

Bolmeetkundelessen

J. van den Brink

Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Inleiding

Meetkunde ter verduidelijking

Bolmeetkunde is meetkunde van het boloppervlak. Je denkt al gauw aan de analytische boldriehoeksmeting met allerlei goniometrische stellingen over boldriehoeken. Maar dat is niet het enige waartoe we met bolmeetkunde veroordeeld zijn. Integendeel, we kunnen ook bolmeetkunde op niet-analytische manier bedrijven. En er bestaan gewichtige redenen voor zo'n (synthetische) bolmeetkunde. In het 'dagelijks leven' bijvoorbeeld bestaan verschijnselen die zonder bolmeetkunde, met name zonder grootcirkels, onduidelijk en geheimzinnig blijven. Neem het feit dat een vliegtuig startend vanaf Amsterdam en op weg naar Los Angeles, niet direct in westelijke richting vertrekt (wat gezien de wereldkaart voor de hand zou liggen), maar in noordwestelijke richting – alsof het voor een omweg langs de noordpool kiest. Vreemd. Zelfs in boeken over navigatie, die gebruikt worden in het middelbaar zeevaartonderwijs, wordt hierover geen uitleg gegeven (Van Rheenen, 1986; Van Hoorn, 1993). Men volstaat met de opmerking, dat op een wassende kaart (mercatorprojectie) de grootcirkel wordt afgebeeld als een kromme lijn met de bolle zijde gericht naar de pool. Hoe dat komt, blijft buiten beschouwing. Een tweede voorbeeld is het feit dat de grootcirkel de kortste afstand én de startrichting tussen twee punten op aarde aangeeft. De kortste afstand? Maar hoe komt het dan dat je, schuivend langs die kortste afstand in de richting van je eindpunt, toch steeds van richting moet veranderen? En zijn er eigenlijk wel rechte lijnen op aarde? En rechte lijnen die evenwijdig zijn? Meetkunde kan een vak worden dat voor duidelijkheid zorgt in dergelijke verschijnselen en – zoals ook al in de Oudheid – een vak dat discussies stimuleert.

Onderwerpen: soorten meetkunde, grootcirkels, tegenpolen en kaartprojecties

Binnen de bolmeetkunde komen verschillende onderwerpen in aanmerking om op school behandeld te worden. We noemen: grootcirkels, pool en tegenpool, kaartprojecties, maar ook: soorten meetkunde.

De grootcirkel is een belangrijk onderwerp. Hij is over het boloppervlak dat wat de rechte lijn in het platte vlak is: drager van de kortste afstand en van de richting tussen twee punten. Maar hij is ook de grootste doorsnede van een ruimtelijke bol. In feite is de grootcirkel op verschillende manieren te definiëren afhankelijk van welke ruimte (twee- of driedimensionaal) men op het oog heeft.

Grootcirkels komen in het nieuwe wiskundeprogramma voor 12-16 alleen voor in het pakket *Mekka*. Toch passen ze goed in het programma als een bijzonder vervolg op 'meetkunde over vormen en figuren' (doorsneden), 'kijkmeetkunde' en 'plaatsbepalen': drie van de vier gebieden in het meetkundeprogramma (*Achtergronden*, 1992, deel 2, blz. 14 e.v.).

'Pool en tegenpool' is een ander bolmeetkundig onderwerp. De noord- en zuidpool kunnen ervoor als model dienen; een meetkundig verband tussen pool, tegenpool, middelpunt van de aarde en grootcirkel kan worden gelegd. Naast pool en tegenpool bestaan er op een bol ook vlakken en 'tegenvlakken' (de halfronden, bijvoorbeeld, of de tijdzones), lijnen en 'tegenlijnen' (de nulmeridiaan en de datumgrens, bijvoorbeeld). Juist voor een meetkunde op het boloppervlak zijn deze 'tegen'-begrippen typerend.

Naast grootcirkels, pool en tegenpool zijn de 'afbeeldingen' van het boloppervlak op een plat vlak een derde onderwerp dat de bolmeetkunde tot een interessant vak maakt. Twee projecties springen daarbij in het oog: de mercatorprojectie (wereldkaart) en de centrale projectie (poolkaart). Een rechte lijn op de wereldkaart geeft een koerslijn met een vaste koers (een loxodroom) op de bol en een rechte lijn op de poolkaart geeft de kortste afstand (grootcirkel).

Soorten meetkunde is het vierde onderwerp. Bolmeetkunde verschilt fundamenteel van vlakke en ruimte-meetkunde. Er bestaan bijvoorbeeld geen evenwijdige grootcirkels, geen evenwijdige rechten.

