Vwo B: de analyse getoetst

H. van der Kooij
Hogeschool Midden Nederland / Freudenthal instituut

Inleiding

"En, wat vind je van wiskunde B op het VWO?", vroeg ik. "Saai, verschrikkelijk saai", reageerde hij. "Op de HAVO losten we vraagstukken op, maar hier doen we alleen maar sommetjes". Dit was vermoedelijk het eerste commentaar van een echte kenner (namelijk een leerling die de overstap van HAVO B naar VWO B zelf had gemaakt) op de vakken die wel dezelfde naam dragen, maar qua karakter heel verschillend zijn. Dat was in 1989 op het Strabrechtcollege, één van de drie scholen die vóór de landelijke invoering experimenteerden met de nieuwe programma's voor HAVO.

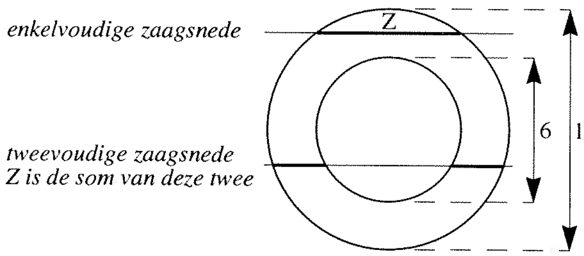
Ik constateer nu (in 1994) nog eenzelfde beeld als ik kijk naar
- de examens HAVO B en VWO B (elk jaar vergelijk ik ze)
- de reacties van docenten VWO B (uit de enquête van de studiecommissie blijkt dat velen van hen vinden dat de Analyse van VWO B (te) veel routinewerk bevat en (te) weinig is gericht op inzicht en begrip)
- de manier waarop eerstejaars studenten aan de lerarenopleiding in Utrecht (meestal vers van HAVO of VWO komend) tegen de Analyse aankijken.

In dit artikel ga ik in op de manier waarop het onderdeel Analyse nu is ingevuld en geef ik aan hoe een andere invulling (gekoppeld aan andersoortige examenopgaven!) er toe zou kunnen bijdragen dat de saaiheid en gedeeltelijk zinledige inhoud van het huidige programma kan worden omgebogen tot een zinvol en zelfs boeiend stuk onderwijs.

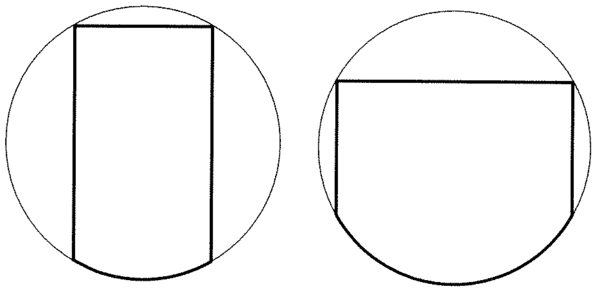
Twee problemen

Thijs Notenboom, een gedreven collega op de HMN, schotelde mij tijdens een onderonsje over het vak Analyse twee problemen voor[1].

Probleem 1
Een isolatiepijp, met buitendiameter 10 cm en binnendiameter 6 cm, wordt doorgezaagd. De lengte van de horizontale zaagsnede Z is een functie van de hoogte h. Bepaal Z als functie van h. Onderzoek bijzonderheden van deze functie.



Probleem 2
In een cilindervormig bureaukastje moeten laden worden aangebracht. In onderstaande figuur zijn twee bovenaanzichten van een bureaukastje getekend, met twee mogelijke vormen van een lade, zoals die zijn bedoeld: drie rechte zijden en een cirkelboog. De diameter van het kastje is 50 cm.
Wat is de maximale oppervlakte die een dergelijk laatje kan hebben?



Beide vraagstukken leken mij mooie tentamenopgaven voor het (eerstejaars)vak Analyse op de lerarenopleiding. Daar worden immers functies van één variabele uitgebreid bestudeerd. Twee doelen probeer ik met die cursus te bereiken: enerzijds het opkrikken van de wiskundekennis van de HAVO B-leerlingen en VWO A-leerlingen tot het niveau van VWO-B (limieten, differentieerbaarheid en dergelijke); anderzijds het vertrouwd maken van met name VWO-B leerlingen met de toepassingsgerichtheid van de HAVO-B wiskunde. Bij dat laatste hoort zeker ook het opstellen van een geschikt wiskundig model bij een tamelijk open probleemstelling.

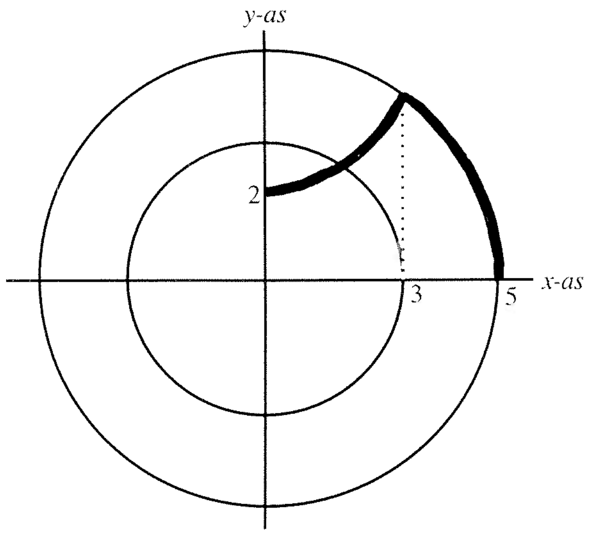
De isolatiepijp

Probleem 1 zou je zo kunnen aanpakken:

Eerste fase
Er kan op een slimme manier gesleuteld worden aan de probleemstelling. Vanwege de symmetrieën

- maakt het niet uit of de zaagsnede horizontaal dan wel verticaal wordt aangezet
- kun je in plaats van de hele ook de halve zaagsnede onderzoeken
- is er een slimme keuze voor het assenstelsel: de oorsprong in het midden van de pijp.

