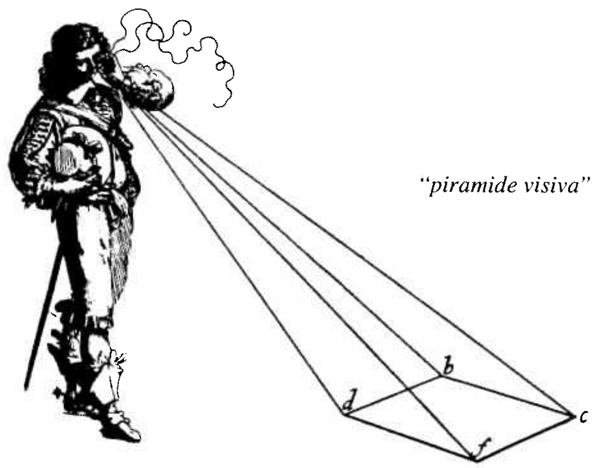
Een logisch vervolg op kijkmeetkunde

M. Kindt
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

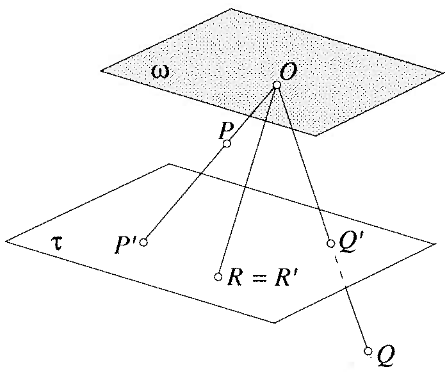


In de zogenaamde kijkmeetkunde, die in het nieuwe wiskunde programma 12-16 sterk naar voren is geschoven, spreekt men van *kijklijnen*. In meer algemene termen betekent kijken eigenlijk *centrale projectie* en worden kijklijnen tot *projecterende stralen*. Kijkmeetkunde en de leer van centrale projectie zijn de voorbodes van wat sinds jaar en dag de *projectieve meetkunde* wordt genoemd. Is het gewaagd te denken aan een stukje projectieve meetkunde als onderdeel van een toekomstig B-programma? Misschien. Ooit was het vak een van de keuze-onderwerpen bij wiskunde II [1], maar werd het volledig voorbijgestreefd door het onderwerp 'complexe getallen'. Op de vrije school wordt het vak uit volle overtuiging onderwezen, met grote nadruk op de esthetische aspecten. Zie bijvoorbeeld [2]. Kortom, het is geen totaal vreemde in de wereld van het voortgezet onderwijs, wel een buitenbeentje. In dit artikel wil ik bij de lezer wat oude kennis opfrissen en vervolgens wat filosoferen over een eventuele herziening van het meetkundeprogramma bij wiskunde B.

Het projectieve vlak

Bij centrale projectie worden punten en lijnen in de ruimte vanuit een *centrum* O (oog) via projecterende stralen (kijklijnen) en projecterende vlakken (kijkvlakken) geprojecteerd op een *tafereel* τ.

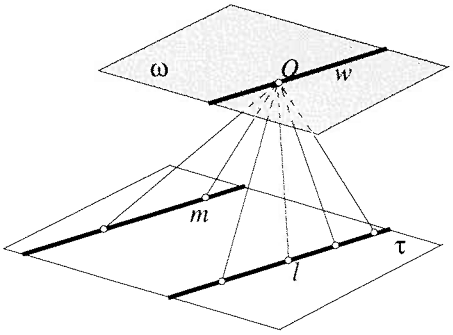
Alle punten en alle lijnen?
Een straal door O die parallel is met τ treft het tafereel niet, als we de euclidische ruimte als uitgangspunt nemen. Alle stralen met deze eigenschap vormen een vlak, zeg ω. De punten van dit (kijk)vlak verdwijnen als het ware bij de centrale projectie en daarom wordt dit vlak wel het *verdwijnvlak* genoemd.



Kijklijnen worden in τ vertegenwoordigd door punten, met uitzondering van de kijklijnen in het verdwijnvlak; kijkvlakken worden in τ vertegenwoordigd door lijnen, met uitzondering van ω.
Het wereldje van kijklijnen en kijkvlakken is blijkbaar wat groter dan τ. In dat wereldje gelden de volgende regels:

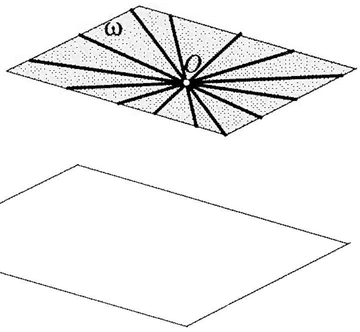
1. Door elk tweetal kijklijnen is precies één kijkvlak (het 'verbindingsvlak' van die lijnen) bepaald.
2. Door elk tweetal kijkvlakken is precies één kijklijn (de 'snijlijn' van die vlakken) bepaald.