Lessen bolmeetkunde

De vier onderwerpen zijn in zes lessen aan de orde geweest. Vijf lesuren in de periode van medio maart tot

medio april; in het zesde lesuur werd een toets afgenomen. De lessen werden gegeven door Wim Schaafsma in drie derde mavo-klassen van de Scholengemeenschap Greydanus in Zwolle. In totaal deden 75 leerlingen van rond de 16 jaar eraan mee.

We maakten gebruik van globes, plastic schuimbolletjes, een halve bol van doorzichtige plastic, een islamitisch bidkleedje en het lespakket *Mekka*.

In de klas

Richting en afstand op bol en kaart

In de eerste les vertelt leraar Wim erover: 'Het gaat voornamelijk over richtingen en afstanden over de aardbol en over de kaart'. 'Die zijn toch hetzelfde?', reageert een meisje ongelovig, 'de afstand tussen twee plaatsen is toch steeds dezelfde?'. Wim: 'Ja, maar een afstand over een kaart verschilt met dezelfde afstand over de bol'. Dat hadden veel leerlingen zich nog niet gerealiseerd. Het blijkt dat er van meet af aan vier 'gebieden' in het spel zijn: de echte afstand tussen twee plaatsen in de wereld, de afstand op de platte wereldkaart, de afstand over de globe en de afstand door de globe heen.

De les gaat daarna over de Kibla, de richting naar Mekka, vanuit de klas. Via de globe (richting Nederland-Mekka is zuidoost) en de zon ('In welke richting komt de zon op?') wordt de Kibla in de klas vastgesteld. 'Maar is de bidrichting in Indonesië bijvoorbeeld ook zuidoost?', vraagt Wim.

De leerlingen hebben snel door dat de richting naar Mekka per plaats op aarde (meestal) verschilt. Of schoon.....

'Richting en richting is twee'

Tijdens de derde les kijken Peter, Betrick en Bart elkaars werk na. Bart heeft de eerste twee lessen niet meegeemaakt, hij was ziek. De anderen leggen hem alles uit. En ik luister mee.

Betrick vertelt Bart hoe het met het bidkleedje is gegaan voor de klas. Hoe de Mekka-meter (het kompas op het kleed) werd gebruikt met het boekje van de imam. Dan gaan ze over op werkblad 1:

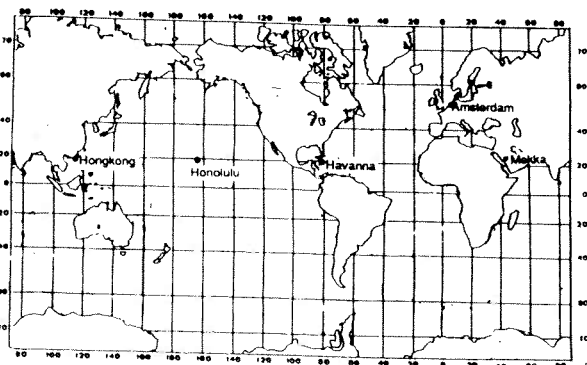


fig. 1: Wereldkaart

Bart tekent rechte pijlen in deze wereldkaart vanaf verschillende plaatsen (Amsterdam, Havanna, Honolulu, Hongkong) naar Mekka.

Peter legt daarna uit: 'Ze kijken vanaf die plaatsen in verschillende richtingen'. Bart kijkt hem verwonderd aan. 'Nee, het is toch in dezelfde richting', zegt hij, 'allemaal naar Mekka'. 'Nee, dat is toch niet dezelfde richting', valt Betrick uit. 'Nee, dat zie ik ook wel', zegt Bart iets geïrriteerd, 'ze kijken wel naar dezelfde plaats, maar niet in dezelfde richting'.

Het is de leerlingen blijkbaar impliciet al bekend dat 'richting' verschillende betekenissen heeft: de richting direct naar de plaats Mekka, maar ook de richting naar Mekka ten opzichte van een ander punt: de noordpool, bijvoorbeeld. De laatste betekenis verschilt meestal voor verschillende plaatsen rond Mekka, tenzij we – theoretisch gesproken – Mekka zelf voor noordpool houden. In dat geval zou het voortdurend bijsturen van de koers op weg naar Mekka (langs een grootcirkel, bijvoorbeeld) niet nodig zijn.

'Gelijke cirkels over het boloppervlak'

Na de inleiding gaan de leerlingen in tweetallen aan het werk. Een opgave uit het boek:

Andere Arabische geleerden vinden dat je vanuit Havanna niet naar het oosten kijkt. Je kijkt naar het noordoosten. Die afstand is korter.