De zaagsnede zet ik dan aan bij $x = 5$. De grafiek van Z (eigenlijk $\frac{1}{2}Z$) is na mijn bespiegelingen een fluitje van een cent:
van $x = 5$ tot aan $x = 3$ volgt de grafiek de boog van de buitenring,
van $x = 3$ tot $x = 0$ wordt de verticale afstand van buitenring tot binnenring 'afgeschoven' naar de x-as.
Het resultaat is:



Eigenlijk moet deze grafiek nog met een factor 2 worden uitgerekt ten opzichte van de x-as, maar dat levert geen nieuwe informatie op. Hetzelfde geldt voor het stuk van $x = 0$ tot $x = -5$: dat is het spiegelbeeld ten opzichte van de y-as van het al getekende stuk.
Het behaalde resultaat stemt tevreden, op één detail na:
wat gebeurt er precies met mijn functie bij $x = 3$?
Wat zou ik te zien krijgen als ik op het punt (3,4) ga INZOOMEN?
Dat kan snel uitgewerkt worden met bijvoorbeeld het computerprogramma VU-grafiek of op de graphics calculator. Maar dan moet ik wel het functievoorschrift weten!

Wordt het:

of toch:

Je kunt er niet omheen: ook al beschik je over geavanceerde computerprogrammatuur, er is een functievoorschrift nodig voor het onderzoek op de vierkante millimeter.

Tweede fase
Produceer een functievoorschrift en doe daar wat mee. Bij deze probleemaanpak liggen wortelfuncties voor de hand.
Voor $3 \leq x \leq 5$ geldt $f(x) = SQRT(25 - x^2)$
voor $0 \leq x \leq 3$ geldt $f(x) = SQRT(25 - x^2) - SQRT(9 - x^2)$

Nu zijn er twee manieren om verder te gaan:

1. Je gaat blind rekenen aan de linker- en rechterlimiet van $f'(x)$ bij $x = 3$ en vervolgens constateer je (als je dat moment nog haalt!) dat er wel degelijk sprake is van een knik in de grafiek (deftig gezegd: de functie is niet-differentieerbaar in $x = 3$).
2. Je constateert, kijkend naar de functievoorschriften, dat er bij $x = 3$ plotsklaps een nieuwe wortelfunctie opduikt. Omdat de domeinrand van $SQRT(9 - x^2)$ tevens startpunt is, weet een wortelexpert dat de raaklijn daar verticaal is. Van links komend bij $x = 3$ wordt dus de afgeleide van f onbegrensd groot, terwijl van rechts komend de afgeleide van f binnen de perken blijft. Conclusie: dit betekent een knik in de grafiek.

Eigenlijk is er nog een derde manier, maar alleen dan als alle leerlingen/studenten beschikken over een Graphics Calculator:

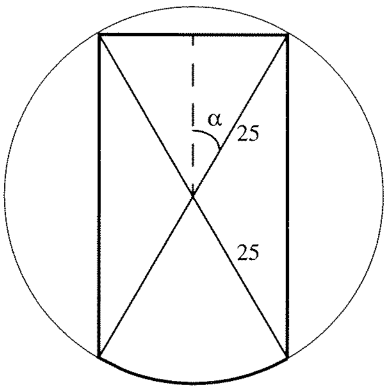
3. Typ de functievoorschriften in op je GC en laat het apparaat inzoomen op het punt (3,4). Bekijk het stukje grafiek aandachtig en constateer dat er een knik in zit.

Derde fase
Je blikt tevreden terug op het gedane werk en zet eventueel nog wat puntjes op diverse i-tjes. Zo zou je nog het gedrag bij $x = 0$ kunnen bekijken. Tenslotte spreek je je verbazing uit over het feit dat deze functie zich bij $x = 3$ zo anders gedraagt dan je had verwacht.
Resteert de vraag of een dergelijke open vraagstelling, waarin ook een wiskundig model moet worden gevonden, eigenlijk wel kan in een schriftelijk tentamen of examen. Bij HAVO B is dit verschijnsel geaccepteerd, bij VWO B kennelijk nog niet. De vrees van examenmakers voor min of meer open probleemstellingen met daaraan

gekoppeld vragen over modelbouw, zijn er naar mijn mening de oorzaak van dat de herinvoering van differentiaalvergelijkingen in het VWO B-programma uitgelopen is op een mislukking.
In feite was de herinvoering van dit onderdeel een uitgelezen moment om iets rond modelvorming in de examens aan bod te laten komen. De praktijk van de huidige examencultuur laat dat kennelijk niet toe. De commissie die de herinvoering heeft voorbereid, pleitte krachtig voor een vulling waarbij modelbouw een essentiële voorwaarde voor begripsvorming werd genoemd[2].

