

Wiskunde B, de wiskunde en de toekomst

G.Y. Nieuwland

Vrije Universiteit, Amsterdam

Inleiding

In het eerste deel van dit artikel wordt nagegaan hoe de strijdpunten van de Duitse Reform-beweging na een eeuw nog altijd de kijk vanuit de Nederlandse universiteit op de schoolwiskunde beheersen. Het tweede deel markeert in dit verband de verschillen tussen het (nog betrekkelijk recente) verleden en het heden. In het laatste deel wordt vervolgens bepleit wiskunde B voor de toekomst meer vanuit een eigen optiek en minder vanuit de bestaande traditie of vanuit de eisen van vervolgopleidingen te programmeren. Trefwoorden zijn: 'thema's' in plaats van 'toepassingen' en een heroverweging van 'deductiviteit'.

.... Ze pakken het er anders aan

Vreemd verleden

The past is a foreign country: they do things differently there.

Dit is de eerste zin van *The go-between*, een roman van L.P. Hartley¹, die na zo'n opening natuurlijk niet meer stuk kan.

Het citaat drong zich op bij het lezen van een boekje dat ik bij het voorbereiden van dit opstel op goed geluk uit de bibliotheek had meegenomen: *Neohumanism and the Persistence of Pure Mathematics in Wilhelmian Germany* door Lewis Pyenson². Het bleek een gelukkige greep: boeiend geschreven, ter zake bij het onderwerp van dit themanummer – maar liet ook een wat onbehaaglijk gevoel achter. Dat onbehagen begon daarmee, dat in het Duitsland van Wilhelm II natuurlijk nogal wat dingen anders werden aangepakt dan thans bij ons – maar dat bij eerste lezing nu juist de overeenkomst van verleden en heden zo frappeerde.

In de huidige discussies in de universitaire wiskundige kring over de motieven en doelen van de schoolwiskunde, zoals die bij voorbeeld door de Verkenningcommissie Wiskunde³ weer op gang zijn gebracht, bleek weinig om te gaan dat niet in enigerlei vorm daarginds voor de Eerste Wereldoorlog al aan de orde was geweest. Was

Nederland dan niet alleen economisch, maar ook intellectueel een Duitse provincie – en dat met een faseverschil van honderd jaar, in plaats van de aan Heine toegeschreven vijftig?

Let wel: motieven en doelen zijn wat anders dan vorm en inhoud van het werkelijk gegeven onderwijs. Dat pakken wij inderdaad inmiddels heel anders aan. Maar op het kwalitatieve niveau – en zeker vanuit de academische gezichtshoek – bleken toen en nu nog steeds dezelfde argumenten opgeld te doen. Hartley's zin hielp mij dat opmerkelijk te vinden. Overeenkomsten tussen de betekenis van de wiskunde in het vroeg-industriële Duitsland en in onze post-industriële samenleving liggen immers niet zo voor de hand.

Maar Hartley's *one-liner* stelt in het kleinst mogelijk bestek nog een andere invalshoek aan de orde: het reflectieve van de kijk op het verleden staat daarin gesteld tegenover het in de actualiteit van destijds dingen echt dóen. Wiskundigen zijn overmatig gevoelig voor het kwalitatieve aspect en daarmee al gauw tevreden met een zelfbevestigende constatering: kijk, nog altijd dezelfde argumenten. Maar indertijd werden die argumenten aangedragen door mensen die daarin aanleiding zagen tot georganiseerde actie – want wat historisch gebeurt wordt in een maatschappelijk, ja politiek proces beslist. En in dat proces zijn niet de argumenten beslissend, maar het maatschappelijk gewicht dat daarachter in stelling kan worden gebracht. Zo gezien kunnen in de maatschappelijke discussie over de gewenste rol van de wiskunde nog altijd dezelfde argumenten gangbaar zijn – terwijl tussen toen en nu aanzienlijke verschuivingen zijn opgetreden in de achterliggende gewichtsfactoren.

Om dat in beeld te brengen is het goed aan de hand van Pyenson nog een ogenblik te verwijlen bij de wiskunde in de tijd van de *Kaiser*.

Felix Klein als held van het verhaal

Het verhaal begint in Pruisen aan het begin van de vorige eeuw, met de oprichting van de universiteit van Berlijn

door Von Humboldt. Hier werd de idee van de moderne Europese universiteit vormgegeven: de eenheid van onderwijs en onderzoek. Het fundament van dit bouwwerk was het neo-humanistische ideaal van vorming door confrontatie met het ware, schone en goede, zoals dat voor altijd was neergelegd in de klassieke Griekse teksten. Die confrontatie lag aan het eind van een lange weg van training van de student in de *formele discipline* van de tekstanalyse. In het licht van dit ideaal had de beoefening van de wiskunde geen nadere argumentatie nodig. Van oudsher had dan ook de arithmetica, anders dan de fysica, tot het universitair *quadrivium* behoord. Want niemand minder dan Plato had al de weg via de wiskunde naar het ideale inzicht gewezen.

