

Wiskunde B in de nieuwe vwo-profielen

A. van Streun

Wiskundedidactiek, RU Groningen

Probleemstelling

De geschiedenis van de leerplanontwikkeling wiskunde in de bovenbouw vwo leert ons dat de inhoud van een vak heel duidelijk moet worden afgestemd op de doelgroep. Denk maar aan het echeq van het vak wiskunde I, door de CMLW¹ indertijd bedoeld als echte B-wiskunde en in de praktijk gekozen door 70% van de leerlingenpopulatie. Het gevolg van zo'n discrepantie tussen vakinhoud en vakniveau aan de ene kant en de samenstelling van de klas aan de andere kant is een voortdurende uitholling en verschraling van de inhoud van het onderwijs. Als wiskundedocent(e) kun je ook geen ijzer met handen breken. De analyse in het huidige vak wiskunde B zit nog met de erfenis van die verschraling, terwijl het percentage leerlingen dat het vak wiskunde B op het vwo kiest (46% bij het laatste examen) veel hoger is dan het aantal leerlingen dat daadwerkelijk aan een studie in de Techniek of de Natuurwetenschappen begint.

Passend in het Nederlandse schoolsysteem met een lange algemene vorming is er in Nederland enerzijds de behoefte om het algemene peil van wiskundige kennis hoog te houden, terwijl er anderzijds valt te constateren dat het huidige aanbod aan wiskundeonderwijs niet toereikend is voor de doelgroep, die in aanmerking komt voor een pittige B-studie. Terecht wordt in het rapport *Wiskunde in beweging*² becijferd dat door het wegvallen van wiskunde II de vwo-leerlingen minder gelegenheid krijgen om zich te oriënteren op en te bekwamen in de wiskundige vaardigheden in de β -studies. De hamvraag is nu hoe er wiskundeprogramma's kunnen worden ontwikkeld die goed passen bij de doelgroep. Het gaat in dit artikel in het bijzonder om de inhoud en het niveau van de wiskunde B, die de leerlingen in het profiel Natuur en Techniek nodig hebben. Daarbij moet stevig rekening worden gehouden met de mogelijkheden en beperkingen van de nieuwe structuur van de bovenbouw vwo.

De doelgroep van wiskunde B

Veel universitaire bestuursorganen en het ministerie maken zich zorgen over de aantrekkingskracht van de β -stu-

dies en het wiskundig eindniveau van onze vwo-leerlingen. Als voorzitter van de opleidingscommissie wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen en als docent in het wiskundeonderwijs aan eerstejaars uit onze faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen deel ik die zorg, zonder dat ik eveneens de oorzaak direct zoek bij het leerplan of bij de wiskundedocenten.

Een belangrijke oorzaak lijkt mij vooral de samenstelling van de klassen, waaraan wiskundedocenten het vak wiskunde B moeten geven. De persoonlijke kwaliteiten van de instromende studenten zijn naar mijn mening wel voldoende, maar zij zijn in het vwo bij wiskunde B te weinig uitgedaagd tot zelfstandig bestuderen van wiskundige problemen en teksten. Naar mijn indruk is de uitdaging bij natuurkunde op het vwo groter, wat natuurlijk de beste β -leerlingen naar die studie trekt.

Vergelijking met andere landen

Het is de moeite waard om de situatie in Nederland te vergelijken met die in andere landen. Uit een internationaal vergelijkend onderzoek in 1980 (!) weten we dat Nederland het voor de gehele populatie (in de breedte) niet slecht doet, maar het gaat nu om de vraag welk wiskundig ingangsniveau β -studenten in de ons omringende landen hebben, als zij aan een β -studie beginnen. Het zal bekend zijn dat onze vwo-leerlingen met wiskunde B niet veel kans hebben om in België, Frankrijk, Engeland en Duitsland op het afsluitend wiskunde-examen een voldoende te halen.

Frankrijk

In elke Franse boekwinkel zijn de opgavenbundels met uitgewerkte opgaven te koop. In de ANNABAC-uitgave 1992 staat onder andere:

- de inhoud van onze analyse in wiskunde B (veel formeler en preciezer getoetst)
- verschillende typen differentiaalvergelijkingen
- complexe getallen
- twee- en driedimensionale meetkunde met vectoren
- kegelsneden en andere krommen
- rijen en reeksen met convergentie-onderzoek

Géométrie de l'espace

1. Dans l'espace, on considère une droite Δ et le demi-tour s d'axe Δ . Étant donné deux points A et C , on note B et D leurs transformés par s . On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$. On suppose que A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

a) Faire une figure.

b) Prouver que $AC = BD$ et $BC = AD$.

2. Réciproquement, soit (A, B, C, D) un tétraèdre tel que $AC = BD$ et $BC = AD$. On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

a) Montrer que:

$$BC^2 + BD^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}CD^2$$

$$AC^2 + AD^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2}CD^2$$

b) En déduire que (IJ) est orthogonale à (AB) .