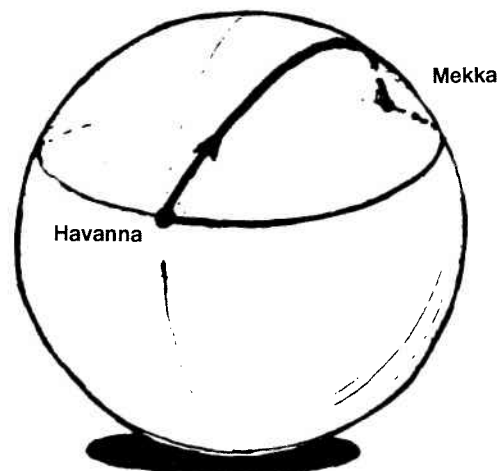


fig. 2: Aardbol met Mekka en Havanna

Maar lang niet iedereen is het daarmee eens.

Henk: 'Die afstanden zijn toch even lang! Je kan die ene zo op de andere leggen'. En hij wijst in de tekening hoe de grootcirkelboog kan worden verschoven tot op de parallelcirkel. Hij denkt dat de lengte van de boog daarbij niet verandert. 'Het is een bol, hè', legt hij me uit.

Snijcirkels door de bol

Even later, in het hoofdstuk dat er op volgt, over snijcirkels door de bol, denkt hij er anders over:

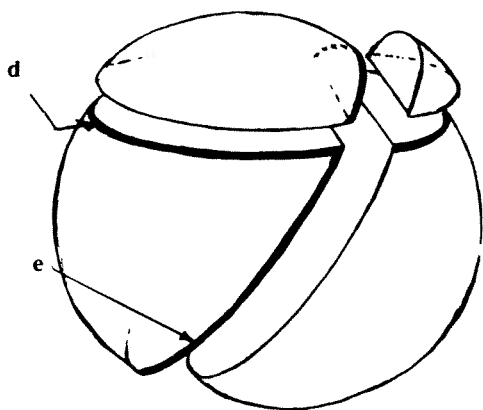


fig. 3: De aarde twee maal doorgesneden

Welke cirkel is de grootste snijcirkel? d of e? Waarom?

Henk: 'Cirkel e, omdat hij dichterbij het midden ligt. Het is de middendoorsnede'.

Een eerste formulering van wat een 'grootcirkel' is. Althans, de grootcirkel als snijcirkel door de aarde, want op het aardoppervlak is de grootcirkel een 'rechte' lijn, of beter: een lijn recht vooruit om de aarde heen. We kunnen dus nogal wat problemen verwachten in de klas door deze verschillende soorten meetkundige standpunten. 'Lesgeven wordt een avontuur', vindt Wim, niet zonder enige bedenkingen.

In de lerarenkamer

Wim en ik ontmoeten elkaar regelmatig in de lerarenkamer en bespreken de voortgang.

Welke onderwerpen moeten we nog doen? Tegenpolen? Tijdzones? Bolcoördinaten? We leggen vooral het accent op de grootcirkel: de definitie, de grootcirkel als kortste afstand, het vliegen noordelijker dan de parallelcirkel, de grootcirkel als lijn recht vooruit om de aarde heen, de grootcirkel als richtingdrager, het bijsturen op een grootcirkelkoers. Ik twijfel eraan of alle zaken nog aan bod zullen komen, maar Wim geeft hoop en zegt nog drie lessen nodig te hebben.

'Een stukje huisvlijt'

Ik leg hem het didactische 'draaideur-idee' voor:

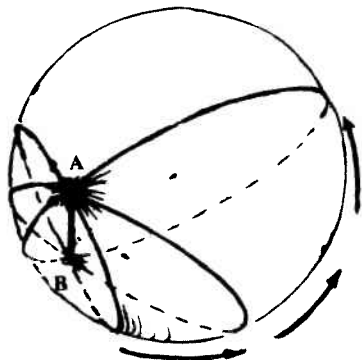


fig. 4

Een waaier van snijvlakken snijdt de bol volgens cirkels. Je kan ermee aantonen dat de grootcirkel de kortste afstand aangeeft en dat de grootcirkel boven de parallelcirkel uitkomt door de deur om de as te laten draaien. Ik wist al dat er leerlingen zijn die (zoals Henk) in gedachte cirkels over het boloppervlak laten schuiven, maar daarbij denken dat de cirkels even groot blijven.

Voor dit draaideur-idee kan ik echter geen demonstratiemodel bedenken. Thuis heb ik op een transparante plastic bol drie cirkels getekend die elkaar in twee punten snijden: een parallel-, een klein- en een grootcirkel.