Toegang tot deze universiteit – en daarmee tot de hogere overheidsfuncties – gaven de *Gymnasien*, gestoeld op dezelfde, met Pruisische consequentie uitgewerkte ideologie. Het bewaken van de toegang tot het corps van *Oberlehrer* was een voorname taak van de filosofische faculteiten. Het behalen van de status van leraar was aanzienlijk zwaarder dan van de meeste doctorstitels en de leraren werden geacht ook daarna actief aan het onderzoek te blijven deelnemen. Zij waren opgenomen in de ambtelijke hiërarchie en vormden een maatschappelijk bijzonder invloedrijke kaste. Naast de gymnasia bestonden de *Realschulen* voor de opleiding van de lagere ambtenaren en als basis voor de hogere opleidingen voor handel en industrie – met als latere tussenvorm de *Realgymnasien*.

Pyenson beschrijft in zijn essay de veranderingen in de onderwijsideologie in het industrieel en wetenschappelijk sterk opkomende Duitsland van de vorige eeuw, vanuit de interessante optiek van de schoolwiskunde. Binnen de industriële wereld vormden zich de professionele organisaties van ingenieurs – ingenieurs die waren opgeleid aan technische hogescholen die wel de universitaire status maar niet het universitaire aanzien bezaten. Hiermee was een pressiegroep ontstaan van waaruit met toenemende klem de vraag naar de relevantie van het klassieke vormingsideaal voor de moderne industriële maatschappij werd gesteld. En ook vanuit de zich krachtig ontwikkelende natuurwetenschappen klonk de vraag of deze niet een modern paradigma boden dat als vormingsideaal superieur was aan de klassieke *Bildung*.

In Pyenson's tekening van de *Reform*-beweging in het Duitse onderwijs is Felix Klein de held. Hij zette zich in de jaren 1887 tot 1910 met al zijn kracht in voor de vernieuwing van het wiskundig curriculum, zowel aan de universiteit als voor de scholen. Zijn prestatie bestond, politiek gezien, in het in balans houden van de aanspraken van conservatieven en nieuwlichters. Zoals in onze tijd was het toen een gedrang van jewelste van aanbieders op de onderwijsmarkt, ieder met hun eigen vormingsideaal.

Daar waren:

- het historisch-filologisch *establishment*, waarvoor de beoefening van wiskunde bestond uit het lezen van Euclides in het origineel
- de nieuwe streng-arithmetiserende school van Kummer en Weierstrasz, die een eigentijdse invulling van het begrip *formele discipline* in de aanbieding had
- de natuurwetenschappers, die vooral in wiskundig formularium brood zagen voor zover dat voor natuurwetenschappelijke modelvorming bruikbaar was
- de ingenieurs die de noodzaak én de waarde van een *praktische* wiskunde benadrukten⁴ steeds met andere consequenties voor de opzet van de schoolwiskunde.



Felix Klein
1849-1925

Klein volstond natuurlijk niet in het aanwijzen van het politiek correcte midden van al deze gezichtspunten. Zijn kracht lag in een eigen, pregnante visie op de wiskunde. Tegenover de opkomende arithmetiserende en formalistische scholen, die het pas ontdekte begrip *zuivere wiskunde* in het vaandel voerden, verdedigde hij de opvatting dat aan de formele structuren wiskundige *inhouden* voor-

afgaan, die slechts intuïtief grijpbaar zijn. Met andere woorden: hij erkende de geldigheid en de waarde van de formele (en de praktische) gezichtspunten, maar benadrukte het intuïtief besef dat een wiskundige notie vanuit verschillende systematische gezichtspunten kan worden beschouwd terwijl het toch elke keer *over hetzelfde* gaat. Daarmee werd *synthetische visie* een sleutelbegrip in Klein's woordenboek, dat bij voorkeur werd uitgewerkt als *geometrische modellering* (bijvoorbeeld: in de modellen voor de niet-euclidische meetkundes). In zijn opvatting gaat het bij de modelvorming in de natuurwetenschappen nog steeds om dezelfde wiskundige intuïties, die daarom ook tot het aandachtsveld van de wiskundige dienen te behoren. Het (klassieke) functiebegrip werd door hem als centrale notie voor de schoolwiskunde aangewezen – en is dat ook bij ons nog. In de conclusie van zijn opstel wijst Pyenson op een belangrijk aspect bij de aanvaarding van deze visie in brede kring, die het behoud van een centrale plaats voor de wiskunde in het leerplan voor de scholen garandeerde. Klein's gezag was immens, zowel bij de machtige *Oberlehrer* als bij het oppermachtige ministerie. Maar wat hen overtuigde was dat zijn inzichten werden ingekaderd in een actualisering van het klassieke vormingsideaal en niet gericht waren op een afwijzing daarvan. In de nieuwe opzet droeg de wiskunde bij aan de vorming van het *Weltbild* van de leerling, als basis van de *Weltanschauung* die daaraan normen en waarden toevoegde – waarvan de inhoud in het Duitsland van toen in

hoge mate staatszaak was.