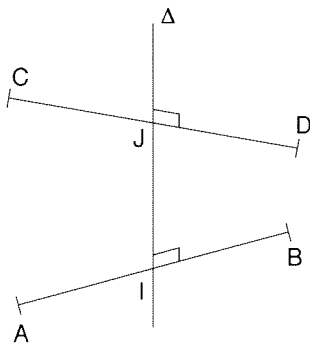
c) Prouver de même que (IJ) est orthogonale à (CD) .

d) Déterminer les images de A, B, C, D par le demi-tour s d'axe (IJ) .

Solution

1.

a) Figure



b) s est le demi-tour d'axe Δ donc s est une isométrie.

$$s(A) = B$$

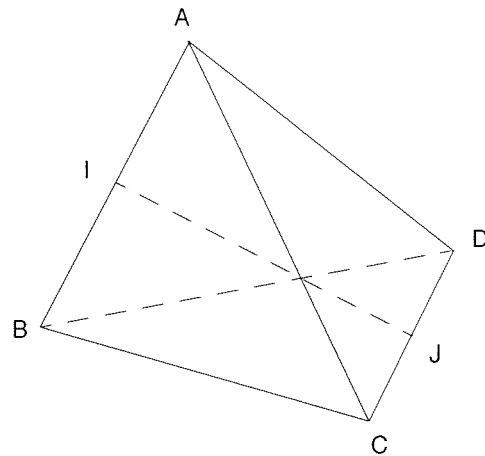
$$s(C) = D \text{ donc } AC = BD.$$

$$s(B) = A$$

$$s(D) = C \text{ donc } BD = AC.$$

2. Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que $AC = BD$ et $BC = AD$ avec I milieu de $[AB]$ et J milieu de $[CD]$.

a)



$$BC^2 + BD^2 = (\vec{BJ} + \vec{JC})^2 + (\vec{BJ} + \vec{JD})^2$$

$$BC^2 + BD^2 = 2BJ^2 + JC^2 + JD^2 + 2\vec{BJ} \cdot (\vec{JC} + \vec{JD})$$

$$\text{avec } \vec{JC} + \vec{JD} = \vec{0}$$

d'où:

$$BC^2 + BD^2 = 2BJ^2 + \left(-\frac{1}{2}\vec{CD}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\vec{CD}\right)^2$$

$$BC^2 + BD^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{4}CD^2 + \frac{1}{4}CD^2$$

$$BC^2 + BD^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}CD^2 \text{ (théorème de la médiane).}$$

Par la même méthode, l'on obtient:

$$AC^2 + AD^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2}CD^2.$$

b) Nous avons: $AC = BD$ et $BC = AD$ par hypothèse donc:

$$2BJ^2 + \frac{1}{2}CD^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2}CD^2 \text{ d'après 1.a) et } BJ = AJ.$$

Le triangle ABJ est isocèle avec I milieu de $[AB]$ donc les droites (AB) et (IJ) sont orthogonales.

c) En prenant les faces (BAC) et (BAD) du tétraèdre et en appliquant le même raisonnement que 2.a) nous obtenons:

$$AC^2 + BC^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$DA^2 + DB^2 = 2DI^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$

Comme $CA = DB$ et $BC = AD$, on a: $CI = DI$.

Le triangle ICD étant isocèle et J étant le milieu de $[CD]$, l'on déduit bien que les droites (IJ) et (CD) sont orthogonales.

d) A l'aide des résultats précédents, nous avons:

$$s(A) = B, s(C) = D$$

$$s(B) = A, s(D) = C.$$

fig. 1: Franse eindexamenopgaven

- waarschijnlijkheidsrekening (in formele verzamelingentaal).

De twee uitgewerkte opgaven 'ruimte meetkunde' in figuur 1 illustreren het Franse programma aardig.

Engeland

Het Engelse A-level bevat voor het vak wiskunde onder andere:

- analyse, vergelijkbaar met wiskunde B
- rijen, reeksen, Taylorbenadering
- statistiek en kansrekening
- natuurkundige toepassingen
- numerieke methoden, zoals de regel van Simpson
- matrixrekening in meetkundige contexten
- complexe getallen.

De twee opgaven in figuur 2 geven een indruk van het type opgaven dat voorkomt in de examens. Ze zijn afkomstig van de Oxford and Cambridge Schools Examination Board, 1993.

Speed-racing track
A toy 'speed-racing' track consists of a slope smoothly joined at A to part of a vertical circular loop of track of radius a that rests upon the ground at B (see figure).