De vertaling van deze regels in de wereld van τ loopt mis, tenzij we τ wat groter maken. Dit wordt gedaan door aan elke lijn l in τ één zogenaamd *oneigenlijk punt* (L_∞) toe te voegen. Dat punt correspondeert dan met de kijklijn (in ω) die evenwijdig is aan l. Twee evenwijdige lijnen van τ snijden elkaar nu in hun oneigenlijke punt, omdat de corresponderende kijkvlakken elkaar in een lijn van ω snijden.



w is 'kijklijn' naar het oneigenlijke punt van *l* en *m*

In de figuur is het projecterend vlak van *l* voorgesteld door een (deel van) een *waaier* met top *O*. De opvatting van een rechte lijn in τ als verzameling (*reeks*) van punten komt overeen met de opvatting van een kijkvlak als waaier van kijklijnen.
Er is één bijzondere waaier van kijklijnen, namelijk de waaier in het vlak ω. Dit is de waaier die correspondeert met de reeks van oneigenlijke punten van τ en het is daarom dat we de verzameling van oneigenlijke punten van τ tot rechte lijn verklaren: de *oneigenlijke rechte* van τ, die ik wel zal aanduiden met t_∞.



ω is 'kijkvlak' naar de oneigenlijke rechte van τ

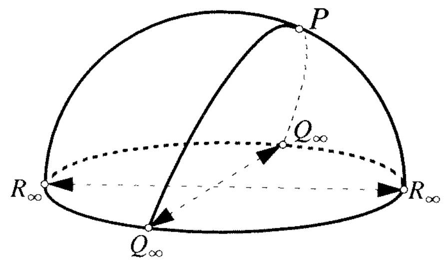
Het tafereel τ, uitgebreid met oneigenlijke punten (ook wel richtingen genoemd) en de oneigenlijke rechte (verzameling van alle richtingen) is een model (zeg τ^+) van het *projectieve vlak.* Punten en lijnen, eigenlijke zowel als oneigenlijke, worden wel *projectieve punten* en *projectieve rechten* genoemd.
De hiervoor genoemde regels over kijklijnen en kijkvlakken hebben nu hun vertaling in τ.

1. Elke twee projectieve punten bepalen precies één projectieve rechte (de verbindingslijn).
2. Elke twee projectieve rechten bepalen precies één projectief punt (het snijpunt).

Ziezo, dat is mooi, om niet te zeggen volmaakt. Vervang in de eerste regel *punt* door *rechte* en *rechte* door *punt* en je krijgt de tweede. Dit is een voorbeeld van het *dualiteitsprincipe* dat zo dominant aanwezig is in de projectieve meetkunde.

Het werken met oneigenlijke punten bij constructies en redeneringen in τ^+ is even wennen. Als eerste oefening kunnen de beide voornoemde regels worden nagegaan. Bekijk regel 1. Voor twee eigenlijke punten is de regel overbekend. Is er sprake van één eigenlijk en één oneigenlijk punt, dan vertolkt deze regel het befaamde parallellenpostulaat: door een gegeven punt gaat precies één lijn die evenwijdig is aan een gegeven lijn. Zijn beide punten oneigenlijk, dan is hun verbindingslijn de oneigenlijke rechte.
De controle van regel 2 laat ik aan de lezer over.

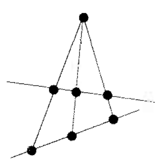
De verzameling κ bestaande uit alle kijklijnen en alle kijkvlakken en het uitgebreide tafereel τ^+ zijn twee modellen van het projectieve vlak. Buiten die twee zijn er nog verscheidene andere aardige modellen. Bijvoorbeeld het *sferisch model.* Beschouw een bolvormig tafereel met *O* als middelpunt.
Elke kijklijn treft die bol in twee *antipoden* en elk kijkvlak snijdt de bol volgens een zogenaamde *grootcirkel.* Projectieve punten en rechten worden op de bol vertegenwoordigd door 'antipodenparen' en 'grootcirkels'. Inderdaad: twee antipodenparen bepalen precies één grootcirkel en twee grootcirkels bepalen precies één antipodenpaar. Dit model is (net als κ) homogeen, dat wil zeggen alle punten zijn 'gelijkwaardig', evenals alle rechten. Verwijdert men nu een halfrond, dan ontstaat het zogenaamde *kruismutsmodel.*



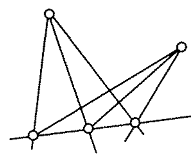
Dit model is (net als τ^+) inhomogeen, dat wil zeggen er zijn twee soorten projectieve punten: 'eigenlijke' (boven de evenaar) en 'oneigenlijke' (puntenparen op de evenaar). Een 'eigenlijke' projectieve rechte is een halve grootcirkel die één oneigenlijk punt bevat. De evenaar speelt de rol van oneigenlijke rechte.