Klein's visie op de wiskunde had evenzeer consequenties voor de inrichting van de universitaire wiskunde van zijn tijd. Die visie kreeg vorm in de befaamde Göttinger school, met Hilbert, Minkowski en Courant als voortrekkers. Na 1933 werd deze traditie overgeplant naar New York in wat nu het Courant-instituut heet. Na de tweede wereldoorlog waren hieraan grote namen als Friedrichs, Lax en Moser verbonden. Hier was mathematische fysica een integrerend onderdeel van de wiskunde en zo heeft de Göttinger traditie voor mij – als aankomend toegepast analist – nog sterk de kijk op de wiskunde bepaald.

Binnen het geheel van de twintigste eeuwse wiskunde is deze school toch nooit meer dan één van de stromen geworden. En als Pyenson zijn boekje besluit met de opmerking dat Klein's model nog altijd de basis vormt voor de opleidingen in de wiskunde op school en universiteit in Centraal Europa, dan klinkt dat inmiddels als: nogal ouderwets.

Toen en nu: overeenkomst en verschil

Met historische parallellen moet men voorzichtig omgaan: zij worden pas zichtbaar als eerst een speciale bril wordt opgezet. Het wordt dus de hoogste tijd om terug te keren naar Hartley's besef dat het toch wel een heel speciale historische bril moet zijn die tot de conclusie: *niets nieuws onder de zon* voert. Want aan de bijna onherkenbare transformatie van de wereld van toen is moeilijk voorbij te zien. Vooral ook van de wiskundige wereld. Wat daarbij allereerst opvalt is de schaalvergroting – ook relatief.

Het aantal actieve wiskundigen liet zich toen in honderden en laat zich nu in tienduizenden meten. Dit schaafeffect werkt door in een inhoudelijke vertakking van de wiskunde die het vrijwel onmogelijk maakt om wat nu gebeurt in termen van toen te interpreteren.

Laat ik proberen enkele verschillen aan te duiden, voor zover die in het perspectief van de schoolwiskunde ter zake lijken. De negentiende eeuwse wiskunde was voor een groot deel mathematische fysica. Volgens een opmerking van Freudenthal beliep dat zo'n 75% van de totale productie, een percentage dat ik thans op hooguit 25 schat. (In beide gevallen praten we over werk dat in de wiskundige tijdschriften terecht kwam, wat nu natuurlijk een fractie is van alles wat in de praktijk wordt gedaan). De overige 25% van toen bestond voor een aanzienlijk deel uit synthetische, vooral projectieve meetkunde – nu als onderwerp verdwenen. Van de resterende 75% van nu is een substantieel deel stochastiek (mathematische statistiek, kansrekening, besliskunde). Dit is thans een hoofdmoot van de toegepaste wiskunde, toen praktisch non-existent.

De historische mathematische fysica omvatte voor een klein deel *praktische Mathematik*. Dit was het numeriek wiskundig rekenen in de kinderschoenen, het met grafische middelen oplossen van vergelijkingen (wat toen re-

latief sterk de aandacht had), mechanische hulpmiddelen voor de berekening van integralen en dergelijke. Wiskundig gezien is dit terrein randverschijnsel gebleven – zuiver wiskundigen duwen het liever over de grens met de informatica. Maar het volume en het maatschappelijk belang van de *computational sciences* en van de visualisering van numerieke gegevens is in deze tijd groot, en in onze informatie-maatschappij nog steeds stijgend.

Toen en nu: het spel en de spelers

Die veelvormige ontwikkeling betekent intussen ook, dat de wiskunde op school en aan de universiteit in de loop van honderd jaar steeds verder uit elkaar zijn geraakt. Een programmamaker op school, die zich nu zou willen oriënteren aan een algemeen aanvaarde inhoudelijke visie op de universitaire wiskunde-opleiding, zal daarnaar vergeefs zoeken – gesteld dat hij die neiging nog zou hebben. Ook het educatief *establishment*, al dan niet in relatie met een departementale machtsbasis, kan niet meer opereren vanuit een algemeen als geldend erkend vormingsideaal. En van een aan zo'n ideaal te ontleen geprivilegieerde positie voor de wiskunde is al helemaal geen sprake meer. De huidige advocaten van de waarde van de formele discipline hoeven na het *New Math*-drama voorlopig niet meer op school terug te komen. Dan zijn in ideologisch opzicht van de door Pyenson aangegeven actoren thans nog twee partijen in het maatschappelijk spel actief: de ingenieurs en de wetenschappers (in onze eeuw aangevuld met de economen). Beiden benadrukken het nuts-aspect van de wiskunde, zij het met verschillend accent. Het belang van wiskunde als structuurwetenschap voor technologie en natuur- en economische wetenschappen is onmiskenbaar. Maar de actie *Kies Exact!* viel (begrijpelijkerwijs) in het water, en ook overigens lijkt op dit ogenblik Nederland niet gecommitteerd aan een toekomst waarin *big science* een overwegende rol zal gaan spelen. Ditzelfde lijkt te gelden voor de ingenieurs: ook in *advanced technology* wenst ons land zich niet echt sterk te maken.