Bureaukastje

Over naar het tweede probleem: de lade in het bureaukastje.
De keuze van een geschikte variabele is hier wezenlijk. Een variabele hoek geeft een veel mooier resultaat dan de benoeming van een zijde met de magische letter x.



De drie driehoeken hebben dezelfde oppervlakte: de halve basis van de ene driehoek ($25*\sin\alpha$) vervult bij de andere driehoek de rol van hoogte en omgekeerd: de hoogte bij de één ($25*\cos\alpha$) is de halve basis van de ander. Resteert nog de cirkelsector, met middelpuntshoek 2α. De oppervlaktefunctie wordt dus:
$O(\alpha) = 3*625*\sin a*\cos a + 625*\alpha \quad \text{met } 0 < a \leq \frac{\pi}{2}$

Het zelfstandig vinden van deze formule is misschien wat veel gevraagd. Ik zou er dan ook weinig moeite mee hebben om het model te geven en de leerling/student te vragen de correctheid ervan aan te tonen. Onderzoek naar de optimale afmetingen van een dergelijke lade is op zich ook al een aardig probleem. Leuk daarbij is dat de oplossing zeker niet triviaal is.
Dit spelen met en denken over het tweede probleem deed ik in de trein. Tijdens de rit van Utrecht naar Eindhoven heb ik vijftig minuten voor dergelijke arbeid beschikbaar. Op een gegeven ogenblik begon mijn overbuurman zich er mee te bemoeien. "Dat is zeker wiskunde; altijd een leuk vak gevonden. Heb het nou ook hard nodig bij mijn opleiding." Wat dat precies was, herinner ik me niet meer. Een HBO-opleiding die iets doet aan technieken, nodig bij olieboringen op zee. Ergens in Noord Holland. Ik liet hem het ladeplaatje zien en vertelde over de modelvorming. Hij schrok terug. "O jee, dat krijg ik bij m'n opleiding ook steeds voorgeschoteld; dat je eerst de formule moet maken waarmee je wiskunde gaat doen. Moeilijk is dat, heb ik nooit gehad. Dat deden we niet bij wiskunde B".
Voor mij was dat daarom ook één van de belangrijkste argumenten om leerlingen die een exacte studie wilden gaan doen, te adviseren naast VWO B ook VWO A in het pakket op te nemen. Ik vertelde hem dat en vroeg hoe daarover bij hem op school gedacht werd. De strekking van het antwoord laat zich waarschijnlijk makkelijk raden: "Als je wiskunde B kunt, moet je geen wiskunde A doen, want dat is veel te flauw; eigenlijk is dat ook geen *echte* wiskunde".

Met deze twee voorbeelden wilde ik iets bloot leggen van de problematiek van de analyse binnen het VWO B programma. Beide probleemstellingen, met de geschetste aanpak, bevatten een aantal aspecten die niet terug te vinden zijn in de examinering van VWO B en (dientengevolge?) ook niet in het onderwijs. Die aspecten zijn: modelbouw, functieonderzoek op een andere manier, dynamiek, dwarsverbanden en het gebruik van technologie. Bij elk van die aspecten wil ik de huidige aanpak zetten naast een alternatieve opbouw.

Modelbouw

Iemand die wiskundig geschoold is moet in staat zijn zelfstandig een geschikte wiskundige vorm te vinden waarmee een probleemstelling gekraakt kan worden. Het oude beeld van de wiskundige, een zweverige zonderling die zijn tijd vult met zaken die boven elke realiteit zijn verheven, is in onze maatschappij allang verdrongen door het idee dat de wiskundige een persoon is die, met beide benen op de grond staand, effectief kan bijdragen aan het oplossen van problemen.
Modelbouw komt bij beide besproken problemen nadrukkelijk aan bod. Dat heeft consequenties voor de manier waarop het onderwijs van wiskunde B moet worden ingericht. Zulke vaardigheden leer je niet als het onderwijs zich beperkt tot het aanleren van technische vaardigheden. Een nodige voorwaarde voor succesvol handelen op dit moeilijke terrein is het geïntegreerd aanbieden van vele probleemsituaties tijdens de behandeling van een stuk wiskunde. Bij die veelheid aan probleemsituaties denk ik zeker ook aan een breedsporige verkenning van een wiskundig concept en een breed gebied van toepasbaarheid.
De meeste eerstejaarsstudenten aan de lerarenopleiding wiskunde van de HMN komen bij de vraag naar het nut van differentiëren niet verder dan 'raaklijn' en 'uiterste waarden'. Ik kan ze dat moeilijk kwalijk nemen, want eigenlijk is er ook niet meer aan de orde geweest in het onderwijs van wiskunde B.
Differentiëren als instrument om veranderingen bij te houden, een al jaren geleden door Martin Kindt geïntro-

duceerd concept[3], vind je in de examens van VWO B niet terug. En daarom ook niet in het onderwijs.
Dat concept is ontzettend krachtig en spreekt leerlingen erg aan. Maar het meest belangrijke is dat zo'n behandeling leidt tot inzicht en begrip. Binnen een VWO B-programma kan het nog versterkt worden door meer gebruiksmogelijkheden op te nemen, zoals

- het lokaal benaderen van krommen via eerste orde benadering (linearisatie) en hogere orde benaderingen (misschien zelfs wel Taylor ontwikkelingen). Iets daarvan is, in kleine lettertjes, als curiositeit (voor de goede leerlingen?) opgenomen in de vijfde editie van Moderne Wiskunde (deel 5V-B, blz. 72);
- het benaderen van nulpunten met de methode van Newton-Raphson: een iteratief proces dat gebruik maakt van lokale linearisatie via de raaklijn. VU-grafiek brengt dit proces prachtig in beeld.