A small toy car is released from rest at point D on the slope. Assume the motion to be modelled by a point mass sliding around a smooth track. Given that D is at height $2a$ above the ground:

- Find the speed of the car when it reaches B.
- Show that, if it is still in contact with the track at P, where $\angle COP = \theta$, then the speed v at P is given by $v^2 = 2ga(1 - \cos \theta)$. (1)
- Draw a diagram showing the forces acting on the car at P. By using the component of ' $F = ma$ ' in the radial direction, find a formula for the reaction R between the car and the track, and show that R vanishes when $\cos \theta = \frac{2}{3}$.
- With the help of equation (1), find the vertical component of the car's velocity at the point where R vanishes. Deduce that, after it has passed B, the maximum height of the car above the ground is $\frac{50}{27}a$.

fig. 2: Engelse examenopgaven

Het verschil tussen de Nederlandse situatie en die in de omringende landen heeft natuurlijk te maken met het aantal lessen en de meer abstracte inhoud van sommige leerplannen, maar ook met ons Nederlands accent op de algemene wiskundige vorming voor (bijna) iedereen. Onlangs heb ik een Russische hoogleraar wiskunde (decaan van de universiteit van Petersburg), tevens schrijver van Russische schoolboeken voor het voortgezet onderwijs, tijdens zijn bezoek aan onze didactiegroep iets laten zien van onze nieuwe programma's meetkunde in de onderbouw en bovenbouw. Zijn typerende reactie: 'Wat doen jullie voor de goede leerlingen?' Uiteraard vroeg ik onmiddellijk of het grootste deel van de Russische jeugd echt iets had aan zijn leerboek, een bewerking van de Elementen van Euclides. Er is uit ons contact geen mooie samenwerking opgebloeid. Achteraf denk ik dat wij beiden wel wat gelijk hadden. Bij de invulling van de nieuwe basisvorming wordt in de schoolboeken en het onderwijs nauwelijks systematisch werk gemaakt van de differentiatie voor goede leerlingen en in de bovenbouw vwo kennen we geen wiskundeonderwijs, gericht op de leerlingen die wel meer aan kunnen en nodig hebben in een vervolgstudie.

Kijk ik naar het universitaire onderwijs binnen onze faculteit, dan is het wel duidelijk dat de eerstejaars wiskunde, technische mechanica, informatica, natuurkunde en scheikunde veel baat zouden hebben bij een zwaardere invulling van het vak wiskunde B. Hetzelfde geldt voor de econometrie in Groningen. Voor een aantal studies moet die wiskunde B sterk gekoppeld zijn aan natuurwetenschappelijke toepassingen, bij wiskunde en informatica en deels bij natuurkunde wordt ook de meer abstracte opbouw en het leren bewijzen op prijs gesteld.

Stap ik over naar de farmacie en de biologie en neem ik de medische studies in één adem mee, dan kun je rustig stellen dat het huidige vak wiskunde B voor hun toekomstige studenten al teveel van het goede is. Aan de andere kant wordt het vak statistiek bij de meeste van de genoemde studies in arren moede maar weer vanaf het begin opgebouwd, omdat een belangrijk deel van de instroom geen wiskunde A heeft. (Met de ruimte meetkunde wordt aan de Rijksuniversiteit Groningen in geen enkele discipline direct of indirect iets gedaan.)

Het is moeilijk voorspelbaar hoe snel in de nabije toekomst het analytisch rekenwerk door de computer (Mathematica) zal worden overgenomen. Juist bij de β -disciplines waar het rekenen aan wiskundige modellen centraal staat, wordt het analytisch rekenen steeds meer vervangen door numerieke en grafische programma's. De ontwikkelingen bij het statistiekonderwijs, tegenwoordig bij de universiteiten voor een groot deel gegeven door niet-wiskundigen aan de hand van computerprogramma's, staan daarbij model voor de te verwachten gang van zaken bij de analyse, tenzij de wiskundigen zelf het initiatief nemen voor een verantwoorde inzet van dat type computerprogramma's.

De profielen en wiskunde B

Zoals bijna altijd in het recente verleden (1968 Mammoetwet, 1993 Basisvorming) zal ook deze keer een forse wijziging in het leerplan wiskunde in de pas moeten lopen met een reorganisatie van het voortgezet onderwijs. Gezien de relatief positieve ontvangst van de plannen voor het instellen van vier profielen in de bovenbouw HAVO-VWO in de politiek en bij de bestuurders in het onderwijs lijkt het realistisch om de plannen voor wiskunde B in het VWO daarbij aan te passen.

Twee hoofdpunten licht ik er uit. Het is de bedoeling om veel meer dan tot nu toe de leerlingen te stimuleren tot het zelfstandig studeren en het leren dragen van verantwoordelijkheid voor de eigen inspanning. De vakken en de leerstof worden daarom niet meer geformuleerd in lessen per week, maar in uren studielast. Los van periodes voor schoolonderzoeken en centrale examens is de vereiste inspanning van de leerlingen geschat op 1520 uur per jaar, of 4550 uur in de leerjaren 4, 5 en 6 VWO. In principe moet het mogelijk worden om een vak of onderdeel van een vak elk half jaar af te sluiten met een schoolonderzoek of een centraal examen. Een opzet van een studie, zoals die in het hoger onderwijs regel is.