*Mene tekkel?*⁵

Als dit allemaal juist is voorspelt dat, dunkt mij, voor de toekomst van de schoolwiskunde weinig goeds. Laten wij wel wezen: slechts een heel kleine groep leerlingen kiest wiskunde voor zijn plezier – dat was volgens Pyenson in de tijd van de *Kaiser* al niet beter. Bij het behoud van de wiskunde in het schoolprogramma hebben wiskundigen – dit wèl anders dan in Wilhelm's tijd – nog slechts twee bondgenoten, ieder met andere dan wiskundige oogmerken. Te bezien staat dan nog, hoeveel die steun waard is in een land dat zijn toekomst blijft zien in het telen van varkens en bloembollen of het karren van vracht langs Europa's tolwegen.

Bij zijn afscheid van 'zijn' IOWO in 1975 voorzag Freudenthal⁶ dat het wiskundeonderwijs op school in het jaar 2000 zou zijn geïntegreerd in de natuurwetenschap-

pelijke en economische vakken. Hij vond dat geen ramp en had intussen het iowo op de lijn gezet die nu *realistisch wiskundeonderwijs* heet. Op dat ogenblik was nog niet een alternatief te voorzien dat ons nu wel helder voor ogen staat: het opnemen van alle voor andere vakken noodzakelijke wiskunde, zowel op school als aan de universiteit, in speciale *software-pakketten*⁷. Deze beloven toepassingsgericht, interactief, uiterst gebruikersvriendelijk, van fraaie visuele en grafische mogelijkheden voorzien, goedkoop, en in hoge mate zichzelf verklarend te worden.

Dat zal in het jaar 2000 nog niet zover zijn, maar in dit jaar zou de minister van onderwijs heel goed kunnen besluiten het wiskundeonderwijs, onder meer bij gebrek aan bevoegde leraren, te stoppen en de uren te verdelen onder de natuurkunde- en de economiedocent. Die maken dan zelf wel uit wat zij uit de wiskunde in hun lessen nodig hebben – die stof onderwijzen ze op dit ogenblik trouwens voor een flink deel toch al. Ik betwijfel of zo'n maatregel tegen die tijd op veel maatschappelijk verzet zal stuiten, en zie dat dus ook gewoon gebeuren – *tenzij de wiskundigen voor de dag komen met een aanzienlijk sterker verhaal dan nu!*

Tussenstand

Motieven en paradigma's

Als aan universitaire wiskundigen wordt gevraagd een motivering te geven voor de aanwezigheid van wiskunde B in het VWO-leerplan, volstaan zij meestal met de opmerking dat wiskunde zo *mooi* en zo *nuttig* is. Het is daarom goed van tijd tot tijd eens hardop de vraag te stellen: wil iemand nu eens uitleggen wat (bijvoorbeeld) aan de eindexamenopgaven wiskunde B 1993 zo mooi en zo nuttig is? Toen ik dat laatst deed merkte een collega op, dat je dan eerlijkheidshalve naar het leerplan zou moeten kijken en dat dat er helemaal zo gek niet uitzag. Dat was natuurlijk geen antwoord op de vraag – en bovendien is het in de praktijk wel degelijk de examencultuur waarvoor leerling en docent zich zoveel inspanning getroosten.

Dus nogmaals: wat levert die (voor verreweg de meeste leerlingen) relatief heel grote inspanning nu eigenlijk op? In het antwoord van wiskundigen herken ik dan (na Pyenson) meestal twee elementen: er bestaat nu eenmaal in de maatschappij iets als een vormingsideaal waaraan de wiskunde *formele discipline* bijdraagt, en: de ingenieurs en economen zeggen wiskunde *nuttig* te vinden. Inmiddels lijkt het gewenst op beide punten wat nader in te gaan.

Het is mij niet bekend of de doelstellingen van ons tegenwoordige onderwijsstelsel ergens beschreven staan. Laten we die het *pedagogisch paradigma* noemen en bij gebrek aan beter omschrijven als: het aanreiken van kennis en van vaardigheden, die bruikbaar zijn om wat op een mens afkomt in een volle, chaotische en veelal bedreigende wereld, te plaatsen en daartegenover positie te

kiezen. Het gaat daarbij dus om een tweeledige zaak: het aanbrengen van *geschikte interpretatiekaders*⁸ en van een zekere *redzaamheid*.

Voor zover ik kan zien scoort dan wiskunde in principe tamelijk hoog op het eerste punt en heel laag op het tweede. Om met het laatste te beginnen: met Frans op het niveau van een VWO-eindexamen kan iemand met enige moeite een boek lezen, met enige hulp een brief schrijven en hoeft zij op vakantie in Frankrijk niet van honger om te komen. Wiskunde (op VWO-peil) kan daar weinig vergelijkbaars tegenover stellen. Aan de andere kant is in een lange geschiedenis gebleken dat het wiskundig aspect van de werkelijkheid een heel geschikt aangrijpingspunt is om daarin structuren te ontdekken en de complexiteit daarvan te beheersen. De historische betekenis van de wiskunde als interpretatiekader is dus onomstreden – maar zoals het vervolg zal laten zien staat daarmee de actuele betekenis nog geenszins vast.