Dualiteit

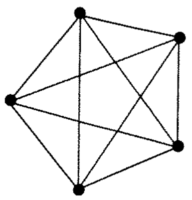
Als werkmodel van het projectieve vlak kies ik verder τ^+. Een aardige oefening voor beginners in de projectieve meetkunde is het tekenen van duale figuren.
Bijvoorbeeld:



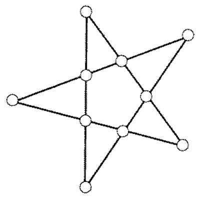
is duaal met



Of een beetje ingewikkelder:
een volledige n-hoek is de figuur bestaande uit n punten (waarvan geen drie op dezelfde rechte) en al hun mogelijke verbindingslijnen ($\binom{n}{2}$ stuks); de duale figuur bestaat uit n rechten (waarvan er geen drie door hetzelfde punt) en al hun mogelijke snijpunten ($\binom{n}{2}$ stuks).
Die laatste figuur heet dan: volledige n-zijde.
Voor $n = 5$ geeft dat:



en

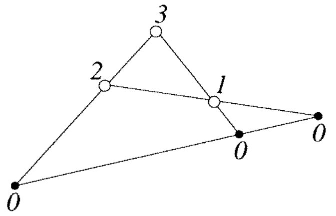


volledige 5-hoek volledige 5-zijde

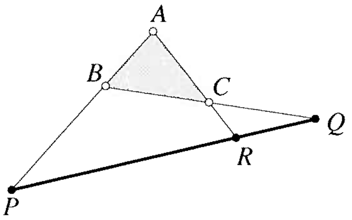
Dergelijke figuren, bestaande uit punten en rechten waartussen incidentierelaties bestaan, kunnen goed worden beschreven met een incidentie-matrix. Duale figuren hebben, bij geschikte ordening van punten en rechten, getransponeerde matrices.
Verder is het nuttig om bij een aantal begrippen de duale te kennen, zoals: snijpunt-verbindingslijn, waaier-reeks, collineair-concurrent.

De stelling van Menelaos

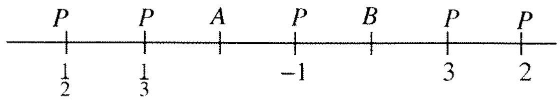
Ik keer weer even terug naar de gewone meetkunde van vlak en ruimte. Het hoogtekaartje van drie verticale paaltjes met hoogten respectievelijk 3, 2 en 1:



leidt via evenredigheden van lijnstukken tot de klassieke stelling van Menelaos, zoals ik in een vorige artikel [3] heb laten zien. Die stelling luidt:
Als P, Q en R achtereenvolgens op de zijden AB, BC en CA van driehoek ABC liggen, zo dat P, Q en R collineair zijn, dan is het produkt van de verhoudingen PA : PB, QB : QC en RC : RA gelijk aan 1.



In [3] schreef ik: 'Bij het onderzoek of het omgekeerde van de stelling ook waar is, stuit je op de moeilijkheid dat de verhouding van de afstanden tot twee punten de plaats niet vastlegt. Zo zijn er bijvoorbeeld twee punten P op de lijn AB met $AP : BP = 3 : 2$. De wiskundige weet daar wel raad mee en lost dit op door te werken met *gerichte verhoudingen*. Dat betekent dat hij AP: BP positief rekent als de vectoren $\overrightarrow{AP}$ en $\overrightarrow{BP}$ gelijkgericht zijn en negatief als $\overrightarrow{AP}$ en $\overrightarrow{BP}$ tegengesteld gericht zijn. Daarmee is de omkeerstelling ook geldig.'
Ik ga hier nu wat verder op door. De gerichte verhouding $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{BP}$ noteer ik verder als (ABP).
Onderstaande figuur toont bij verschillende punten P van de verbindingslijn AB de waarde van (ABP).