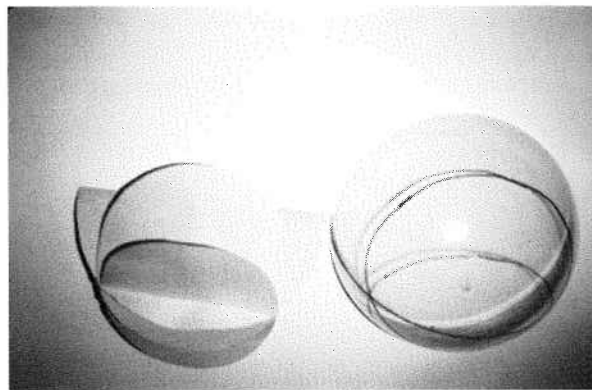


fig. 5: Demonstratiemodel voor het draaideur-idee

Een papieren draaideur van deze drie cirkels past in de bol. 'Een stukje huisvlijt', noemt Wim het geheel. Hij komt met nog een suggestie: gebruik een versnellingskabel tussen twee punaises op een schuimplastic bol langs de parallelcirkel. Die kabel is stijf genoeg om cirkelvormig te blijven en toont bij draaien dat hij groter is dan de grootcirkel.

Uiteindelijk zullen het de leerlingen zijn die ons met een ander idee uit dit didactisch probleem redden.

Leerlingen aan het woord

Van kaart naar bol

Les drie. In groepjes van vier kijken de leerlingen elkaars huiswerk na. Het is een goede werkvorm. Ze moeten namelijk hun antwoorden verantwoord tegenover elkaar.

Is de richting naar Mekka vanuit Havanna oost of noordoost? luidt de vraag in het boek.

Peter: 'Het is oost op de kaart'. Ieder in de groep gaat ermee akkoord. Dan vervolgt hij tot mijn verbazing: 'Maar het is noordoost op de aarde, omdat de aarde rond loopt'. Weer instemming. En Maarten beargumenteert dit met: 'De kortste afstand tussen twee punten is meer naar het noorden toe, want die ligt altijd naar het smalste punt van de aarde'.

Deze leerlingen denken dus eerst vanuit de wereldkaart. De kaart is in hun ogen waardevoller dan de globe. Dat de bol een 'echter' model is voor onze aarde (de richting

is immers op beide: noordoost) komt nog niet bij hen op. Wel construeren ze van de wereldkaart een bol door er een cilinder van te maken en die aan de poolkanten samen te trekken. De afstanden tussen de punten op gelijke breedte worden naar het noorden toe kleiner. Dus de richting (met de kortste afstand) moet wel iets noordelijker lopen, zo denken ze. Dit idee van de leerlingen is een schitterend alternatief voor mijn draaideur-idee, waarvoor zo moeilijk een demonstratie-model is te vinden.

Eén van de twee: 'Of op de kaart, of op de bol'

Er is echter nog iets verrassends aan de hand.

Een vliegtuig dat van Havanna naar Mekka vliegt, vertrekt naar het noordoosten en niet naar het oosten. Waarom denk je?

Peter, Bart en Betrick kijken naar de kaart en zien de boog Havanna – Mekka.

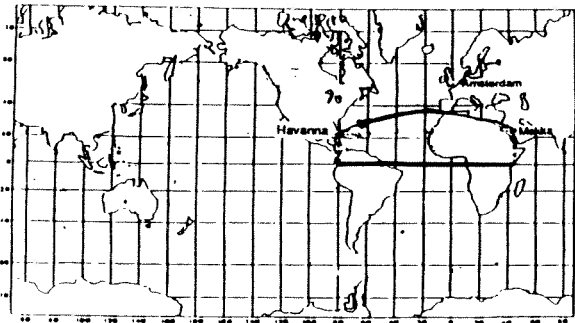


fig. 6

Allerlei redenen bedenken ze: via Spanje om te tanken, met de wind mee, om de woestijn heen.

Dan ontdekt Betrick:

'O, het is met de glóbe gedaan – het is de globe-richting, niet de kaart-richting. Ze hebben de globe-richting op de kaart getekend.'

De leerlingen onderscheidden aanvankelijk twee aparte richtingen (en kortste afstanden): één op de kaart en één op de bol en houden die stevig geïsoleerd van elkaar. Dat bolrichtingen ook op de kaart kunnen worden afgebeeld, is nieuw voor hen. En dat die rechte lijn op de bol een kromme lijn via Spanje wordt op de kaart, is ook een ontdekking.

Op grond van deze bevindingen overweeg ik in het leerlingenboek meer accent te leggen op het tekenen van bolrichtingen op de kaart.

Intuïtieve meetkunde ten behoeve van het formaliseren

Eén definitie van grootcirkel of vele definities?

In een wiskundige theorie begint men gewoonlijk met één definitie voor een begrip, bijvoorbeeld voor het begrip 'grootcirkel'. Hoe de auteur tot die definitie kwam, waarom hij niet een andere definitie koos, kortom de

problematiek van het formaliseren, het streng in de vorm brengen, blijft uit het zicht van de student.