Alle VWO-leerlingen bestuderen de vakken en deelvakken uit een gemeenschappelijk deel, dat een studielast heeft van 2100 uur. Daarin zit een wiskundevak met een studielast van 300 uur. Dat vak noem ik in het vervolg de Algemene Wiskunde, af te korten met AW. Daarnaast moeten de leerlingen tenminste één van de volgende vier profielverplichte delen (1450 uur studielast) met vakken en deelvakken kiezen.

Cultuur en Maatschappij – met wiskundige elementen in de algemene economie

Natuur en Gezondheid – met een extra vak wiskunde (NGW, studielast 300 uur)

Economie en Maatschappij – met een extra vak wiskunde (EMW, studielast 300 uur)

Natuur en Techniek – met een extra vak wiskunde (NTW, studielast 400 uur)

Over de invulling van die vakken worden geen harde uitspraken gedaan, zodat het in principe mogelijk is dat er vier gescheiden vakken wiskunde, namelijk AW (Algemene Wiskunde voor iedereen), NGW (wiskunde voor Natuur en Gezondheid), EMW (wiskunde voor Economie en Maatschappij) en NTW (wiskunde voor Natuur en Techniek) worden ontwikkeld en aangeboden. Deze mogelijkheid staat evenwel op gespannen voet met de wens dat leerlingen door middel van hun vrij te kiezen vakken of deelvakken (studielast 1000 uur) op eenvoudige wijze twee profielen zouden moeten kunnen combineren. Daarnaast lijkt het aanbieden van vier verschillende vakken in strijd met de wens om veel vakken goed op elkaar af te stemmen en is het inhoudelijk niet goed te beargumenteren, dat die vier profielgroepen inderdaad volledig verschillende wiskunde nodig hebben.

Modulen en keuzevakken

In dit artikel beperk ik mij tot de gevolgen voor de wiskunde in Natuur en Techniek, NTW. Een studielast van 400 uur komt ongeveer overeen met de vier lessen wiskunde B in 5 en 6 vwo. Het is wenselijk dat in de algemene wiskunde in 4 vwo een stevige afronding van de functioneel uit de onderbouw en een begripsmatige opbouw van de differentiaalrekening wordt opgenomen, anders krijgen we te maken met een forse beperking van het vak wiskunde B. Het is naar mijn mening moeilijk te verdedigen dat de huidige inhoud van 4 vwo (voornamelijk analyse) de aangewezen invulling is voor de Algemene Wiskunde voor iedereen. De totale omvang in studielast van wiskunde B zal daarom zeker geringer zijn dan in de huidige situatie. Dat is een slecht uitgangspunt voor het opkrikken van dat vak.

Kijken we naar de omvang van NGW (de wiskunde in het profiel Natuur en Gezondheid) dan zien we daar in het rapport van de stuurgroep een 300 uur studielast staan. Als dat een deel van het grotere vak NTW (400 uur studielast) zou worden, dan lijkt mij dat heel ongunstig voor het niveau van de wiskunde in Natuur en Techniek. In dat geval zal driekwart van het onderwijs in wiskunde B moeten worden gegeven aan een brede doelgroep en niet aan de doelgroep, die een vervolgstudie in de β -disciplines ambieert. Ruw geschat kom ik op zo'n 60% van de leerlingenpopulatie die dan het deelvak wiskunde NGW gaat volgen, namelijk de 46% van de populatie die nu al wiskunde B kiest en nog een 14% die een medische of biologische studie ambieert en nu nog wiskunde A kiest. Net als na 1968 bij het vak wiskunde I kunnen we dan voorspellen dat het streven om van wiskunde B een echt B-vak te maken, passend in het profiel Natuur en Techniek, niets terecht zal komen. Ook al ontwerpt de commissie wiskunde B daar nog zo'n mooi B-programma voor, de discrepantie tussen die inhoud en de doelgroep waaraan het vak moet worden onderwezen zorgt wel voor verschraling en aanpassing van het niveau bij de brede samenstelling van de klas.

Gelukkig is er een andere mogelijkheid, want de term deelvak is in het rapport niet scherp gedefinieerd. De invulling van NGW (de wiskunde in Natuur en Gezondheid) ligt nog open, zonder dat het waarschijnlijk is dat er een geheel apart vak kan worden gecreëerd. Gecombineerd met de mogelijkheid om vakken en deelvakken per half jaar af te sluiten met een schoolonderzoek of een centraal examen ligt de opsplitsing van de vakken en deelvakken in modules van bijvoorbeeld honderd uur studielast (nu ongeveer twee lessen per week in een heel jaar of vier lessen per week in een half jaar) voor de hand.

Het profiel Natuur en Techniek

Een interessante opbouw voor de leerlingen die in het profiel Natuur en Techniek wiskunde B bestuderen wordt dan bijvoorbeeld:

4 vwo eerste helft

1 moduul Algemene Wiskunde, voor alle leerlingen.
Afronden functies, beginselen differentiëren.

4 vwo tweede helft

1 moduul Algemene Wiskunde, voor alle leerlingen.
Informatieverwerking en statistiek.