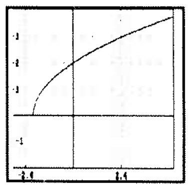
Dit zou een aardige verbreding zijn van de manier waarop binnen het nieuwe onderbouwprogramma vergelijkingen worden opgelost met behulp van de halveringsmethode. Behandeling van benaderende methoden ondermijnt ook het heilige geloof van mijn studenten dat 'iedere vergelijking oplosbaar is'. Ik heb al vele malen meegemaakt dat goede studenten de schrik van hun leven kregen als ze verteld werd dat het grootste deel van de vergelijkingen niet expliciet oplosbaar is. Natuurlijk komt dat doordat vergelijkingen in de wiskundeles altijd wel oplosbaar bleken. Het tekent eens te meer het enge en daardoor a-wiskundige karakter van het huidige programma.

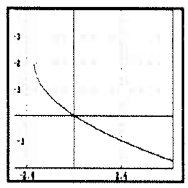
Functieonderzoek

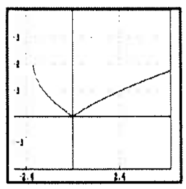
Bij de tweede fase in de oplossing van probleem 1 is de eerstgenoemde manier voor VWO B-leerlingen de aangewezen weg om iets dergelijks aan te pakken. Een aanpak volgens de tweede manier getuigt van wiskundige kwaliteiten die de algoritmische standaardaanpak verre te boven gaan.
Natuurlijk is technische vaardigheid onmisbaar in de bagage van een wiskundig geschoolde, maar als hij die vaardigheden alleen maar blind inzet bij elk willekeurig probleem, dan vertoont hij niet meer dan het voorgeprogrammeerde gedrag van een Pavlov-hondje. In feite is het gebruiken van een specifieke techniek een vaardigheid van een lagere orde. Het zorgvuldig kiezen van een voor het gegeven probleem geëigende techniek is een vaardigheid van een hogere orde, want daarbij spelen inzicht, begrip en overzicht een belangrijke rol.
Om deze hogere orde vaardigheden te leren hanteren is het noodzakelijk dat, bijvoorbeeld in het geval van functieonderzoek, verschillende methodieken als onderling gelijkwaardig worden aangeboden aan de leerlingen. De onderwijs- en examenpraktijk is nu heel strikt toegespitst op het standaardrecept voor functieonderzoek. Formeel heeft een examenkandidaat het recht om een grafiek te tekenen op grond van beschouwingen over transformaties op de grafiek van een standaardfunctie. Als je ziet hoe in de leerboeken deze manier slechts in de marge wordt vermeld en deze methode van onderzoeken in examenopgaven niet als volwaardig wordt erkend, dan is het inderdaad niet meer dan een formeel recht[4].
In probleem 1 ontstaat op een heel natuurlijke, maar ook onverwachte, wijze een functie die niet-differentieerbaar blijkt te zijn. Vergelijk dat eens met het, in mijn ogen absurde, vraagstuk uit een VWO B-examen (1991, eerste tijdvak, opgave 3):

> Van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is gegeven de functie
> $f: x \rightarrow |2 - \sqrt{2x+4}|$.
> Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel Oxy is K de grafiek van f.
>
> Toon aan dat f niet differentieerbaar is in $x = 0$.
> Onderzoek f verder en teken K.

De vraagstelling dwingt de leerling een heel arsenaal aan technieken aan te boren om tot het antwoord te komen; een antwoord dat door een wiskundig geschoolde in een paar woorden, eventueel vergezeld van een paar schetsjes uit de losse pols, kan worden gegeven.
Een veel natuurlijker weg voor beantwoording van deze vragen is het laten ontstaan van de gegeven functie vanuit de oer-wortelvorm $g(x) = \sqrt{x}$. Dat er bij het omklappen in de x-as een knik in de grafiek ontstaat, is zo vanzelfsprekend dat het bijna het vermelden niet waard is.


$x \rightarrow \sqrt{2x+4}$

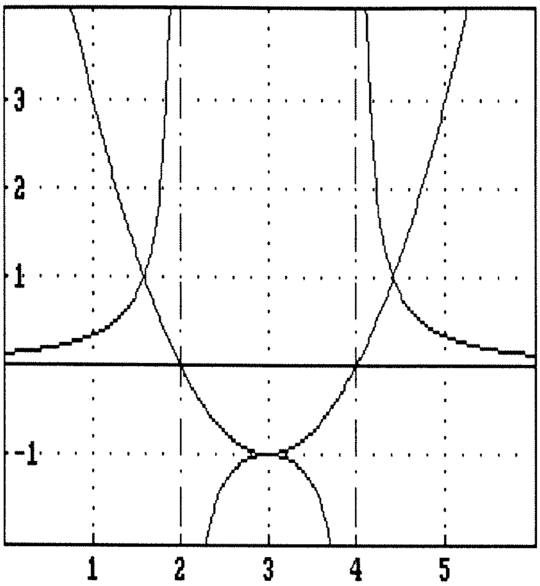

$x \rightarrow -\sqrt{2x+4}$


$x \rightarrow abs\,(2-\sqrt{2x+4})$

Naast het welbekende 'onderzoek de functie' en het gebruik van standaardfuncties is er nog een manier om functies te analyseren. Tegenwoordig besteed ik veel aandacht aan functies die beschouwd kunnen worden als de som-, het verschil-, het produkt- of het quotiënt van twee andere functies, als een omkeerfunctie of als een ketting van functies. In veel gevallen blijkt het onderzoeken van het gedrag van een functie op deze manier veel meer informatie op te leveren dan het standaardonderzoek. Bekijk maar eens de functie