Geïnspireerd door ervaringen in de basisschool lijkt het mij beter om in het wiskunde-onderwijs niet met één definitie te beginnen, maar om de leerlingen zelf talloze, verschillende 'definities' te laten bedenken. Dan komt ook de leerling als auteur van de theorie in beeld. De leerlingen moeten zelf als ontwerpers van een meetkundige theorie tot afwegen van de definities komen: welke eigenschappen zijn essentieel voor een definitie, welke niet en welke zijn fout? Een definitie is niet het begin-, maar het eindpunt van een proces van organiseren (Freudenthal, 1971).

Van Hiele vond al jaren geleden, dat met het onderzoeken van meetkundige eigenschappen en het leggen van relaties tussen de verschillende eigenschappen en begrippen, een netwerk van meetkundige voorstellingen en relaties ontstaat en een hoger denkniveau door de leerling wordt bereikt (Van Hiele, 1957). Door een appèl te doen op de 'eigen producties' van leerlingen bleek dat ook te gelden voor het begrip grootcirkel.

Eigen producties in de bolmeetkunde: definities van grootcirkel

Opgaven 11 en 12 uit het boek worden besproken in de groepjes. De opgaven laten de leerlingen een definitie voor grootcirkel formuleren en de definities van anderen beoordelen.

Opgave 11 luidt: *Hoe zou jij vertellen wat een grootcirkel op de aardbol is?*

Hier enkele antwoorden:

'Een cirkel als de evenaar' (Betrick).

'Een rechte lijn om de aarde heen' (Bart).

'De cirkel die recht om de aarde loopt' (Johan, eerste definitie).

'Waar de aarde het dikste is' (Johan, tweede definitie).

'De grootste omtrek van de aarde' (Wouter).

In deze antwoorden is een categorisering aan te brengen. Bij de definiëring van grootcirkel door de leerlingen is sprake van

1. de evenaar (of twee meridianen) als model voor de grootcirkel (Betrick)
2. een lijn over het twee-dimensionale boloppervlak (Bart, Johan's eerste definitie)
3. een snijcirkel door de drie-dimensionale bol op de plaats waar die het dikste is (Wouter, Johan's tweede definitie).

Het afwegen van de 'definities' (Welke is de 'beste'? Welke is de 'allesomvattende'?) zoals bij het formaliseren van een wiskundig systeem het geval is, komt hier en daar voor. Johan formuleerde twee aparte definities, maar koos niet 'de beste'. Een leerling, Peter, formuleert spontaan: 'Een grootcirkel is een cirkel recht door het midden van de aardbol die in hetzelfde punt aankomt'. Hij combineert een snijcirkel door de 'ruimtelijke' bol en een lijn recht vooruit over het 'boloppervlak' – een ruimere definitie.

Andere leerlingen worden echter behoorlijk in verlegenheid gebracht bij de beschouwing van de verschillende definities. Er ontstaan hevige meetkundige discussies in de klassen.

Tolerantie voor verschillende gezichtspunten: bolmeetkunde versus ruimtemeetkunde

Heidy, Anette, Maarten en Jan zijn bezig met opgave 12. De opgave bestaat uit acht grootcirkel-'definities' van andere leerlingen. Ik stilerde ze enigszins en leg ze in de opgave ter beoordeling voor aan de leerlingen. Ze moeten aangeven of ze 'goed' of 'fout' zijn en zeggen waarom.

Een grootcirkel is een cirkel met als middelpunt het middelpunt van de aarde. Goed of fout?

'Fout', zegt Heidy. Ik kan mijn oren niet geloven. Het is dé definitie voor grootcirkel. Fout?

'Een grootcirkel gaat óver de aarde heen, toch niet dóór de aarde?', zegt ze.

Anette denkt daar anders over en probeert uit te leggen: 'Als je dit bolletje hebt (ze toont een piepschuimen bolletje met een lasrand op de plaats van de evenaar en doet alsof ze het bolletje over die rand breekt) heb je twee helften. Dat geeft twee grootcirkels met hun middelpunt in de aarde.'

'Waar je een streep trekt, daar doorheen breken, dat bedoelen jullie,' herhaalt Heidy de woorden van Anette. 'Dan kom je bij het middelpunt van de aarde, ja, dat begrijp ik. Maar een grootcirkel is toch een rechte lijn over de aarde heen en niet het snijvlak door de aarde zoals jullie bedoelen. En een rechte lijn heeft geen middelpunt. Dat heeft alleen een cirkel.' Hulpeloos draait ze zich naar me toe en zegt: 'Meester, wie heeft er gelijk?' De grootcirkel als rechte lijn over het aardoppervlak heeft inderdaad geen middelpunt op het aardoppervlak en is ook geen cirkel op dat oppervlak. De grootcirkel als grootste snijvlak door de aardbol heen heeft dat wel. Het zijn twee zienswijzen, die elk op zich juist zijn. Dus ik zeg: 'Jullie hebben alle twee gelijk' en leg nog eens beide standpunten uit. Maar ze hebben er moeite mee: één van de twee moet toch gelijk hebben?

