$x^2 \frac{dy}{dx} = xy - y \quad (x>0)$
$\int_2^3 \left(x - 2 + \frac{3}{x-1}\right) dx$
x^t
$x, y, \quad a \times b \quad a, b, c+d$
$\frac{p-q}{p^2-q^2} \quad -a^2+2ab-b^2$
$x^2-4=0$
$(A,b)(B,a) \quad 5\frac{1}{3}$
$\frac{15}{7}, \frac{13}{7}, \frac{28}{15}$
$x \rightarrow 2x+4$
$b+2=8$

The Spiral Staircase

J. Winkel
Canisiuscollege-Mater Dei, Nijmegen

Onze VWO-analyse is een ingewikkelde spiraal. Aan de basis staan getallen, waarop we een eerste draai hebben gewrocht met eenvoudige rekentechniekjes, een tweede met functies en limieten, en een derde met differentiëren en integreren. Maar we zijn misschien iets te ver doorgedraaid. We hebben de spiraal uitgebreid met krommen en differentiaalvergelijkingen, erop vertrouwend dat onze slachtoffertjes samen met ons mee hebben gedraaid.

Helaas is dit niet altijd het geval. De leerlingen, althans 90% van hen, zijn al een tikkeltje duizelig als de eerste differentiaalvergelijkingen aan hun ogen voorbij trekken. Hun bereidheid om desondanks de brij van *dx-dy*-formalismen te consumeren, is ontroerend. Ze zijn zelfs bereid een eindexamenopgave hierover tot een goed einde te brengen, uiteraard onder de stringente voorwaarde dat die opgave een redelijk getrouwe kopie is van een eerder verteerde consumptie. Maar ze begrijpen er niet veel van. Twee maanden later zijn ze gelukkig weer vergeten wat zich bovenaan de wenteltrap heeft afgespeeld.

Halverwege de trap zijn de problemen ontstaan. We wilden onze leerlingen alle details van de wenteltrap-constructie laten kennen. Dat bleek een kansloze affaire: pogingen om een verteerbaar bewijs van de kettingregel op te dienen duwden hen over de leuning in het diepe en veroorzaakten een definitieve wiskunde-haat. En, wat nog veel erger is, we hebben de Leibniz-delicatessen verwerkt in een smakeloze stamppot van begrippen: ophefbare discontinuïteiten, continu-makende waarden, linksdifferentieerbaarheid. In onze machteloosheid dit soort onzin over te brengen, hebben we ons verlaagd tot zo correct mogelijke zwam-teksten in onze leerboekjes. Teksten, die de keuze tussen huiswerk en kattekwaad wel héél eenvoudig hebben gemaakt.

Zou het niet zinvoller zijn, onze leerlingen een toeristische en leerzame rondleiding op de wenteltrap te geven, met welgekozen versnaperingen, waarbij we een bewijs alleen presenteren als dit nuttig en smakelijk is? Een goede gids vertelt niet alles. Maar wat hij vertelt is boeiend en inspirerend. En hij maakt nieuwsgierig, onder verwijzing naar de universiteit: "Wie wil weten waarom je die oppervlakte kunt uitrekenen via primitivering, moet wiskunde gaan studeren".

Verder moeten we de basis verbreden. Bijvoorbeeld met 'booleans' (TRUE en FALSE, of hoe ze ook mogen heten). Waarom leren we op jonge leeftijd wel rekenen met getallen, maar niet met booleans? Bewerkingen op booleans ('en', 'of', 'als ... dan', 'niet') zijn minstens even fundamenteel als bewerkingen op getallen. Zeker in een tijd, waarin ieder kind een PC heeft en wel eens een database-programma voor de administratie van zijn suikerzakjes wil schrijven.

'Logica' zou niet verder hoeven te gaan dan enkele logische wetten, zoals: $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$. Een dergelijk onderdeel voldoet aan alle eisen om tot VWO-wiskunde te worden verheven: fundamenteel, leuk en nuttig. En onmisbaar voor het structureren van redeneringen en bewijzen. Dit is niet alleen van belang voor toekomstige β-studenten, maar ook voor paters, psychiaters en politici. Om hun theorieën van kop en staart te voorzien.
Een tweede noodzakelijke basisverbreding is de invoering van begrippen als 'rijtje', 'verzameling' en 'functie'. Een functie is nu voor de meeste leerlingen zoiets als sinus en cosinus, maar aan de basis hiervan behoort een algemeen begrip 'functie van A naar B' te liggen, met vooral veel eindige voorbeelden.