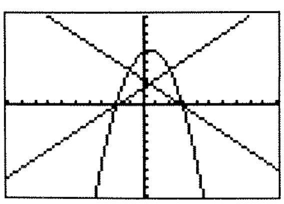
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 8}$$

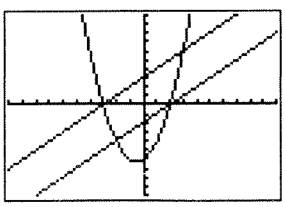
Het standaardrecept levert in dit geval weinig nuttige informatie op. Beschouwing van deze functie als omgekeerde van een tweedegraadsfunctie, met louter kwalitatieve argumenten die zijn gebaseerd op het gedrag van het omgekeerde van getallen uit de drie categorieën: $ABS(x) > 1$, $ABS(x) = 1$ en $ABS(x) < 1$, geeft ruim voldoende informatie om de grafiek te kunnen tekenen. Probeer het zelf maar bij de volgende plaatjes, geproduceerd door VU-grafiek:



Als mijn studenten met deze manier van kijken naar functies worden geconfronteerd, zijn de meesten in eerste instantie bang en onwillig.
Logisch, want zo'n manier van beschouwen vereist nadenken en redeneren!
Als ze er echter aan gewend zijn en het gevoel hebben dat ze er mee uit de voeten kunnen, dan slaat die onwilligheid bij velen om in verbazing over het feit dat ze dat nooit op de middelbare school hebben geleerd.
Logisch, want niets is zo verbazingwekkend als het constateren dat je bij het leren dingen zijn onthouden die tot een beter begrip hadden kunnen leiden!

Het beschouwen van een parabool als het produkt van twee rechte lijnen is ook zo'n eye opener. In het Graphics Calculator project dat door het Freudenthal instituut wordt uitgevoerd, worden met behulp van de GC som- en produktgrafieken bestudeerd[5]. Op die manier kan een tweedegraadsfunctie opeens weer een boeiend onderwerp van studie worden, met probleemstellingen die heel anders van aard zijn dan de 'klassieke', uitgebeende maniertjes van de parabolica. Het produkt van twee eerstegraadsfuncties is altijd een kwadratische functie. Wat informeler, in plaatjestaal, kun je zeggen: het produkt van twee rechte lijnen is een parabool.
Lijnen waarvan de richtingscoëfficiënten hetzelfde teken hebben leveren dalparabolen op, in het andere geval krijg je bergparabolen.





Een vraagstuk uit de voorlopige versie van het ontwikkelde pakket (Y1, Y2 en Y3 zijn de GC-notaties voor in te voeren functies):

Vul het functiebestand van de grafische rekenmachine als volgt:

Y1 = 3 + X/2
Y2 =
*Y3 = Y1*Y2*

a. Zoek een formule voor Y2 zo dat de grafiek van Y3 een dalparabool is die raakt aan de x-as.
b. Verander Y2 zo dat de top van Y3 boven het snijpunt van de twee lijnen ligt.
c. Onderzoek wanneer in het algemeen het snijpunt van twee lijnen precies onder of boven de top van de produktgrafiek ligt.

Dynamiek

Zoals vaak het geval is bij optimaliseringsproblemen, zit er beweging in de problemen 1 en 2 uit het begin van dit artikel. De functies staan hier echt model voor een veranderingsproces.
Daarentegen is het kenmerkend voor alle analysevraagstukken in de examens VWO B dat het statische, betekenisloze formules zijn die puur omwille van de technieken worden aangeboden. Op zich is dat natuurlijk geen argument om de examenvraagstukken slecht te noemen, maar het is wel jammer. Bij wiskunde A en bij HAVO B heb ik ervaren dat formules en, in algemenere zin, problemen aan waarde winnen als ze voortkomen uit een probleemstelling. Zelf vind ik 'het oplossen van vraagstukken' ook veel boeiender dan 'het maken van sommetjes'.
Mijn ervaring is dat leerlingen/studenten bereid zijn om theorie en technieken te leren, hoe moeilijk ze soms ook zijn, als duidelijk is dat je er je voordeel mee kunt doen bij het oplossen van 'vraagstukken'.