Intussen kan worden vastgesteld dat wat de (universitaire) wiskundige als motivering voor de schoolwiskunde naar voren brengt, maar heel gedeeltelijk spoort met wat hierboven het pedagogisch paradigma werd genoemd. Dat formele discipline als waarde-op-zich-zelf binnen dit paradigma niet wordt gehonoreerd, kan na de terugblik in het eerste deel niet als verrassing komen. Maar ook waar sprake is van het aanbrengen van interpretatiekaders als onderwijsdoelstelling is het de vraag of daarmee hetzelfde artikel wordt bedoeld dat traditioneel 'het nut van de wiskunde' heette. Wetenschappers en technologen hebben in onze tijd toch al sterk de neiging de begripsmatige inbreng van de wiskunde onherkenbaar in het eigen paradigma te integreren⁹ (dit lag in de vorige eeuw anders, Pyenson geeft daarvan een aantal sprekende voorbeelden). Deze tendens wordt nu nog eens krachtig versterkt door de mogelijkheid daarbij formeel wiskundige episodes te vervangen door de *black boxes* van de informatietechnologie.

Papystische en realistische wiskunde

Belangrijker dan discussies over min of meer filosofische uitgangspunten is natuurlijk de wijze waarop de actuele onderwijspraktijk wordt ingevuld. Om diverse redenen moet hier een korte aanduiding volstaan.

Een geruchtmakende poging om in de traditie van Klein vanuit een integrale wiskundige visie de schoolwiskunde te beïnvloeden vond plaats in de jaren vijftig. Ditmaal waren het de aanhangers van de formele discipline die met veel enthousiasme en enige arrogantie algemene geldigheid voor hun visie claimden: Papy werd de zegsman van de Bourbaki-filosofie in de schoolwiskunde. In Nederland vond hij weerklank bij Vredenduin, maar bleef deze invloed beperkt, ook dankzij de gezaghebbende stem van Freudenthal. Via het iowo (en later het Freudenthal instituut) bleven diens ideeën een agenda-bepalende betekenis houden in de nationale en internationale ontwikkeling van de didactische inzichten binnen de wis-

kunde. Formele discipline bleek hierbij niet zijn eerste prioriteit, veeleer wat ik nu maar samenvat als *het operationeel leren omgaan met het kwantitatief, metrisch en meetkundig aspect van de ervaringswereld*. De uitgangspunten en doelstellingen van deze realistische school in de schoolwiskunde met betrekking tot de voortgezette basisvorming zijn alleszins helder uitgewerkt in een recente publikatie¹⁰. Deze *policy statement* roept een discussie op, die ik nu wil proberen op één punt toe te spitzen.

We bekijken daartoe het gehele wiskundige onderwijs-traject – beginnend bij het rekenonderwijs op de basisschool, zich vertakkend in de diverse opleidingsstromen in de voortgezette basisvorming, MAVO, HAVO en VWO en de diverse opleidingen in het hoger onderwijs. Door de argumenten van de realistisch wiskundigen – die het zelf ontdekkend leren mathematiseren en een contextuele ontwikkeling van de wiskunde willen bevorderen – wil ik me laten overtuigen voor het begin van dit traject. Maar op tenminste een aantal takken van de onderwijsboom moet ergens het punt liggen waarop de wiskunde als zelfstandig structuurprincipe onderscheiden gaat worden van het heuristisch en rekentechnisch hulpmiddel voor andere disciplines. Uit de genoemde publikatie is niet op te maken waar de realistische school zelf die grens zou willen leggen. Maar uit het veelvuldig gebruik van de term *gebruikerswiskunde* maak ik op dat het in deze visie consequent zou zijn dit omslagpunt bij het begin van het universitaire traject te leggen – en dan nog alleen voor de studie wiskunde. In het laatste deel van dit artikel wil ik argumenteren dat dit niet een goede keuze zou zijn.

Thematische en deductieve wiskunde

Wie is bang voor culturele inslag?

De inzet van de in de voorgaande alinea aangegeven discussie is uitdrukkelijk niet het belang van de universitaire opleidingen, zelfs niet de broodwinning van de wiskundige professie. Aan de orde is in eerste instantie een besef van de wiskunde als dragend element in onze cultuur, zoals dat bij ontwikkelde, verantwoordelijkheid dragende mensen in relevante sectoren van de samenleving aanwezig zou kunnen zijn. Laten we zo'n besef de *culturele inslag* noemen. Dan kunnen we om te beginnen constateren dat in alle schoolvakken, van de talen tot natuurkunde en economie, van oudsher de culturele inslag van de betreffende discipline mede doel was van het gegeven onderwijs – dit met uitzondering van de wiskunde. De wiskunde beoogde andere doelen: de veronderstelde opvoedende waarde van formele discipline, en haar belang voor andere wetenschappen. Als gevolg daarvan is inmiddels in het publiek besef de wiskunde bij de informatica ondergeschoven¹¹. Een eerste conclusie is dan ook onontkoombaar:

nu wiskunde op school bij ontbreken van een algemeen aanvaard vormingsideaal niet meer vanzelf spreekt,

maar ook het nuts-argument in een ander licht komt te staan, dient ook de wiskunde de culturele inslag van het eigen paradigma expliciet in haar onderwijsdoelen op te nemen.