Als ik later aan het voorval terugdenk, realiseer ik me dat dit verschil tussen twee soorten meetkunde: de meetkunde van het boloppervlak (de bolmeetkunde) en de ruimtemeetkunde (de bol als lichaam) van de leerlingen begrip en tolerantie voor elkaars denkbeelden vraagt. Zou wiskunde dan toch een pedagogisch vormende waarde hebben?

Formaliseren: naar een netwerk van eigenschappen

Naast het bedenken en beoordelen van 'definities' voor de grootcirkel wordt het formaliseren gestimuleerd door het vinden van tegenvoorbeelden, uitputtend zoeken naar verbanden en door met de klas op onderzoek te gaan.

Redeneren via tegenvoorbeelden

Opgave 12d: Een grootcirkel is een cirkel die door de noordpool en de zuidpool gaat. Goed of fout? Waarom?

Betrick: 'Het is een cirkel, dus het kan wel'. Hij blijft steken op één enkele eigenschap: het is een cirkel. De noodzaak om de leerlingen met een grote serie verschillende 'definities' van grootcirkel te confronteren, zoals bedoeld is met opgave 12, is duidelijk. De leerlingen zijn door zo'n serie verplicht het begrip van 'alle kanten' te bekijken.

Bart weerlegt Betrick's antwoord overigens feilloos met een tegenvoorbeeld: 'Dat is fout, want de evenaar is ook een grootcirkel en die gaat niet door de noord- en zuidpool'.

Opgave 12h: Een grootcirkel is een cirkel op aarde die niet evenwijdig aan de evenaar loopt. Goed of fout?

Peter vindt dat fout. Maar Betrick zegt: 'Dat is goed, want als je hem evenwijdig doet, krijg je een parallelcirkel'. Peter is overtuigd met dit tegenvoorbeeld.

Tegenvoorbeelden roepen bij leerlingen relaties op, zoals hier tussen grootcirkels en parallelcirkels.

Uitputtend zoeken

De vierde les begint met een herhaling: 'Noem zoveel mogelijk eigenschappen van grootcirkels'. Alweer grootcirkels? Het is echter niet overbodig: de leerlingen noemen, naast allerlei bekende eigenschappen, toch weer nieuwe en leggen bovendien steeds meer relaties tussen de eigenschappen onderling en tussen verschillende begrippen.

'De grootcirkels zijn allemaal even lang', redeneert een leerling, 'want ze zijn net zo groot als de evenaar'.

'Elke grootcirkel gaat door het middelpunt van de aarde, omdat hij de aarde in gelijke helften verdeelt. Met parallelcirkels is dat anders', weet Anette en ze redeneert: 'ze verdelen de aarde niet in twee gelijke stukken, dus de middelpunten liggen nooit in het middelpunt van de aarde'.

'Elke grootcirkel gaat door de evenaar', verklaart een leerling. Dat wil zeggen dat twee willekeurige grootcirkels elkaar altijd snijden; de evenaar staat immers model voor grootcirkel. Er bestaan dus geen evenwijdige grootcirkels op de bol. Hier stoten we op het feit dat de bolmeetkunde een model is voor een niet-euclidische meetkunde, namelijk voor de elliptische meetkunde.

Met de klas op onderzoek uit

Wim heeft het gevoel met het nieuwe onderwerp vaak op onderzoek uit te moeten. 'Je voelt je onzeker. Je weet niet waaraan je begint. Je doorziet het onderwerp nog niet goed', vertelt hij. 'Het zijn dus allemaal échte vraagstukken, ook voor mij'.

Rechte lijnen

Hij is bijvoorbeeld gefascineerd door de ontdekking dat rechte lijnen over het aardoppervlak geen echte rechte

(kijk-)lijnen zijn. 'Het zou mooi zijn, als ze die verschillen ontdekken tussen vlakke en bolmeetkunde', zegt hij me. In de klas vraagt hij tussen neus en lippen door: 'zijn er eigenlijk wel rechte lijnen op aarde?' Hij hoopt op een ontkennend antwoord. Maar de leerlingen noemen voorbeelden: 'zonnestrallen', 'de deurpost'. Ze zoeken blijkbaar eerst naar een bevestigend antwoord. Verticale lijnen (als deurposten) gaan inderdaad niet mee met de ronding van de aarde. Het is overigens de vraag of twee verticale deurposten wel evenwijdig zijn. Ze zijn immers mondiaal gezien op het middelpunt van de aarde gericht. 'Maar deze lijn over de vloer dan?', houdt Wim stug vol. 'Is dat tegelpad buiten recht?' 'De autoweg Zwolle – Amersfoort?', dringt hij aan. 'Als je echt recht door gaat over die weg, dan ga je de lucht in', zegt een leerling. Een ander: 'Of je moet door de aarde heen. Dan is de weg recht.' Maar dat laatste vindt niemand reëel. Dan spreekt Henk het verlossende woord: 'als je die lijn over de vloer recht doortrekt, gaat hij van de wereld af'. Hij bedenkt een raaklijn aan de aardbol. 'En als hij er niet vanaf gaat, dan is het geen rechte lijn,' vervolgt hij.