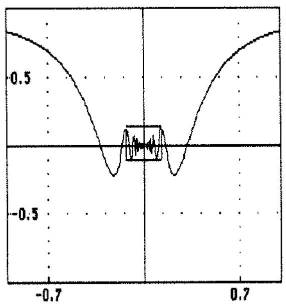
Dwarsverbanden

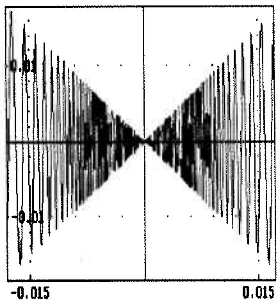
De twee problemen hebben beide een meetkundige basis. Dwarsverbanden tussen meetkunde en analyse worden in het examenprogramma HAVO B uitdrukkelijk genoemd als bron voor examenopgaven. Tijdens de HAWEX experimenten bleek hoe moeilijk het is voor leerlingen om binnen een meetkundevraagstuk opeens over te schakelen op het gebruiken van algebra.
Ongetwijfeld is dat een gevolg van het feit dat op school allerlei gebieden uit de wiskunde geïsoleerd van elkaar worden aangeboden.
Hetzelfde speelt in het VWO-programma natuurlijk ook. Ruimtemeetkunde wordt in de boeken en op het examen nog te sterk als een apart, op zichzelf staand onderwerp behandeld. Beweging door de ruimte (parameterkrommen), inhouden van dynamisch opgebouwde lichamen, ze lenen zich prima voor een harmonieus samenspel van algebra en meetkunde.

Dezelfde hokjesgeest zie je ook binnen de analyse zelf. Functieonderzoek, parameterkrommen en differentiaalvergelijkingen zijn in de schoolpraktijk drie onderling disjuncte delen van de analyse. Een meer geïntegreerde behandeling van deze drie onderdelen zou volgens mij ook sterk kunnen bijdragen aan begrip en inzicht.
De laatste jaren is het mode geworden om in het examen binnen één vraagstuk functies, differentiaalvergelijkingen en/of parameterkrommen op te voeren. Ik heb het vermoeden dat dergelijke vraagstukken niet erg goed gemaakt worden, omdat er in de stress-situatie die een examen nu eenmaal is, opeens zaken gekoppeld worden die in de boeken (en dus in de lessen?) altijd ogenschijnlijk tot verschillende domeinen behoorden.

Computer en graphics calculator

Het idee van INZOOMEN op een grafiek om details te bestuderen is afkomstig van het gebruiken van VU-grafiek en de Graphics Calculator. Zo is de UITZOOM-optie een prachtige manier om een globaal beeld te krijgen van een functie. De overbekende functie uit het VWO B programma $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ die wel continu wordt door de toevoeging $f(0) = 0$, maar daarmee nog niet differentieerbaar, ging voor mij pas echt leven toen ik in VU-grafiek ging inzoomen op de oorsprong: hoe dichter je nadert, hoe rustelozer hij wordt.





Zoom je daarentegen in op een punt buiten de oorsprong dan zie je op een gegeven moment weer een rustig beeld ontstaan. Die visualisatie versterkte dat wat ik al een aantal jaren netjes algebraïsch had bewezen. Ik begreep opeens wat er aan de hand was!
Dat geldt ook voor het bestuderen van functies door ze te beschouwen als som, verschil, produkt, of quotiënt van meerdere standaardfuncties.
Terecht maakt Simons (TUE) zich zorgen over het feit dat zijn eerstejaarsstudenten wel de standaardlimiet $\sin(x) / x$ voor $x \to 0$ kennen, maar absoluut het beeld missen dat daarom dus de functies $x \to x$ en $x \to \sin(x)$ in de buurt van $x = 0$ steeds meer op elkaar gaan lijken. Het is inderdaad zorgelijk, maar tegelijkertijd ook niet verbazingwekkend, want dit soort beschouwingen past niet in een 'sommetjeswereld'.
Door het werken met grafische programma's is mijn manier van denken over functies sterk veranderd. In feite ben ik veel flexibeler geworden en blijk ik ook veel meer dan vroeger open te staan voor alweer nieuwe manieren van denken over functies. Kortom mijn vaardigheid in het inzichtelijk omgaan met functies is in niet geringe mate vergroot.
Een programma als VU-grafiek kan op verschillende manieren gebruikt worden, onder andere als demonstratiehulp in de les. Maar de grootste kracht zit hem in het feit dat het kan dienen om een onderzoekende houding bij leerlingen (en bij mezelf) te stimuleren. Gebruik van dit medium heeft ook tot gevolg dat vraagstellingen veranderen. Eén van de bij het HAWEX-project betrokken docenten gebruikte VU-grafiek bij een mondeling schoolonderzoek. Hij merkte dat hij daardoor zijn vragen aan de leerlingen meer richtte op kwalitatief redeneren dan op technisch rekenwerk.
VU-grafiek leent zich uitermate goed voor het bestuderen van families van krommen. In feite ben je dan bezig met functies waarin een of meerdere parameters voorkomen. Ook hier geldt dat de visuele ondersteuning sterk kan bijdragen tot een andere manier van omgaan met examensommen waarin parameters voorkomen. Als voorbeeld hierbij neem ik opgave 2 uit het eindexamen wiskunde B van 1989, eerste tijdvak.

> Voor elke $p \in \mathbb{N}^+$ is gegeven de functie
> $f_p \to p - 1 + \cos px$ met domein $[0, 2\pi]$.
> Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel Oxy is F_p de grafiek van f_p.
>
> Onderzoek voor welke p geldt: F_p raakt de x-as.
>
> Onderzoek voor welke p de lijn $y = \frac{1}{2}p$ en F_p minstens vier punten gemeenschappelijk hebben.
>
> V is het vlakdeel ingesloten door F_3, x-as en de lijn $x = 2\pi$.
> Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door V te wentelen om de x-as.