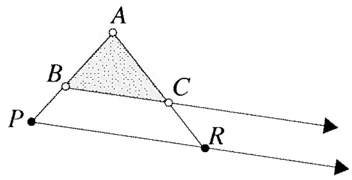


Een paar bijzondere gevallen:
als $P = A$, dan $(ABP) = 0$;
als $P = B$, dan $(ABP) = \infty$ (volgens afspraak);
als P het oneigenlijke punt is van de verbindingslijn AB, dan $(ABP) = 1$
Permutatie van de drie punten geeft een andere waarde voor de gerichte verhouding, in het bijzonder:

$$(BAP) = \frac{1}{ABP}$$

De stelling van Menelaos met zijn omgekeerde wordt nu kort als volgt genoteerd (let op de cyclische ordening!):
Als P, Q en R achtereenvolgens op de zijden AB, BC en CA van driehoek ABC liggen, dan:
P, Q en R collineair $\Leftrightarrow (ABP)\cdot(BCQ)\cdot(CAR) = 1$

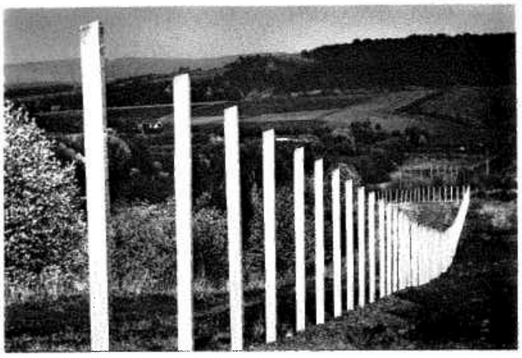
Zij kan eenvoudig planimetrisch worden bewezen door bijvoorbeeld loodlijnen uit A, B en C neer te laten op de drager van P, Q en R en naar evenredigheden van geschikte lijnstukken te kijken.
Merk op dat in het geval de drager van P, Q en R evenwijdig is met een van de zijden (bijvoorbeeld BC), de stelling een oude bekende is:



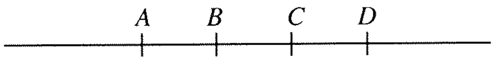
Het punt Q is nu het oneigenlijke punt van BC, dus $(BCQ) = 1$, met als gevolg: $(ABP)\cdot(CAR) = 1$ ofwel $(ABP) = (ACR)$. Dit is de stelling over evenredige lijnstukken die je gebruikt bij het bewijs van Menelaos' stelling; met andere woorden uit een bijzonder geval van de stelling bewijst men de algemene versie, iets waarover je je kunt verwonderen. Dit is overigens een verschijnsel dat in de wiskunde vaker voorkomt. Nog één voorbeeld: de stelling van Pythagoras is te beschouwen als een bijzonder geval van de cosinusregel, maar die laatste wordt uit de eerste bewezen!
Bekijk ik de figuur bij de stelling van Menelaos nu even door een projectieve bril, dan zie ik een volledige vierzijde. Daarin opgesloten zitten vier driehoeken (namelijk

ABC, *APR*, *BPQ* en *CQR*) en een nuttige oefening is het om voor elk het 'Menelaos-produkt' op te schrijven.

Dubbelverhouding

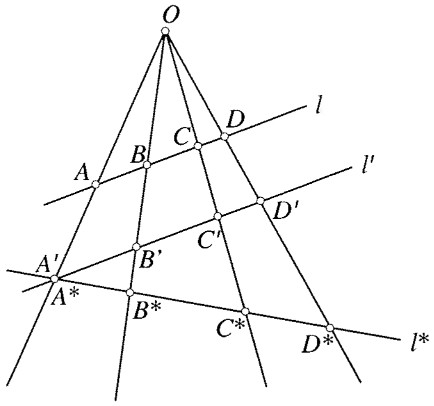


Een foto als hierboven (de laatste resten van het 'ijzeren gordijn') leert dat centrale projectie heel wat meetkundige eigenschappen aantast: gelijke afstanden zijn na projectie meestal niet meer gelijk. Begrippen of eigenschappen die bestand zijn tegen centrale projectie worden *projectieve begrippen of eigenschappen* genoemd.
De gerichte verhouding (ABC) van drie collineaire punten A, B, C is duidelijk geen projectief begrip. Lantaarnpalen die in werkelijkheid op onderling gelijke afstanden staan doen dat in het algemeen niet op een foto.
De stelling van Menelaos behoort dus in beginsel niet tot het domein van de projectieve meetkunde omdat daar sprake is van gerichte verhoudingen. Wel projectief invariant is het produkt van de drie verhoudingen, cyclisch geordend, die door een transversaal van de zijden van een driehoek worden afgesneden. Het is dus denkbaar dat een algebraïsche uitdrukking in verhoudingen zelf wel een projectieve grootheid is, hoewel de bestanddelen dat niet zijn. Pappos van Alexandrië (300 na Chr.) vond al uit dat de *dubbelverhouding* van vier collineaire punten zo'n grootheid is. Wat wordt hieronder verstaan?
Misschien een betere, maar minder in het gehoor liggende, term zou zijn: samengestelde verhouding. Een dubbelverhouding is namelijk een verhouding van verhoudingen. Heb ik vier punten A, B, C, D op één rechte, dan blijkt de verhouding $(ABC) : (ABD)$ wèl bestand te zijn tegen centrale projectie. De notatie is: $(ABCD)$.
Bijvoorbeeld:



$$(ABCD) = (ABC) : (ABD) = 2 : \tfrac{3}{2} = \tfrac{4}{3}$$

Nauwkeurig nameten van de onderlinge afstanden van de toppen van vier opvolgende palen op bovenstaande foto en berekening van de dubbelverhouding van die toppen, geeft inderdaad een uitkomst in de buurt van 1,333...
Na het experiment willen we een bewijs. De meest bekende methode is om oppervlakten van driehoeken te gebruiken en te laten zien dat de dubbelverhouding van de punten A, B, C, D uitgedrukt kan worden in uitsluitend de hoeken tussen de stralen vanuit het centrum O naar die punten. Aardig en minder bekend is het bewijs met de stelling van Menelaos:



Ik wil bewijzen: $(ABCD) = (A^*B^*C^*D^*)$
Evenwijdige verplaatsing van de lijn l naar het punt A^* geeft de lijn l' met het puntenviertal A' $(=A^*)$, B', C', D'.
Omdat $l \,//\, l'$ geldt: $(ABC) = (A'B'C')$ en $(ABD) = (A'B'D')$, dus $(ABCD) = (A'B'C'D')$.
Blijft te bewijzen: $(A'B'C'D') = (A^*B^*C^*D^*)$
Pas Menelaos toe op $\Delta\, A^*B^*B'$ met transversaal OC.

$$(A^*B^*C^*)\cdot(B^*B'O)\cdot(B'A'C') = 1$$

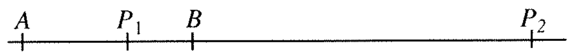
Nog een keer maar nu met transversaal OD:

$$(A^*B^*D^*)\cdot(B^*B'O)\cdot(B'A'D') = 1$$

Deling van de eerste door de tweede en verwisseling van A' en B' geeft:

$$(A^*B^*C^*) : (A^*B^*D^*) = (A'B'C') : (A'B'D')$$

en het is gepiept.
We hebben zo een projectieve grootheid te pakken die als instrument kan dienen bij het ontdekken en bewijzen van projectieve stellingen.
Ik ga nog even in op een zeer bijzondere dubbelverhouding. Bij de stelling van Menelaos merkte ik al op dat er op de lijn AB twee punten P zijn zó dat $AP : BP = 3 : 2$.

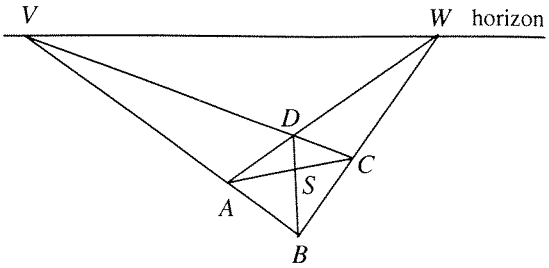


Noem ik die punten P_1 en P_2, dan geldt volgens de voorgaande afspraken:

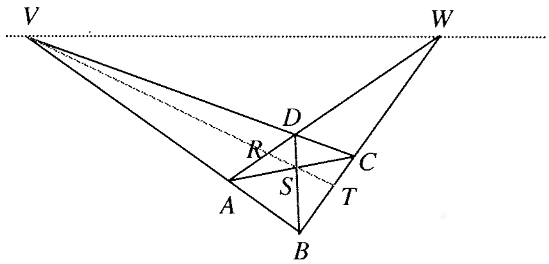
$$(ABP_1P_2) = (ABP_1) : (ABP_2) = -1$$

Een puntenviertal met dubbelverhouding -1, wordt een *harmonisch* viertal genoemd.
Hoe meer P_1 het midden tussen A en B benadert, hoe verder P_2 zich van A en B verwijdert. Ligt P_1 precies in het midden, dan is P_2 het oneigenlijke punt van AB!
Inderdaad geldt in dat geval: $(ABP_1) = -1$ en $(ABP_2) = 1$.
Harmonische puntenviertallen duiken op verrassend veel plaatsen op. Ze spelen bijvoorbeeld een voorname rol in de theorie van pool en poollijn bij een kegelsnede.
Ik zal me hier beperken tot één beroemd voorbeeld.
Een tekening van een parallellogram $ABCD$ met zijn

middelpunt S, kan er in perspectief zo uitzien:



Verbind ik nu het punt S met het vluchtpunt V, dan krijg ik een lijn die in werkelijkheid parallel is met AB en CD en die de zijden BC en AD middendoor deelt.
Zeg dat T het snijpunt is van VS en BC, dan weet ik dat $BCTW$ een harmonisch viertal is. Immers: in werkelijkheid is T het midden van BC en W het oneigenlijke punt van BC en de waarde van de dubbelverhouding verandert niet in perspectief.
In projectief-meetkundige termen:
$ABCD$ is een volledige vierhoek (4 hoekpunten, 6 zijden); V, W en S zijn de *diagonaalpunten* daarvan; de verbindingslijnen van die drie noem ik *diagonaallijnen.*
De stelling die zojuist is ontdekt, luidt nu:
Twee diagonaallijnen en twee zijden van een volledige vierhoek die samenkomen in hetzelfde diagonaalpunt, snijden de andere twee zijden volgens harmonische puntenviertallen.