Wie is bang voor realistische wiskunde?

Hierboven gaf ik al aan met de opvattingen van de aanhangers van de realistische wiskunde een heel eind te kunnen meekomen. Tot nu toe zijn echter in de openbare discussie de grenzen van geldigheid van de door hen gebruikte argumentatie niet aan de orde geweest. Het gaat daarbij vooral om de weging van de betekenis van de toepassingen van wiskunde ten opzichte van het eigen wiskundig paradigma. In deze discussie lijkt een keuze van het tegen het eind van het vorige deel genoemde didactische 'omslagpunt' in het onderwijs-traject een goede eerste indicatie van de standpuntbepaling.

En dus ter bepaling van de gedachten: dit punt zou in mijn opvatting gelegd moeten worden vóór het eind van het onderwijs-traject van 12-16. Dat wil zeggen dat aan het eind daarvan, althans bij een deel van die populatie, het besef van een eigen wiskundig inhoudelijk kader, niet terug te leiden op de begripsvorming in andere disciplines, aanwezig moet zijn.

Wiskunde in thematische kaders

Culturele inslag kan niet zonder het opnemen van een aantal onderwerpen uit de moderne ontwikkeling van de betreffende discipline in het schoolprogramma. Voor de wiskunde vergt dit niet minder dan een cultuuromslag. Aan de verordening (inderdaad: uit de tijd van de *Kaiser!*) dat scholen zich niet met 'hogere' wiskunde dienen op te houden is ook op de Nederlandse scholen altijd strikt de hand gehouden. Een verandering op dit punt zal op veel weerstanden stuiten, maar is onvermijdelijk – en ook heel goed mogelijk. Men spiegele zich aan de wijze, waarop het natuurkundeonderwijs bereid is om te gaan met onderwerpen als relativiteitstheorie, quantummechanica, hoge-energiefysica, enzovoort: in deze graad van 'vaagheid' is ook over de (betekenis van) wiskunde veel mee te delen. Veel bruikbaar materiaal ligt opgeslagen in Amerikaanse bronnen zoals bijvoorbeeld het boek en de videofilms *For All Practical Purposes*¹² (Garfunkel) en het werk van Morris Kline.

Men kan daarbij denken aan een verdeling van het totaal beschikbare aantal uren voor wiskunde in de toekomstige bovenbouw van het VWO (in een verhouding 4 : 1) over onderdelen Thematische Wiskunde (TW) en Wiskundig Bewijzen & Wiskundig Redeneren (waarover straks). Eerst iets over de opbouw van TW. Het bestek van elk thema kan worden aangeboden in een goed gedocumenteerde – en vooral ook aanstekelijk vertelde – presentatie van de algemene, historische en systematische aspecten van het gekozen thema: het eigen verhaal van de wiskunde. Hiervoor zou een vijfde van de beschikbare tijd kunnen worden uitgetrokken. Vaak zal hierbij aanleiding bestaan een – noodzakelijk vaag – beeld te projecteren van

geavanceerde wiskundige noties, op de manier waarop de natuurkundeleraar de 'zwarte gaten' uit de astronomie ter sprake brengt. De resterende tachtig procent van de tijd zou beschikbaar blijven voor het onderwijs in concrete wiskunde op schoolniveau – echter op zodanige wijze dat daarbij het aangegeven thema motiverend en richtinggevend werkt. Het is hierbij essentieel dat de voor elk thema beschikbare tijdspanne zo groot is, dat op het concrete niveau een herkenbaar systematische ontwikkeling (theorievorming) zichtbaar wordt.

De volgende schetsen geven voorbeelden van waaraan inhoudelijk zou kunnen worden gedacht¹³. Pas bij concrete uitwerking kan blijken hoe groot de omvang in lessen van een thema zou moeten uitvallen – de totale tijdsduur zal al gauw enkele schoolmaanden belopen. Het ideologisch zwaartepunt ligt uiteraard bij de thema's 3, 4 en 5!

De thema's beogen een beeld te projecteren dat als *Wiskunde en de ontdekking van de wereld* kan worden samengevat – waarbij ontdekking in de zin van onthulling is te verstaan.