De ballon boven Mekka – de grootcirkel als richtingdrager

'Stel je voor dat ze een hele grote luchtballon in Mekka oplaten aan een touwtje. Gaat die dan zo omhoog?' Wim tekent op het bord:

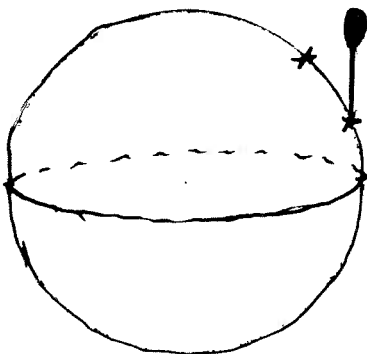


fig. 7: Ballon noord

Een leerling: 'Nee, zo gaat hij naar het noorden. De ballon moet naar rechts'.

'Naar rechts?' De leerlingen zoeken naar een betere formulering van wat in de mondiale kijk op de wereld 'omhoog' of 'verticaal' betekent.

En ze komen: 'precies van de aarde af' en 'vanaf het middelpunt van de aarde'.

'Eigenlijk zijn wij mensen allemaal ballonnetjes, allemaal vast aan de aarde', zegt Wim, 'met onze voeten naar het middelpunt'.

Dan laten ze de ballon in Mekka zakken, zodat de kijklijn vanuit Amsterdam een kijkvlak doorloopt die de aarde snijdt volgens een 'Grootcirkel', gokt een leerling. 'Dus de grootcirkel is niet alleen de kortste afstand,

maar geeft ook de richting aan van Amsterdam naar Mekka', stelt Wim kort vast.

Koersveranderingen langs een rechte lijn?

'Nu het moeilijkste. Je kijkt boven op de noordpool. Dan zie je dit.' Wim toont de globe van bovenaf.

De poolkaart in het boek is een centrale projectie vanuit het middelpunt van de aarde. Er staat beschreven hoe een grootcirkel overgaat in een rechte lijn.

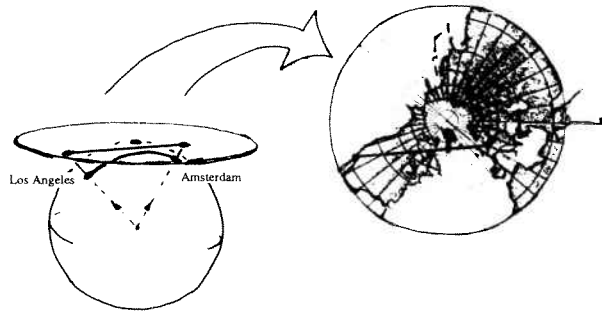


fig. 8: Centrale projectie

Wim: 'Een vliegtuig vertrekt van A naar B. Welke kant gaat het op als het vertrekt? En als het onderweg is en aan het eind van de vlucht?'

De klas is doodstil. 'Hoe kan dat nou? Ik snap het niet'. Ze kunnen inderdaad hun ogen niet geloven: je vliegt in een rechte lijn en toch steeds in een andere richting. Het verschijnsel zou gemakkelijk zijn te verklaren met een lantaarnpaal waar men langs loopt en die steeds onder een andere hoek wordt gezien. Het is in feite hetzelfde probleem als dat van Bart: richting Mekka ten opzichte van de noordpool.

De kortste afstand én zonder koers te veranderen

Aan het einde van de les gaat de klas nog eens op onderzoek uit: 'Zijn er twee plekken op aarde waartussen je de kortste afstand kan varen zonder van koers te veranderen?'

'Op een meridiaan', antwoordt een meisje. 'Op de evenaar', zegt een ander. Wim beoordeelt de antwoorden: 'Ja, dan vaar je steeds naar het noorden (langs de meridiaan), naar het oosten (langs de evenaar).' 'Als je op een parallelcirkel vaart', meent een derde leerling. 'Ook naar het oosten'. Wim: 'Nee dat is niet goed, want dat is niet de kortste afstand tussen twee punten.'

Het gaat dus niet om een lijn waarbij de koers vast staat (een zogenoemde 'loxodroom'), maar om lijnen die én loxodroom én grootcirkel (kortste afstand) zijn. Een parallelcirkel is wel een loxodroom, maar geen grootcirkel. Meer van dergelijke lijnen vinden ze niet.