Mijn voorstel is dus de analyse-wenteltrap (en de eveneens doorgedraaide meetkunde-wenteltrap) van zijn bovenste draai te ontdoen. En de vrijgekomen ruimte te benutten met een uitbreiding van de basis, die plaatsvindt in een nieuw VWO-onderdeel Discrete Wiskunde, een trapje met acht treetjes:

1. *logica*: uitspraakrekening met voegtekens en waarheidstabellen
2. *verzamelingen*: doorsnijding en dergelijke, met vooral eindige voorbeelden
3. *predikaten*: quantificatie over (vooral eindige) verzamelingen

4. *relaties*: vooral tussen eindige verzamelingen; tabellen
5. *functies*: met eventueel begrippen als injectief en inverse
6. *telprincipe*: eenvoudige telprincipes zoals somregel en produktregel
7. *n over k:* de Driehoek van Pascal met zijn diverse interpretaties
8. *kansrekening*: uitsluitend in eindige kansruimten.

De ruimte, nodig voor discrete wiskunde, komt vrij door:
- inkrimping van meetkunde met 35%
- inkrimping van analyse met 35%.

Voor de meetkunde stel ik voor:
- *analytische meetkunde*: meetkundige definities en vergelijkingen van lijnen, cirkels, parabolen, hyperbolen, ellipsen, vlakken, bollen
- *vectormeetkunde*: parametervoorstellingen van lijnen en vlakken in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$; inprodukt en norm, met toepassingen als projectie, hoek, afstand
- *ruimtemeetkunde*: eenvoudige eigenschappen van kubussen, piramides en dergelijke
- het tekenen van doorsneden en projecties vervalt. Dit is voor 90% van de leerlingen een zinloos struikelblok.

Mijn voorstel voor de analyse:
- *uitbreiding van* $\mathbb{R}$ *met* ∞ *en* $-\infty$ (dit is een kwestie van smaak).
- *reële functies*: hier wordt voor het eerst kennis gemaakt met enkele functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Men kende al $\sqrt{3}$, en wist al dat $\sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$ voor alle $x \in [0,\rightarrow\rangle$, maar pas hier wordt $x \rightarrow \sqrt{x}$ als functie geïntroduceerd; functies als cos, arctan en exp worden hier of later geïntroduceerd.
- *limieten*: geen exacte $\forall_{\epsilon > 0} \exists \ldots$ -definities, maar introductie via voorbeelden. De nadruk ligt op het berekenen met behulp van intuïtie, rekenmachine en enkele trucs; het begrip asymptoot wordt meetkundig geïntroduceerd, eveneens via voorbeelden.
- *continuïteit*: een exacte definitie van dit begrip is niet haalbaar; wel zouden we 'f is continu' onexact meetkundig kunnen definiëren. Dit is echter nutteloos en oninteressant, omdat we ons toch voornamelijk beperken tot continue functies. Conclusie: we slaan continuïteit over.
- *differentiëren*: de rekenregels voor differentiëren worden zonder bewijs verteld en geoefend. Het woord 'differentieerbaar' wordt hierbij angstvallig vermeden (reden: zie continuïteit). Er wordt verband gelegd met aspecten als helling, hol en maximum.
- *integreren*: rekentechnieken en oppervlakte-interpretatie. Specialiteiten als 'omwentelingslichamen' zijn overbodig.
- *krommen*: vervalt.
- *differentiaalvergelijkingen*: vervalt.

Ik ben ervan overtuigd dat Wiskunde B op deze wijze zijn saaie imago (en zijn schijnexactheid) zal verliezen, en door veel meer leerlingen als zeer boeiend ervaren zal worden.

Jos Winkel heeft wiskunde gestudeerd aan de Katholieke Universiteit te Nijmegen en is als wiskundedocent verbonden aan het Canisiuscollege-Mater Dei te Nijmegen. De illustratie is getekend door Hans Meijs, tekendocent aan dezelfde school.