1. *Wiskunde en de geografische wereld*. Landmeten in Sumerië en Egypte, de wiskundige kant van de ontwikkeling van de navigatie (kustvaart, kompas, astronavigatie), kaartprojecties, (de wiskunde van) moderne plaatsbepaling-systemen via satellietbakens, lasermetingen etc.
2. *De wiskunde onthult de fysische wereld*. Het modelbegrip in de natuurkunde. Ontwikkeling van de mechanica, baan, snelheid en versnelling (Galilei, Newton, Laplace), mathematische fysica in de 18e en 19e eeuw, deeltjesmodel en veldmodel. Geboorte van relativiteitstheorie en quantummechanica (steeds de wiskundige aspecten: coördinaatvrijheid, deeltje-golfdualiteit etc.). Fourier, Fourieranalyse en spectroscopie. DNA en de codering van het leven.
3. *De wiskunde ontdekt zichzelf*. De kritische periode (Kummer, Weierstrasz): convergentie, existentie, niet-euclidische meetkunde. De grondslagencrisis (Brouwer, Hilbert), de axiomatische beweging. Wiskunde over wiskunde. Wat is een wiskundig bewijs? Geschiedenis van het probleem van Fermat.
4. *Wiskunde in de twintigste eeuw: de wapens van de wiskunde*.
 - a. Wiskunde en rekenen. Ontwikkeling van het getalbegrip. Turing en zijn machine. Berekenbaarheid. P- en NP-problemen. Computational physics.
 - b. Wiskundige concepten als sleutel tot de werkelijkheid. Wat is een wiskundige structuur? Algebraïsche en topologische ruimtebegrippen. Differentiaaltheorie. Vectorvelden. Dynamische systemen, orde en chaos.
5. *Wiskunde in de twintigste eeuw: de beheersing van complexiteit*. Pascal, Jan de Wit: kansen in het spel en

bij de levensduur. De ontwikkeling van kansrekening en statistiek, de besliskunde. De handelsreiziger. Risico-analyse, gevaren van kerncentrales en van Schiphol.

Deductieve wiskunde: een heroverweging

Terecht of ten onrechte is de overwegende opinie bij de universitaire wiskundigen dat voor wiskundige bewijsvoering en wiskundig redeneren (WBWR) in het huidige schoolprogramma volstrekt onvoldoende plaats is ingeruimd. Als bijkomend stuk van overtuiging wijzen zij op de toenemende betekenis van de fundamentele notie van *programma-correctheid* in de informaticawereld. Hoe dit ook zij: voor de juiste beeldvorming van de wiskunde als wetenschap kan binnen het VWO-programma dit element onmogelijk worden gemist. Het gaat dan over de culturele inslag, dus ook over de leerlingen die niet in het β -cluster zullen doorgaan. Voor WBWR dient dan weer binnen het schoolprogramma een reservaat te worden gecreëerd, zoals 'de meetkunde' dat in vroeger dagen was, zij het niet noodzakelijk in de vroegere omvang.

Er zijn daarbij twee problemen: inhoud en vorm. Inhoudelijk moet een onderdeel WBWR in ieder geval een zodanige omvang hebben dat, uitgaand van een 'axiomatische' basis, langs deductieve weg een samenhangende theorie kan worden opgebouwd. Die moet uitlopen op een aantal 'verrassende', 'interessante', 'inhoudsrijke' stellingen – bij voorkeur ook nog met wat buiten-wiskundige toepassingen. In de praktijk zullen eisen van strikte axiomatische opbouw moeten worden afgewogen tegen de interesse van de wiskundige inhoud – waarover meer hieronder.

Op dit ogenblik is een *Studiecommissie Wiskunde B vwo* actief, die het geschikte gremium lijkt een drietal adviezen in te winnen betreffende een inhoudelijke invulling.

1. De Bruijn heeft enkele jaren geleden voorgesteld dat een stukje mathematische logica ('natuurlijke deductie met getypeerde variabelen') een geschikte invulling zou kunnen vormen. Dit laat een strikt axiomatische opbouw toe met een theorievorming die tot enkele niet-triviale stellingen voert – en opent de mogelijkheid van machinale bewijsverificatie. Het (in termen van culturele inslag zeer grote) belang van dit laatste moet worden afgewogen tegen het misschien niet opwindende karakter van de bereikte resultaten – men kan immers niet verwachten inhoudelijk erg ver te komen. Enkele personen uit de kring van de faculteit aan de Technische Universiteit Eindhoven zijn zeker bereid een beknopt advies op te stellen.
2. Aan een andere groep van deskundigen kan een schets voor een invulling met een onderwerp uit de discrete wiskunde (grafentheorie, coderingstheorie?) worden gevraagd. Dit kan leiden tot interessante resultaten met aansprekende toepassingen (CD-spelers, cryptografie) – maar ook al gauw tot echt moeilijke wiskunde.

3. Aan een aantal meetkundigen kan een schets voor een invulling met 'klassieke (ruimte)meetkunde' worden gevraagd – want wat was daar eigenlijk mee mis? Zoals vroeger zal daarbij terwille van het inhoudelijk element wellicht met 'lokale deductiviteit' moeten worden volstaan. Maar een axiomatische basis van vectormeetkunde met een inwendig produkt (H. Weyl) lijkt haalbaar.