Ik overweeg het zinvol gebruik van twee kaartprojecties in het boekje op te nemen: de mercatorprojectie (een rechte lijn is een loxodroom op zo'n kaart) en de centrale projectie (een rechte lijn is een grootcirkel)'.¹

Toets

In de toets komen een aantal onderwerpen voor:

- werken met grootcirkels, tegenpolen en tegenvlakken
- werken met kaartprojecties
- discussies op grond van vlakke meetkunde, bolmeetkunde en ruimtelijke meetkunde.

We gaven bijvoorbeeld bekende en nieuwe grootcirkel-'definities' ter beoordeling.

De bekende waren inderdaad bekend: 70 van de 75 leerlingen scoorden goed.

Een nieuw karakteristiek was:

Van elk punt op een grootcirkel ligt ook zijn tegenpool op diezelfde grootcirkel. Goed of fout?

73 van de 75 leerlingen beantwoordden deze vraag goed.

Hoe zat het met het gebruik van grootcirkels bij het 'construeren' van tegenpolen of het middelpunt van de bol? In de klas was dat slechts impliciet aan de orde geweest: Wim had af en toe in een tekening op bord ervan gebruik gemaakt, maar het verband tussen pool, tegenpool en grootcirkel niet onderwezen.

We gaven bijvoorbeeld deze opgave.

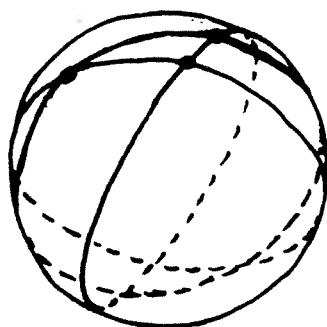


fig. 9: Middelpunt

In de figuur moest vanuit de gegeven tegenpolen het middelpunt van de bol geconstrueerd worden door twee middellijnen te trekken.

46 leerlingen vonden het middelpunt op deze wijze, terwijl 17 eerst een middellijn trokken en daarvan het midden namen (een wat minder goede oplossing, dus).

Eén leerling, Erik, gebruikte nep-snijpunten en hun tegenpolen om het middelpunt te vinden – een originele methode.

Algemene conclusies

Mekka werd als een motiverende introductie ervaren. De leerlingen scoorden laag op onderwerpen die strikt technisch en algoritmisch waren, zoals het werken met

coördinaten-stelsels. Dit gold ook voor onderwerpen die op het draaideur-idee beruisten en nog weinig aan bod waren gekomen in het onderwijs, zoals de kortste afstand en de noordelijke koers van een vluchlijn.

De leerlingen kunnen echter gemakkelijk met grootcirkels, polen en tegenpolen werken in allerlei nieuwe situaties. Ze leggen snel relaties tussen deze begrippen. Sommige leerlingen bedenken nieuwe verbanden.

De verschillende soorten meetkunde die dit pakket oproept, stimuleren het redeneren. In discussies over contrasterende onderwerpen nemen de leerlingen verschillende meetkundige standpunten in.

Het ontwerpen en beoordelen van 'eigen produkties' en het kiezen uit een aantal definities van andere leerlingen blijkt in het meetkunde-onderwijs een uitstekend middel te zijn om het formaliseren te bevorderen. Deze 'intuïtieve' meetkunde speelt een essentiële rol op de weg naar de meer formele meetkunde: zonder intuïtieve meetkunde geen formalisering.

Noot

- [1] In de zeevaart wordt het liefst via een loxodroom (bijvoorbeeld een parallelcirkel) gevaren. Er zijn dan geen koersveranderingen nodig. In het algemeen is een loxodroom echter geen grootcirkel, dus niet de kortste afstand. Om aan beide eisen (een vaste koers en de kortste afstand) tegemoet te komen, wordt een samengestelde koers ('composed track') uitgezet door afwisselend gebruik van de centrale projectie en de mercator projectie. Deze methode uit de berekeningswiskunde is in het pakket opgenomen.

Literatuur

- Brink, F.J. van den (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen*. Utrecht, OW&OC.
- Brink, F.J. van den en M. Meeder (1991). Mekka. *Nieuwe Wiskrant*, 11 (1), 80-84.
- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics* 3, 413-435.
- Hiele, P.M. van (1957). *De problematiek van het inzicht, gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof*. Amsterdam, Meulenhoff.
- Hoorn, M. van (1993). Een wiskundelerares in het middelbaar zeevaarthonderwijs. *Euclides* 68, (juni), 267-269.
- Rheenen, G. van (1986). *Navigatie*. Urk.
- Team W12-16 (1992). *Achtergronden van het nieuwe leerplan wiskunde 12-16, deel 2*. Utrecht/Enschede, Fi/SLO.