijkheden niet onbenut gelaten.

Collega's die de lessen (8 pagina's) en het computerprogramma willen uitproberen in hun klas kunnen hierover tegen kostprijs (f 10,-) beschikken.

C.J.van de Giessen
Isala College
Laan van Schuylenburch 8
7064 ZG Silvolde

Literatuur

Noort, P.C. van den (1993). *Chaostheorie en evolutie.* Eburon, Delft. ISBN 90-5166-313-7

Gerken, Gerd (1991) *Manager... die Helden des Chaos.* Econ Executive Verlag, ISBN 3-430-13158-8

Grasman, J. (1992) *Wiskundige methoden toegepast.* Epsilon nr. 22, Utrecht. ISBN 90-5041-021-9

Blij, F. van der e.a. (1990). *Kaleidoscoop van de wiskunde 1.* Epsilon nr. 17, Utrecht. ISBN 90-5041-023-5

Chaos (AO nr 2487).

Gleick, James (1991). *Chaos. De derde wetenschappelijk revolutie.* Contact, Amsterdam. ISBN 90-254-6941-8

Stewart, Ian (1991). *Speelt God een spelletje? De structuur van de chaos.* Aula paperback 196, Het Spectrum, Utrecht , ISBN 90-2742564-7

Lauwerier, H.A. (1989). *Modellen met de microcomputer. Experimentele wiskunde.* Epsilon nr. 12, Utrecht ISBN 90-5041-016-2

Lauwerier, Hans (1987). *Fractals, meetkundige figuren in eindeloze herhaling.* Aramith, Amsterdam, ISBN 90-6834-031x

Tennekes, H. (1990). *De vlinder van Lorenz. De verrassende dynamica van de chaos.* Aramith, Bloemendaal, ISBN 90-6834-064-6

Lauwerier, Hans (1992). *Computersimulaties. De wereld als model.* Aramith, Bloemendaal, ISBN 90-6834-106-5

Robbins, Judd (1993). *Pret met fractals.* (met sharewareprogramma's). Sybex, Soest, ISBN 90-5160-536-6

Barnsley, Michael (1988). *Fractals everywhere.* Acadamic Press, ISBN 0-12-079062-9

Peitgen, H.O. e.a. (1991/92). *Fractals for the classroom. Vol I & II.* Springer Verlag, New York.

Peitgen, H.O. and P.H.Richter (1986). *The beauty of fractals.* Springer Verlag, New York. ISBN 0-387-15851-0

Prusinkiewicz, P. and A.Lindenmayer (1990). *The algorithmic beauty of plants.* Springer Verlag, New York. ISBN 0-387-97297-8

Devaney, R.L. (1986). *An introduction to chaotic Dynamical Systems.* The Benjamin/Cummings Publ. Comp. ISBN 0-8053-1601-9

Extra voorlichtingsbijeenkomst informatietechnologie wiskunde

Doelgroep
Deze bijeenkomst is bedoeld voor wiskundedocenten van (i)vbo tot vwo, die breed geïnformeerd willen worden over computergebruik in het nieuwe leerplan, nieuwe software en bijbehorend lesmateriaal.

Programma
Het programma bestaat uit een plenaire presentatie over de stand van zaken. Daarin wordt aandacht besteed aan de computer in het nieuwe leerplan, het computerpracticum, de computer als demonstratiemiddel en de 'meerwaarde' van de computer bij wiskunde. Daarna is er twee keer een werkgroep, waarin de cursist zelf met de computer aan het werk kan.
Het cursusboek *Computergebruik in basisvorming wiskunde* bevat naast achtergrondinformatie een overzicht van bruikbare software en leermiddelen.

Data/plaats
Woensdag 20 april 1994 te Utrecht
Tijd: 15.00 – 18.00 uur

Inschrijving
Kosten *f* 50,00 inclusief lesmateriaal

Inlichtingen
Voor meer informatie kunt u contact opnemen met het
Algemeen Pedagogisch Studiecentrum
Informatiepunt wiskunde
Zwarte Woud 2
3524 SJ UTRECHT
Tel. 030 – 856721/856722