Ik geef van die stelling nog een tweede bewijs:
centrale projectie uit V geeft: $(ADRW) = (BCTW)$;
centrale projectie uit S geeft: $(ADRW) = (CBTW)$
Conclusie: $(BCTW) = (CBTW)$
Ofwel: $(BCT) : (BCW) = (CBT) : (CBW)$
Die laatste twee verhoudingen zijn juist de omgekeerden van de eerste twee, en die wetenschap leidt tot:

$$(BCT)^2 = (BCW)^2$$

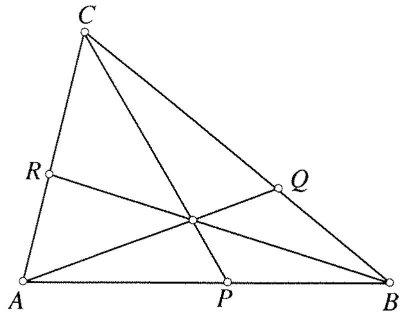
T en W zijn verschillende punten, dus $(BCT) = -(BCW)$ en daaruit volgt tenslotte $(BCTW) = -1$.
De figuur levert mij meteen nog een tweede interessante stelling. Let op driehoek BCV met de transversaal AW.
Volgens Menelaos geldt:

$$(BCW)\cdot(CVD)\cdot(VBA) = 1$$

In verband met $(BCT) = -(BCW)$ geldt dus:

$$(BCT)\cdot(CVD)\cdot(VBA) = -1$$

Daarmee is het broertje van de stelling van Menelaos bewezen, die na herdoping van de punten luidt:
Als P, Q en R achtereenvolgens op de zijden AB, BC en CA van driehoek ABC liggen, dan:
CP, AQ en BR concurrent $\Leftrightarrow$ $(ABP)\cdot(BCQ)\cdot(CAR) = -1$



Deze stelling, genoemd naar zijn ontdekker Giovanni Ceva (1648-1734), is evenals de stelling van Menelaos zeer krachtig. De bekende stellingen over het concurrent zijn van hoogtelijnen, zwaartelijnen en bissectrices in een driehoek zijn hier eenvoudig bijzonder gevallen van!
De stelling, die niet tot het eigenlijke gebied van de projectieve meetkunde behoort, maar als het ware op de rand daarvan ligt, kan plausibel worden gemaakt met een beschouwing over de positie van het zwaartepunt (barycentrum) van drie massa's [4]. Een fraai bewijs kan worden geleverd met behulp van oppervlakten. Zie bijvoorbeeld [5].
Tot zover een verkenning van een stukje projectieve meetkunde. Beroemde stellingen die in dit vak te koop zijn, zoals die van Desargues en Pappos, laat ik maar even voor wat ze zijn, evenals de fraaie theorie van Steiner over projectieve en perspectieve verwantschap van reeksen en waaiers die uiteindelijk tot een verrassende kijk op kegelsneden heeft geleid. Een beknopte beschrijving van de geschiedenis van het vak in het licht van de gehele meetkunde vond ik in [6].

Revisie van ruimtemeetkunde?

Ik keer nu terug naar het uitgangspunt van dit artikel. Bij de leerplanherzieningen in 1968 deed Joop van Dormolen de uitspraak dat examenprogramma's om de tien jaar zouden moeten worden herzien of tenminste geactualiseerd. De toehoorders, waaronder de toenmalige bonzen van het wiskundeonderwijs, waren het roerend met hem eens. Inmiddels weten we wat daarvan terecht is gekomen. Het HAVO-programma heeft zo'n twintig jaar stand gehouden, hoewel vrijwel iedereen dat programma zeer matig vond. Tussen droom en daad staan, zeker ook in onderwijsland, wetten in de weg. De ruimtemeetkunde van wiskunde B heeft er inmiddels al bijna tien jaar opzitten en ik droom van tijd tot tijd van een revisie. Maar ik moet eerlijk bekennen dat er tot nu toe weinig consistentie in die dromen te ontdekken viel en toen de redactie van dit tijdschrift mij om een meetkundige bijdrage voor dit wiskunde B-nummer vroeg, werd ik tamelijk onzeker. Vind ik echt dat er iets moet veranderen?
Destijds schreef de HEWET-werkgroep: *een bezwaar van*