Mijn redenering bij de eerste twee vragen is gebaseerd op het idee dat f_p het interval $[p - 2, p]$ als bereik heeft. Dus raken aan de x-as kan de grafiek als $p = 2$ en als $p = 0$. Bij $p = 0$ verdwijnt echter de cosinus, zodat die waarde niet voldoet. Wil er sprake zijn van snijden of raken, dan moet tenminste gelden: $p - 2 \leq \frac{p}{2} \leq p$ ofwel $0 \leq p \leq 4$. De waarde 0 valt meteen af, bij $p = 1$ krijg je de gewone cosinusgrafiek en die heeft binnen één volledige periode nooit meer dan drie snijpunten met een horizontale lijn. Voor grotere waarden van p neemt het aantal perioden toe, met elke keer dus twee snijpunten extra. Oplossingen zijn dus $p = 2$, 3 en 4.
Dat is een volledige redenering die iedereen moet kunnen geven. Alleen realiseer ik me dat ik dit doe, omdat ik me bekwaamd heb in het gebruiken van het globale grafische gedrag van een functie. Het zou me daarom niet verbazen als leerlingen beter zouden presteren op de zogenaamde parametersommetjes, als ze tijdens hun opleiding ook die visuele ondersteuning hadden ervaren door bijvoorbeeld families van krommen te bestuderen.

Hoe verder met de analyse?

Het voorgaande kan eigenlijk worden teruggebracht tot slechts één allesoverheersend probleem: het VWO B-programma kent een benauwende eensporigheid, die verrassingen uitsluit. Dat geldt voor de heel goede leerlingen (geen enkele uitdaging binnen het reguliere examenprogramma) maar ook voor de minder briljante leerlingen (de zinledigheid van het sommetjes maken). De leerlingen worden voornamelijk opgeleid tot niet-perfecte rekenmachines, die het tegen een computeralgebra pakket als DERIVE ten alle tijde zullen moeten afleggen. Daarmee zijn we aangekomen bij het niet meer te ontkennen fenomeen van de geautomatiseerde algebraspecialist.
De analysevraagstukken van de wiskunde B-examens zijn een peuleschilletje als DERIVE mag worden ingezet. Bij onze (Nederlandse) examens zijn nog wel kleine denkstapjes nodig voordat het apparaat het rekenwerk kan overnemen. Dat is enigszins een geruststelling. Het kan nog veel erger. In examens die ik uit Engeland (district London) heb meegenomen (pre-university, het zogenaamde A level 'pure mathematics') kom je alleen maar sommetjes tegen die direct aan DERIVE gevoerd kunnen worden. Eén voorbeeld (1993, University of London) zegt voldoende:

Evaluate $\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} \right) dx$

Vluchten helpt niet meer, we hebben dringend een genuanceerd standpunt nodig over een eventuele invoering van dergelijke pakketten in het middelbaar onderwijs. Voor mij staat als een paal boven water, ongeacht het wel of niet invoeren, dat alleen al vanwege het bestaan van dergelijke pakketten veel domme, routinematige oefening in technieken kan vervallen. Ik denk dan met name aan de grote hoeveelheid tijd die binnen wiskunde B nodig is om bedreven te raken in het berekenen van allerlei moeilijke afgeleiden en integralen. Er komt zo in ieder geval meer tijd beschikbaar voor echte wiskunde. Ik doel dan voor de analyse met name op een verbreding van begrip en inzicht, zoals boven aangegeven. In ieder geval is een belangrijke rol weggelegd voor VU-grafiek en/of de graphics calculator.
Verder zijn toepassingen in allerlei vorm, geïntegreerd aangeboden met de opbouw van een stuk theorie, inzichtversterkend en motiverend.
Ik begrijp de reacties niet van mensen die geloven dat je daarmee zou 'vervallen' tot het niveau van wiskunde A. Ik vind eerlijk gezegd dat je daarmee het niveau van wiskunde B zou opkrikken tot dat van wiskunde A. De essentie van wiskunde A is niet dat het om formeel makkelijkere wiskunde gaat, maar dat leerlingen leren structureren, formuleren en hun wiskundig technische vaardigheden (die inderdaad op een lager formeel niveau staan) leren gebruiken bij het oplossen van vraagstukken. Kennelijk is de manier waarop je als docent / sectie daarmee omgaat van beslissende betekenis voor de manier waarop leerlingen het vak ervaren. Overtuigender dan een oudleerling kan ik het niet zeggen. Daarom voer ik nog eens de uitspraak op van Milja, een oudleerling van het Strabrechtcollege in Geldrop, die vanuit het HEWET experiment wiskunde ging studeren aan de Universiteit van Amsterdam en met haar wiskunde A en B terechtkwam tussen jaargenoten die allen wiskunde I en II hadden gedaan[6]:

"Dit systeem (bedoeld is wiskunde A uit het HEWET-materiaal) leert je iets wat heel belangrijk is in de wiskunde: eerst voelen, dan hardmaken. Eerst voel je hoe het antwoord er ongeveer moet uitzien. Als je dat goed doorhebt (want uitgekauwd wordt het wel in vergelijking met de universiteit) ga je een regel, een stelling zoals je wilt, formuleren. Ik denk dat dat de essentie van wiskunde A is. Zo kunnen leerlingen zich ook niet vastklampen aan formules en trucjes, zoals bij wiskunde B wel gebeurt...... Wiskunde A was en is voor mij een hele waardevolle aanvulling op wiskunde B".