De genoemde commissie belichaamt voldoende expertise om op grond van ontvangen adviezen een aanbeveling voor een verder ontwikkelingsscenario te kunnen doen. Nu de vorm. Men kan vermoeden dat de realistisch wiskundige school van oordeel is, dat WBWR niet aan een brede populatie van scholieren kan worden aangeboden. Dit op grond van gebrek aan interesse, dan wel bij gebrek aan receptiviteit voor abstractie van de leerling in de schoolleeftijd. Een geheel andere situatie ontstaat echter door WBWR aan te bieden uitsluitend in een geïntegreerde, interactieve computeromgeving – wat iets anders is dan de computer als rekenhulpmiddel. Dezelfde leerling accepteert in die situatie onmiddellijk dat 'de computer' zonden tegen precisie van definitie, syntax en logica niet vergeeft, en blijkt gestimuleerd te worden door het spelelement. (De transfer van het geleerde naar andere omgevingen moet daarna wel uitdrukkelijk aandacht krijgen). Het computerscherm in twee delen: een kant om symbolen en de relaties daartussen in te typen, de andere met een simultane visualisatie, zal een prototype worden voor de werkomgeving in zeer veel maatschappelijke functies. Een interactieve, systematische opbouw van de theorie tijdens het leerproces, met 'bewijzen' en 'constructies' vanuit de gegeven elementaire noties en relaties in een hiërarchie van niveaus met steeds samengestelder begrippen, lijkt binnen de huidige ontwikkeling van de programmeertheorie zeer wel binnen het bereik der mogelijkheden te liggen.

Een schets ten behoeve van de Studiecommissie van wat hier binnen het veld van mogelijkheden ligt kan (bijvoorbeeld) op korte termijn door het expertisecentrum CAN worden opgesteld.

De kosten van een dergelijk project zijn uiteraard in absolute zin enorm – echter relatief bij landelijk gebruik¹⁴ gering, en kunnen voorts door export van het gereede produkt worden gedrukt. Computers op *notebook* formaat zijn over vijf jaar voldoende goedkoop om door de leerlingen te worden aangeschaft en voldoende krachtig om een en ander te implementeren. Elk van de drie aangegeven inhouden zou goed in de geschetste informatische omgeving passen – en daarmee in een noodzakelijke radicale herwaardering van het onderwijs in de wiskunde.

Dankbetuiging

Nico Dekker, Teun Koetsier, Maarten Maurice en Jan Sanders, maar vooral Wim Groen hebben mij terzijde gestaan met discussie, informatie en kritiek.

De schrijver is hoogleraar in de toegepaste analyse aan de Vrije Universiteit te Amsterdam en voorzitter van het Curatorium van de Stichting Mathematisch Centrum. Zijn kennis van de schoolwiskunde is in hoofdzaak opgedaan als leerling van de HBS B en als vader van enkele schoolgaande kinderen. Beide ervaringen liggen alweer geruime tijd achter hem.

Noten

- [1] Hartley, L.P. *The go-between*. Londen (1953). Er is ook een fraaie verfilming door Joseph Losey.
- [2] Pyenson, L. *Neohumanism and the Persistence of Pure Mathematics in Wilhelminian Germany*. American Philosophical Society, (1983).
- [3] *Wiskunde in beweging*, Rapport van de Verkenningcommissie Wiskunde, Den Haag (1992), met name sec. 3.1.
- [4] Zij betoonden zich daarbij tevens traditionalisten. In het 18e eeuwse rationalistisch denken pasten universitaire leerboeken wiskunde met als inhoud: statica, hydrostatica, gaswetten, architectuur, ballistiek, zeevaartkunde (Pyenson, *l.c.*, p. 21).
- [5] Vertaling cf. Daniël 5, 25-28.
- [6] Freudenthal, H. *Wiskunde onderwijs anno 2000. Euclides*, 52, 290-295, (1976-77).
- [7] Reeds nu bevatten pakketten als *MAPLE* en *Mathematica* aanzienlijk meer wiskunde dan geprogrammeerd in de eerste twee jaren van de universitaire opleidingen natuurkunde, economie of werktuigbouwkunde. Het toevoegen van een vakgerichte, gebruikersvriendelijke *shell* en de *note-book computer* beneden f 500,- is een kwestie van nog enkele jaren.
- [8] Dit is terminologisch zwaar geschut, maar bijvoorbeeld Treffers' 'realistisch rekenen' (zie 10) is al een geschikte invulling. De bijdrage daarvan aan iemands redzaamheid waardeer ik aan de andere kant weer minder hoog.
- [9] Dit punt wordt verder uitgewerkt in: G.Y. Nieuwland, Het beroep van wiskundige. *Euclides*, 67, 53-57 (1992).
- [10] *Wiskunde 12-16, een boek voor docenten*. Freudenthal instituut, Utrecht, 1992.
- [11] Zie ook op dit punt het artikel onder 9.
- [12] Consortium for Mathematics and its Applications (COMAP). *For All Practical Purposes*. 3e druk, W.H. Freeman & Co (1994).
- [13] Ik heb er van moeten afzien een uitwerking van Thematische Wiskunde te schetsen binnen de door de Commissie-Ginjaar te formuleren profielen. De opzet lijkt echter goed in dit raam te passen.
- [14] Inmiddels is mij verzekerd dat mijn bange vermoeden, dat het grootste probleem zou kunnen zijn de vorming van een samenwerkingsverband van uitgevers voor dit doel, op goede gronden berust.