1 moduul Toegepaste Analyse voor de profielen EM/NG/NT. Deze module vormt de kern van de toegepaste analyse in wiskunde A.

5 vwo eerste helft

1 moduul Algemene Wiskunde, voor alle leerlingen.
Redeneren met gegevens, gecijferdheid.

1 moduul Voortgezette Analyse voor de profielen NG/NT. Analooq de kern van de Analyse in vwo B.

5 vwo tweede helft

1 moduul wiskunde, alleen voor het profiel NT.
Nader in te vullen.

6 vwo eerste helft

1 moduul wiskunde, alleen voor het profiel NT.
Nader in te vullen.

Het onderwijs in wiskunde B en de inhoud en het niveau van wiskunde B in het profiel Natuur en Techniek kan op deze manier gedurende de helft van de beschikbare tijd inderdaad aan die doelgroep worden gegeven, waar het voor bestemd is. Het derde moduul van de leerlingen uit het profiel Natuur en Gezondheid kan samenvallen met een moduul Discrete Wiskunde (grafien, matrices, kans) uit de wiskunde in het profiel Economie en Maatschappij. De leerlingen uit dat laatstgenoemde profiel hebben in deze opzet ook nog een moduul Statistiek te bestuderen, naast de modulen Toegepaste Analyse en Discrete Wiskunde. Combinaties van profielen zijn wat de wiskunde betreft nu ook goed mogelijk.

Conform het rapport hebben de leerlingen duizend uur studielast vrije ruimte, waarin zij profielen kunnen combineren, maar ook andere deelvakken of modulen kunnen kiezen. Dat opent mooie perspectieven voor keuze-modulen in de wiskunde, die natuurlijk eerst moeten worden ontwikkeld. Ook is het bijvoorbeeld mogelijk om voor studiepunten cursussen buiten de school te volgen of stages. Daarbij kun je bijvoorbeeld denken aan trainingsbijeekkomsten voor olympiades A en B of aan cursussen, georganiseerd door een vakgroep wiskunde. In dit verband zijn er inspirerende mogelijkheden genoeg om leerlingen buiten het verplichte minimumprogramma aan echte wiskundige activiteiten te laten deelnemen.

In de overwegingen van de stuurgroep om twee profielen met β -vakken te ontwerpen, heeft de angst voor een te geringe deelname van meisjes in de B-richting zwaar meegewogen. Gezien onze ervaringen met wiskunde A en B lijkt mij dat niet onterecht. De geschetste opbouw met modulen (ook voor natuurkunde en scheikunde om dezelfde redenen gewenst) maakt een veel geleidelijker verloopend keuzeproces mogelijk.

Doe eerst maar de gemeenschappelijke wiskunde, natuurkunde en scheikunde uit de profielen NG en NT,

daarna maar eens verder zien, hoor ik mij als schooldecaan al adviseren. Kiezen op basis van relevante ervaringen wordt dan beter mogelijk.

Contexten in wiskunde B

In de enquêtes over wiskunde B en de discussie over de inhoud komen duidelijke verschillen van inzicht over de wenselijke rol van contexten naar voren. Veel wiskundeleraars willen de boot van de contexten kennelijk wat afhouden, denkend aan hun ervaringen met wiskunde A. Het valt niet te ontkennen dat bij wiskunde A in de schoolboeken en op examens veel kunstmatige en slecht werkende contexten voorkomen, die echte toepassingen noch goede denkmodellen zijn en ook niet tot goede wiskundige activiteiten leiden.

Maar er zijn ook veel positieve voorbeelden te vinden. Contexten die wel tot een beter begrip leiden en contexten die wel reële toepassingen zijn. Waar het om gaat is of we de wiskunde in het voortgezet onderwijs nog met redelijkheid mogen onderwijzen zonder de relatie met het gebruik van die wiskunde te leggen. We leiden immers geen zuiver wiskundigen op en zelfs die krijgen in hun WO-studie met allerlei toepassingen te maken. Eminente wiskundigen als Morris Kline ('Geen wiskunde onderwijzen zonder de betekenis in reële situaties mee te nemen') en Polya ('Het belangrijkste is het leren maken van wiskundige modellen bij echte situaties') spraken zich daar al ver voor de komst van ons vak wiskunde A over uit. De dominante plaats van de wiskunde in tal van opleidingen heeft rechtstreeks te maken met die toegepaste waarde van het vak.

Een ander doorslaggevend argument is dat de wiskunde die kaal wordt onderwezen, dus zonder een directe koppeling met zinvolle betekenissen in contexten, zodanig geïsoleerd in het lange termijn geheugen wordt opgeslagen, dat de wendbaarheid en toepasbaarheid van die kennis gering is. Bij de eerste vorming van begrippen, zoals het begrip afgeleide in 4 vwo, is een directe koppeling aan contexten die als denkmodellen kunnen dienen, onmisbaar voor de wendbaarheid van die begrippen. We kennen allemaal uit ervaring of uit onderzoek de mislukkingen van het type onderwijs, waarbij de toepassingen voor het eerst in de laatste paragraaf opduiken. Voor-doen, nadoen, oefenen helpt dan ook niet meer.