de huidige programma's voor het VWO is dat de meetkundige vorming van de leerlingen te wensen overlaat, met name ten aanzien van wat gewoonlijk ruimtelijk inzicht wordt genoemd. Het is duidelijk dat na de reanimatie van de meetkunde in het leerplan wiskunde voor de basisvorming er een geheel nieuwe beginsituatie ontstaat voor wat de tweede fase van het voortgezet onderwijs gaat heten. Verder is er een actieve wiskunde B commissie die leraren hoort, naar universiteiten luistert, deskundigen interviewt en wat al niet meer. In principe is hierbij vooral het inmiddels wel heel stoffige analyse-programma in het geding, maar bijvoorbeeld de vanuit universitaire hoek doorklinkende onvrede over de wiskundige attitude van binnenkomende studenten (waar leren ze nog redeneren en bewijzen?), maakt dat het programma over de gehele breedte ter discussie staat. En dan is er tenslotte de profielnota, die dermate revolutionair is, dat bij aanstaande herzieningen van examenprogramma's niet volstaan kan worden met het toevoegen van een beetje kruipolie aan de scharnieren.
Kortom, voer voor (leer)plannenmakers .....
Ik kom er niet onderuit en moet schrijven. Over meetkunde. Eerste verleidelijke gedachte: verschuif het accent van de ruimtemeetkunde naar een meer deductie-gerichte benadering, dan sla je twee vliegen in één klap: je bouwt voort op de ruimte-oriëntatie in de basisvorming en je doet weer aan redeneren en bewijzen.
De lezer die nog ervaring heeft met het oude stereometrie-programma, hetzij als leerling of als leraar, zal echter moeten beamen dat de deductie daarbij niet het sterkste element was. In de sommen op examenniveau ging het toch vooral om het berekenen van hoeken en afstanden, al moest wel van elke stap rekenschap worden afgelegd. Voor veel leerlingen was dat als een keurslijf dat slecht paste. De mooie logische bewijzen zaten vooral aan de basis, bij de incidentie-stellingen en abstracte constructies. En al begint mijn wiskundige hart wat sneller te kloppen als ik eraan terug denk, voor de meeste leerlingen was dit op zijn zachtst gezegd nogal lastig, en wat erger is, de moeite werd niet beloond met spectaculaire resultaten. Het bewijzen van iets dat intuïtief al bij voorbaat duidelijk is, werkt averechts. Nee, het idee van een meer rigide ruimtemeetkunde lijkt me niet goed.

Dromen van projectieve meetkunde

Aan de andere kant blijf ik een fervent voorstander van een stukje synthetische meetkunde in wiskunde B. Ik begrijp dat daar moeilijk praktische argumenten voor te vinden zijn en dat technische universiteiten hier nauwelijks nog waardering voor op kunnen brengen. Het zal wel ouderwets zijn, maar ik meen dat de wiskunde op het VWO ook een vormende component dient te hebben en dat een eenzijdig analytische benadering te weinig recht doet aan het vak. Bovendien, als we werkelijk iets met redeneren en bewijzen op school willen, dan zal dat buiten de analyse-sfeer moeten zijn. Rekenbewijzen worden door leerlingen nauwelijks als redeneringen herkend en zij verkeren in goed gezelschap. Newton, toch geen vijand van analyse, kwalificeerde de oplossing van een meetkundig probleem verkregen door analytische middelen als 'not a solution, but a mere computation'. Het redeneren aan figuren, zonder een directe vertaling in algebra, heeft een grote bekoring en verrijkt het wiskundig denken. Vlakke meetkunde lijkt daartoe meer geschikt dan ruimtemeetkunde en zo kwam het dat ik af en toe droomde van stukjes klassieke meetkunde, zoals de theorie van cirkels en bogen, of macht en machtlijn. Soms ging ik wat verder en dacht aan een spectaculair onderwerp als inversie (wat een mooie plaatjes zou je daar met een computer niet bij kunnen maken) of zelfs aan hyperbolische meetkunde. Stuk voor stuk verwierp ik deze visioenen en ik stond op het punt mijn opdracht voor dit artikel weer terug te geven, toen ik onlangs werd aangesproken door een student van de eerstegraadslerarenopleiding aan de Hogeschool Midden Nederland. Hij wilde een half uurtje praten over de nieuwe ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. Tot mijn verbazing hield hij een pleidooi voor de invoering van een stukje projectieve meetkunde: 'omdat dit vak het denken zo stimuleert'. Hij roemde met name het werken met onzichtbare punten en het dualiteitsbeginsel. Gek, projectieve meetkunde is al jaren een van mijn lievelingsvakken, en toch had ik hier zelf nog niet over gedroomd.
Misschien ben ik steeds te beducht geweest voor de graad van abstractie van het vak. Of ik had gewoon een klein zetje nodig. In ieder geval kreeg ik ineens weer zin om toch dit artikel te schrijven. Niet als direct pleidooi, maar meer als middel om de projectieve meetkunde onder de aandacht te brengen van allen die nadenken over wiskunde B. In tegenstelling tot onderwerpen uit de euclidische meetkunde kan projectieve meetkunde niet zo gemakkelijk worden afgedaan als vergeeld of hopeloos ouderwets. Eindige projectieve vlakken zijn ook vandaag de dag nog onderwerp van wiskundige onderzoek en hebben toepassingen in de combinatoriek (theorie van block-designs, zie bijvoorbeeld [7]). Abstractie in combinatie met de mogelijkheid tot het maken van constructies, kunnen het vak absoluut boeiend voor de 'echte' B-leerling maken.
Dus droom ik nu van een stukje projectieve meetkunde op school. Niet van een min of meer volledige cursus, o nee. Mijn idee gaat uit naar enige capita selecta (voor zo'n 20 tot 25 lesuren) die voldoende zinvol zijn om enerzijds een beeld te geven van de typische projectieve kijk op meetkunde en anderzijds het logisch redeneren c.q. bewijzen te stimuleren. Bovendien zou ik de afperking niet te principieel maken, ik zou zelfs de naam projectieve meetkunde niet willen gebruiken. Gewoon wat werken met incidentie-stellingen in het met oneigenlijke punten uitgebreide vlak. De stellingen van Menelaos en Ceva hoeven dan zeker niet te worden buitengesloten. De band met een stukje ruimtemeetkunde kan gelegd wor-