Die essentie van wiskunde A, namelijk onderzoeksgericht bezig zijn, moet worden toegevoegd aan het programma van wiskunde B. Dat zou voor mij dat vak echte diepgang geven. Toepassingen hoeven echt niet 'soft' te zijn. Kijk maar naar de in het begin opgevoerde problemen en de HAWEX-boekjes voor wiskunde B.

Conclusies en aanbevelingen

Het voorgaande kan als volgt worden samengevat.

- *Het huidige examenprogramma geeft een slecht beeld van de discipline Wiskunde.*

Het is veel te sterk gericht op routinewerk. Het aspect van 'ontdekken en hardmaken', dus het redeneren, argumenteren en bewijzen ontbreekt geheel in de analyselijn. Buiten het examenprogramma om aandacht besteden aan 'leuke' wiskunde lijkt een aardige suggestie, maar is niet erg realistisch. Het verplichte deel vraagt zoveel oefening op het technische vlak dat daarmee de beschikbare tijd al vaak wordt opgebruikt. Iedere bovenbouwdocent weet dat. De enige manier om ook 'leuke' wiskunde in het onderwijs te krijgen is het te verplichten via het examenprogramma.

- *De computer en de Graphics Calculator moeten een volwaardige plaats krijgen binnen het onderwijs.*

Op didactisch gebied moeten de mogelijkheden van de technologie uitgebuit worden. Dat kan onder andere betekenen dat traditionele benaderingen worden ingeruild. Een voorbeeld: naast het gebruikelijke 'raaklijnprincipe' biedt de INZOOM faciliteit op het beeldscherm de mogelijkheid om het principe van de lokale lineariteit te benadrukken bij de beeldvorming rond de helling van een kromme. Daarnaast dient de technologie ook geaccepteerd te worden als technisch begaafd rekenaar, met de bijbehorende consequenties voor de benodigde tijdsinvestering op puur technische vaardigheden binnen het examenprogramma.

- *Toepassingen en daarmee ook dwarsverbanden zijn noodzakelijke ingrediënten.*

Ze zijn onmisbaar voor beeldvorming (inzicht en begrip), transfer (vaardigheden uit het ene domein kunnen inzetten binnen een ander) en ze geven zin aan het leren (daarmee dus ook motiverend).

Vernieuwing van het wiskunde B-programma op het VWO is noodzaak. Heel belangrijk is dat daarbij ook zorgvuldig gekeken wordt naar de invulling, met name in 3 VWO, van het onderdeel algebra in het nieuw geformuleerde onderbouwprogramma. Voor de meeste zaken die ik hierboven heb aangekaart wordt, in ieder geval volgens het *Trajectenboek*[7], een goede basis gelegd in met name de derde klas. Ik ben erg benieuwd in hoeverre de auteursgroepen in staat zijn om daar in de leerboeken een uitvoering aan te geven. Vervolgens moet de inhoudelijke invulling voor klas 4 VWO opnieuw worden vastgesteld. Ook daarover zijn in het Trajectenboek al globale suggesties opgenomen.
Al met al is er dus nog genoeg werk te doen.

Noten

[1] Thijs Notenboom kreeg deze problemen voorgelegd om ze te beoordelen op hun geschiktheid voor opname in het tijdschrift Pythagoras. Een verhandeling over het eerste probleem is ondertussen al gepubliceerd. Het tweede probleem komt in een latere aflevering.

[2] Rapport van de Werkgroep Differentiaalvergelijkingen, Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, 1989.

[3] Martin Kindt, *Differentiëren 1*, een manier om veranderingen bij te houden, leerstofpakket voor 4 VWO. Freudenthal Instituut. 1979.

[4] Hans Brandwacht, *Aan de hand van grafieken bekeken en getekend*, verslag van een afstudeerproject als afronding van de eerstegraadsopleiding wiskunde aan de HMN. Uitgebreid onderzoek naar het gebruiken van standaardfuncties bij het onderzoeken van functies, zowel in examens als in de methoden *Moderne Wiskunde* en *de Wageningse Methode*. Aansluitend op dit onderzoek zijn docenten van het Wagenings Lyceum in de klassen 4, 5 en 6 VWO begonnen meer systematisch aandacht te schenken aan het manipuleren van en redeneren aan de hand van standaardfuncties. Een lezenswaardig verslag, met vele mooie voorbeelden.
Geïnteresseerden kunnen het bestellen (tegen produktie- en verzendkosten) via: Cathy Ben El Hochine, vakgroep Wiskunde, Hogeschool Midden Nederland/FEO, postbus 14007, 3508 BS Utrecht.

[5] In het kader van het GC project wordt een leerlingpakket *Grafieken Algebra* ontwikkeld door Michiel Doorman en Paul Drijvers. In een workshop op de studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (oktober 1993) is het produkt van twee rechte lijnen met behulp van de GC gepresenteerd door Martin Kindt en Paul Drijvers.

[6] Henk van der Kooij, Opvattingen en toetsen, in: *Toetsen, Eindtermen en Opvattingen over wiskunde-onderwijs, een conferentieverslag*, Freudenthal instituut, 1987.

[7] Commissie Wiskundeonderwijs Ontwikkeling. *Trajectenboek wiskunde 12-16*. Utrecht/Enschede, Fi/SLO, juni 1992.