Nu weer terug naar de plaats van contexten in wiskunde B. In de geschetste opzet zitten de basisbegrippen van de analyse in het eerste moduul van de Algemene Wiskunde en in het moduul Toegepaste Analyse, dat voorkomt in de drie profielen EM, NG en NT. De contexten tijdens de begripsvorming en de wendbaarheid van de analyse in de algemene contexten is daarmee wel verzorgd. Enig onderhoudswerk in de volgende modulen, als daar nog analyse in voorkomt, is voldoende om ook op het centraal

Raindrops



Rain is formed by condensation of water vapour some distance above the ground to form clouds, where droplets aggregate to make drops of sufficient size to fall. These drops increase in size as they pass through the cloud and eventually reach the ground after suffering more or less from evaporation as they fall through clear air.

Our weather being what it is, we have an infinite variety of kinds of rain. The clouds may be turbulent, with strong upwards currents within them, or they may be in a fairly steady state. They may be quite high or they may extend to the ground – especially if you happen to be on a hill. After they have formed, the raindrops may fall through still air or be driven by the wind. The air may be warm or cold, humid or dry. Because of all these variables we experience every sort of rain from fine drizzle to giant thunderstorm drops, coming at us with a wide range of speeds and inclinations.

As a first effort at modelling a particular sort of rain, suppose that there is a horizontal layer of cloud of uniform depth d , whose base is at height h above horizontal ground (see figure). Conditions everywhere are calm, with no strong currents. Suppose that rain forms in the upper cloud, starting to fall as very small drops. Suppose that these increase in size as they pass through the cloud. Finally, suppose that these drops suffer no loss by evaporation as they fall through the clear air.

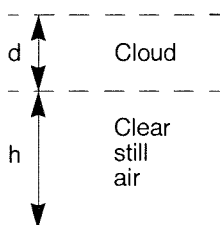


fig. 3: Modelvorming van vallende regendruppels

Uit: *Realistic Applications in Mechanics*, Oxford University Press, van de Engelse Spode-group.

Problems

1. Suppose that the rate of increase of mass of a drop as it falls through the cloud is proportional to the product of its surface area and its velocity. Show that its radius increases linearly with the distance it has fallen.
2. In its fall through the cloud, suppose that the drop is subject to a resistance proportional to the product of its surface area and its velocity. Show that if s is the distance fallen and v the velocity, then

$$v \frac{dv}{ds} = g - \frac{cv}{s} - \frac{3v^2}{s}$$

where c is a constant.

3. Assuming c to be very small (so that the inconvenient term $\frac{cv}{s}$ may be ignored!) show that after a long fall through the cloud the acceleration of a drop would tend to $\frac{g}{7}$.
4. If the velocity of the raindrops on leaving the cloud is u and they are subject to a resistance Kv^2 per unit mass when their velocity is v , find with what velocity they reach the ground.

Suggested solution of problem 1

1. When the radius of the drop is r , assuming it to be spherical, its mass is Ar^3 ($A = 4/3\pi\rho$, where ρ is the density), and its surface area is $4\pi r^2$. Hence, from the given proportionality,

$$\frac{d}{dt}(Ar^3) = B \cdot 4\pi r^2 v$$

where B is a constant.

Now $v = \frac{ds}{dt}$, so

$$3Ar^2 \frac{dr}{dt} = 4B\pi r^2 \frac{ds}{dt}$$

Thus

$$\frac{dr}{dt} = m \frac{ds}{dt}$$

where $m = \frac{4\pi B}{3A}$ is a constant,

$$r = ms + c$$

and, by selecting a suitable origin, the constant c may be made zero. In our case, $c = 0$ since we have assumed negligible radius at the start of the fall from the top of the cloud.

examen nu en dan een toepassing als in HAVO B te kunnen maken. Het echte toepassen in natuurwetenschappelijke contexten hebben we daarmee nog niet gehad. Daarover nu meer.

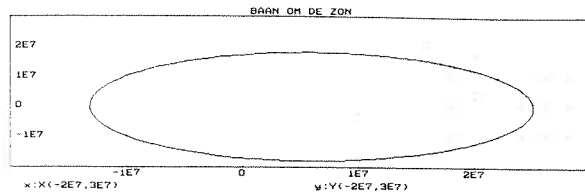
Natuurwetenschappelijke modellen

Voor het eerst sinds de invoering van de mammoetwet kunnen we in het profiel Natuur en Techniek bij de laatste twee modules ervan uitgaan dat alle leerlingen ook natuurkunde hebben bestudeerd. Is er niet alles voor te zeggen om juist de analyse toe te spitsen op natuurkundige toepassingen of om bijvoorbeeld de ontwikkeling van de integraalrekening aan de natuurkundige probleemstellingen te koppelen? En past het niet heel mooi in dit profiel om een keuzemodul aan te bieden, waarin wiskunde en natuurkunde een gelijke inbreng hebben?