den via het tekenen in perspectief (zoals bijvoorbeeld in [8]). Want begrijp me goed, die ruimtemeetkunde moet niet overboord worden gezet. Er kan wat op worden bezuinigd, dat wel. En dwarsverbanden tussen ruimtemeetkunde en analyse kunnen zeker gehandhaafd blijven of zelfs worden versterkt.

Vraag me nu niet hoe dat zou kunnen passen in het profieldenken, of dit dan in een 'profielverplicht' of 'vrij' deel zou passen. In de huidige situatie zou ik zeggen: verplicht, maar te examineren in een schoolonderzoek, liefst mondeling. Je bent een dromer of je bent het niet.

Literatuur

[1] Freudenthal, H. en G.A.Vonk (1972). *Projectieve Meetkunde*, IOWO, Utrecht (niet meer verkrijgbaar).

[2] Bernhard, A. (1984). *Projektive Geometrie aus der Raumanschauung entwickelt.* Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart.

[3] Kindt, M. (1993). Ruimtevisioenen in Platland, *Nieuwe Wiskrant, 12*(4), 28-32.

[4] Kindt, M.(1989). Een, twee, vier, ... *Nieuwe Wiskrant, 8* (2), 9-12.

[5] Coxeter, H.S.M., en S.L.Greitzer (1967). *Geometry Revisited.* Random House, New York/Toronto.

[6] Shenitzer, A. (1991). The Cinderella Career of Projective Geometry. *The Mathematical Intelligencer, 13*(2), 50-55.

[7] Hall jr., M. (1967). *Combinatorial Theory.* Wiley, New York.

[8] Kindt, M. (1993). *Lessen in Projectieve Meetkunde.* Epsilon, Utrecht.

(Advertentie)

HMN

Wiskundeleraar: een grensverleggend beroep? De Hogeschool Midden Nederland start dit jaar opnieuw een opleiding tot de internationaal erkende graad

master of arts (open)
in mathematics education

in samenwerking met de University of Greenwich.

Het betreft een part-time studie met een totale netto studietijd van twaalf tot achttien weken. U kunt de studie binnen twee jaar afronden.
Deze opleiding biedt een internationale oriëntatie op het wiskunde-onderwijs en opent mogelijkheden voor een internationale carrière. Het grootste deel van de opleiding bestaat uit een research-project dat in uw eigen school moet worden uitgevoerd en dat de school ten goede kan komen.

Twee studieperiodes van één en twee weken in Engeland maken deel uit van de opleiding. U kunt daarbij rekenen op PLATO-subsidie voor reis- en verblijfkosten en indien nodig ook voor vervangingskosten.

U kunt deelnemen aan de opleiding als u in het bezit bent van een eerstegraads wiskundebevoegdheid of als u daarvoor aan de HMN studeert.

Voor meer informatie over deze studie kunt u terecht bij:
HMN Faculteit Educatieve Opleidingen, Vakgroep Wiskunde, dr. M. Riemersma
Postbus 14007, 3508 SB Utrecht (030) 547232