De inhoud van het Engelse A-level is wat dit betreft illustratief. Een achttal modules (analyse, kansrekening, natuurkundige toepassingen) is voor iedereen in de B-hoek verplicht, terwijl additioneel een tweetal modules uit een flink aanbod moet worden gekozen. Een verplicht wiskundemodul heet 'Newton's Laws of motion' met Galileo, bewegingswetten in de kinematica, snelheidsvectoren, botsingswetten, en de drie wetten van Newton. Keuzemodules voor wiskunde gaan over modelleren met krachten en snelheden en cirkelbewegingen. Een ander onderwerp om serieus in wiskunde B te werken aan modelvorming is natuurlijk de differentiaalvergelijking, het gereedschap bij uitstek voor wiskundige modelvorming.

Het onbevredigende bij veel wiskundige modellen in het huidige wiskunde A is het ad hoc verschijnen van de formules, die een verschijnsel beschrijven. In het eerste trimester van bijvoorbeeld de scheikundestudie aan de Rijksuniversiteit Groningen kwam in het wiskundeboek, waaruit ik de colleges gaf, het maken van die modellen op basis van differentiaalvergelijkingen naar voren. Het leerboek: Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, begint met differentiaalvergelijkingen en geeft voorbeelden, bij ons deels bekend als gepostuleerde modellen uit wiskunde A, zoals het radio-actiefverval, de exponentiële bevolkingsgroei (Malthus, logistische groei), vallende lichamen, de koelwet van Newton, de wet van Torricelli, de parachutist, het prooi-roofdiermodel, elektrische circuits, enzovoort.

Figuur 3 op de pagina hiernaast is een voorbeeld van modelvorming rond vallende waterdruppels, afkomstig van de Engelse Spode-group. Een prachtig B-onderwerp, waarbij ook computerprogramma's voor het tekenen van oplossingen van differentiaalvergelijkingen kunnen worden ingezet. Voor het zelf leren opstellen en bijstellen van modellen is een bewerking van het programma VU-dynamo goed te gebruiken. Dat past volgens mij inhoudelijk veel beter bij zo'n echt B-onderwerp dan bij het huidige wiskunde A.



```
Berekening van de baan van een lichaam om de zon
l x=x+vx*dt
l y=y+vy*dt
a r=sqrt(x^2+y^2)
a f=-g*m1*m2/(r*r)
a fx=f*x/r
a fy=f*y/r
l vx=vx+fx*dt/m2
l vy=vy+fy*dt/m2
c m1=6.6e24
c m2=100
c g=6.7e-11
n x = 2.5 E 7
n y = 0
n vx= 0
n vy= 3500
spec dt=300/eindtijd=30000/cont
xyplot x,y(-2e7,3e7,-2e7,3e7) "baan om de zon"
```

fig. 4: Voorbeeld van een wiskundig model in VU-dynamo

Van exploreren naar bewijzen

Het bewijzen van eigenschappen en stellingen vormt met het logisch ordenen van een deelgebied door middel van axioma's, definities en stellingen het sluitstuk van de ontwikkeling van een stuk wiskunde. Wiskundige activiteiten omvatten de gehele breedte van het onderzoeken en exploreren van een nieuw gebied, het inductief conclusies trekken, het generaliseren, classificeren en abstraheren, het plausibel redeneren, het formuleren van modelveronderstellingen, het uitproberen van wiskundige modellen tot het ordenen van een geheel aan begrippen en stellingen. Tussen logisch redeneren (bijvoorbeeld in een context) en bewijzen ligt een gradueel verschil. Bewijzen in de wiskunde is logisch redeneren op basis van duidelijke wiskundige definities en eigenschappen. In het Nederlandse wiskundeonderwijs ontbreekt het sluitende systeem waarbinnen logisch kan worden gereedeneerd. Bewijzen in het wiskundeonderwijs heeft daarom altijd een sterk lokaal karakter. We accepteren de volgende eigenschappen en definities en beredeneren op die basis of een bepaalde conclusie of stelling vast staat. Aan het eigenlijke bewijs gaat een fase van exploreren of inductief redeneren vooraf, waarna de vermoedelijke eigenschap wordt geformuleerd en door een sluitende redenering vastgesteld.

In wiskunde B is zeker plaats voor een modul waarin de gehele route van exploreren, vermoedens formuleren en vaststellen door middel van een logische redenering wordt afgelegd. Je kunt daarbij denken aan een losse verzameling geschikte onderwerpen uit de meetkunde, de getaltheorie, discrete wiskunde, enzovoort. Een aantal jaren geleden heb ik zo'n cursus voor eerstejaars studenten bezocht aan de universiteit van Berkeley, gegeven door Alan Schoenfeld. Hier en daar experimenteert men

in Nederland aan enkele universiteiten en hogescholen met een cursus bewijzen.

Persoonlijk denk ik dat de klassieke vlakke meetkunde het aangewezen onderwerp is om het gehele proces van exploreren naar bewijzen goed uit de verf te laten komen in een moduul van wiskunde B. Het exploreren kan heel mooi en krachtig met meetkundeprogramma's als GEOM, Geometrucs Supposer en vooral Cabri³. Na het formuleren van de vermoedelijke stelling kan op basis van aangenomen eigenschappen een logisch sluitend bewijs worden gegeven. Leerlingen kunnen zelfstandig exploreren, eigen stellingen vinden en samen met de groep de vereisten voor het bewijzen aanscherpen, totdat iedereen de gegeven redenering sluitend vindt.

Conclusies

Mijn uitgangspunt is geweest dat het geen zin heeft om over een nieuw programma wiskunde B te praten, als niet tegelijk bekeken wordt welke leerlingen dat vak moeten bestuderen. Bovendien interfereren in de nieuwe bovenbouw VWO met de profielen alle wiskundevakken (AW, EMW, NGW en NTW) in hoge mate. De enige goede oplossing die ik kan vinden voor een goede afstemming tussen de doelgroep en de vakinhoud en het vakniveau ligt in het ontwerpen van studie-eenheden of modulen van bijvoorbeeld honderd of vijftig uur studielast. Vakken, deelvakken en modulen kunnen in dat geval elk half jaar worden afgesloten, zodat er een soort dossierdiploma

ontstaat.

In dit artikel heb ik me beperkt tot het aanduiden van twee modulen voor wiskunde B, namelijk *Modelvorming met behulp van differentiaalvergelijkingen* (prima voor alle aanstaande studenten in de techniek of de natuurwetenschappen) en *Van exploreren naar bewijzen*, een moduul dat voor wiskundigen weinig toelichting vereist. Het hele proces van exploreren naar bewijzen is het thema voor de komende jaarvergadering op 12 november a.s. van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars.

Noten

- [1] Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, van 1961 tot 1976.
- [2] Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen. *Wiskunde in beweging. Rapport van de Verkenningcommissie Wiskunde*. SDU, Den Haag, februari 1992.
- [3] GEOM is shareware, zie het artikel: Jie-A-Joen, H., H. J. Smid en A. Verwey (1993). Het public domain-programma GEOM. *Euclides* 69 (2), 50-54.
Geometrucs is van Visiria, Herman de Man Park 4, 3411 ZP Lopik.
Cabri komt uit Frankrijk, Laboratoire LSD2 IMAG, TOUR IRMA BP 53X, 38041 Grenoble cedex, France.
Geometric superSupposer, WINGS 1600 Green Hills Road, P.O. Box 660002, Scotts Valley CA 95067-0002.

De moeilijkste opgave?

DE MOEILIKSTE OPGAVE

Het wiskunde B-examen voor de vwo'ers eindigde met een haast onmogelijke opgave:



In figuur 3 zijn gedeelten van de grafieken getekend van de functies:

$$f: x \rightarrow 2 \cos^2 x \quad \text{en} \quad g: x \rightarrow 1 + \sin 2x$$

Er bestaat een $p \in [0, \pi]$ met de eigenschap dat de functie

$$h_p: x \rightarrow f(x+p) + g(x) \text{ een constante functie is.}$$

Onderzoek voor welke waarde van p dit geldt en bewijs de juistheid van je antwoord.

Aldus de Volkskrant van 31 mei in de dagelijkse rubriek over de eindexamens. Een 'haast onmogelijke opgave'. Vermoedelijk opgetekend uit de mond van gedesillusioneerde kandidaten, zo van: "die goniosom was echt niet te doen". De leraar van de betreffende leerlingen was namelijk behoorlijk mild in zijn oordeel, al voorspelde hij ook dat de vierde opgave 'echt wat lastiger' zou zijn. Wanneer zou je een opgave 'haast onmogelijk' noemen?

We denken als het een som is die slechts voor één, nauwelijks te vinden, gat te vangen is.

Het gekke is dat in de wandelgangen van het Freudenthal instituut de som juist als aardig werd beoordeeld en nogal 'mogelijk', in die zin dat er verschillende oplossingswegen lijken te zijn. Zijn wij nu zo wereldvreemd?

Het leek ons hoe dan ook een aardig idee om onze lezers (en vooral de leraren onder hen) te polsen over deze opgave.

- Vindt u dit een geschikte examenopgave of juist niet en waarom?
- Ziet u verschillende oplossingsmogelijkheden en zo ja welke?
- Hebben uw leerlingen originele oplossingen bedacht?

Deze en andere vragen kunnen u wellicht inspireren tot het inzenden van een notitie.

In een volgend nummer zullen de in onze ogen meest interessante bijdragen worden gepubliceerd en wie weet komt er zo een goede discussie op gang over de wiskunde B-analyse en de manier waarop die getoetst kan worden.