

# Wiskundeonderwijs in de basisvorming

**W.M. Dienske**

Hogeschool Holland, Diemen

In het voorwoord van *Begrip en inzicht*, het werkboek van de wiskundendidactiek door P.M. van Hiele, schreef Freudenthal:

Wat moet een didactisch practicus theoretisch leren? Ik dacht: vooral hetgeen hem in staat stelt om leerprocessen bij anderen en zichzelf te observeren en te analyseren.

Hij zou het weer hebben kunnen schrijven in het voorwoord van *Wiskundeonderwijs in de basisvorming, een didactische ruggesteun voor wiskundeleraars* door B. Lagerwerf. Het boek doet veel moeite om te laten zien welke denkprocessen in de leerstof van het nieuwe wiskundeprogramma schuilten en welke eisen dat stelt aan leraren en leerlingen.

## Voorbeeld

Lagerwerf begint met een kenmerkend voorbeeld uit de kijkmeetkunde. Een ik-figuur ziet in de verte twee bouwkransen en vraagt zich af welke het dichtst bij staat. Dat lost hij op door heen en weer te lopen en vast te stellen welke kraan het snelst meeschuift. Daarna maakt hij een tekening met punten, kijklijnen en hoeken, waardoor onmiddellijk duidelijk wordt dat deze aanpak gerechtvaardigd is.

Ten slotte formuleert hij een algemene stelling.

Deze context geeft Lagerwerf niet in de vorm van een schoolboekvraagstuk, maar in de vorm van een denkproces dat duidelijk herkenbare stappen bevat.

Eerst is er een probleem in de aanschouwelijke werkelijkheid: welke kraan staat het dichtst bij. Dan is er een beeld op grond van vroegere ervaringen: als je loopt, verschuiven voorwerpen. Dat wordt samengevat tot een schema: wat het dichtst bij is, beweegt het snelst mee. Daarvan kun je een meetkundige stelling maken, al dan niet met bewijs.

Aanvankelijk verschilt het voorbeeld niet van alledaags denken over niet-wiskundige vragen. Pas de manier van schematiseren, door te letten op hoeken tussen kijklijnen, maakt het tot meetkunde. Het eerste deel van het boek gaat vooral over dat proces.

## Niveautheorie

Lagerwerf brengt dit in verband met de niveautheorie van Van Hiele. In 'Begrip en inzicht' geeft Van Hiele de volgende beschrijving van denkniveaus bij het leerproces in de meetkunde<sup>1</sup>. Op het nulde denkniveau is een gelijkbenige driehoek een figuur die leerlingen louter aan de aanschouwelijke vorm herkennen. Op het eerste denkniveau is een gelijkbenige driehoek een figuur die herkend wordt doordat twee benen en twee hoeken gelijk zijn. De aanschouwelijke vorm is vervangen door de eigenschappen. Op het tweede denkniveau zijn niet de eigenschappen studieobject, maar de samenhang tussen de eigenschappen. Je kunt bewijzen dat twee hoeken gelijk zijn als de benen gelijk zijn, en omgekeerd. Op een volgend denkniveau zijn de logische verbanden tussen bepaalde stellingen studieobject. Wat betekent bewijzen? Wat is het omgekeerde van een stelling?

Kenmerkend voor de niveautheorie is:

1. op elk niveau zijn de objecten van bestudering iets anders (respectievelijk vorm, eigenschappen, stellingen, logica)
2. op elk niveau is men bezig met een interne ordening van het vorige niveau (de stellingen van het tweede niveau ordenen de eigenschappen van het eerste niveau)
3. twee personen die op verschillende niveaus praten, begrijpen elkaar niet (een leerling die op het eerste niveau staat, vindt eigenschappen vanzelfsprekend, en begrijpt niet waarom de leraar ze wil bewijzen)
4. iemand moet de elementen van een niveau beheersen, voor hij die elementen kan gaan ordenen (dus voor hij op het volgende niveau kan gaan leren).

Van Hiele zegt over het laatste: "Men kan zonder overdrijving zeggen, dat de handelingen mits zorgvuldig gekozen de eigenlijke basis vormen van het denken op een hoger niveau".

## Ontwikkeling

Het is de moeite waard de oorspronkelijke niveautheorie te vergelijken met de versie van Lagerwerf, niet zozeer

om na te gaan welke vrijheden hij zich veroorlooft, als wel om vast te stellen hoe de schoolwiskunde veranderd is sinds het verschijnen van 'Begrip en inzicht' in 1973. Het voornaamste is dat Van Hiele bij voorkeur sprak over het leren van meetkundige begrippen en dat Lagerwerf de niveautheorie ook toepast op het oplossen van contextrijke vraagstukken. Hij wil laten zien dat het wiskundig denken daar dezelfde stappen volgt. Dat is een belangwekkende ontwikkeling.

Het nulde, eerste en tweede niveau noemt hij beeldniveau, schaniveau en theorieniveau. Op het beeldniveau ordent een leerling concrete ervaringen en concrete handelingen. Hij vormt een beeld doordat de leraar vraagt wat nu het overeenkomstige in alle vorige oplossingen is, en doordat de leerling dat benoemt en beschrijft. Op het schaniveau worden in de globale beelden allerlei details onderscheiden en eigenschappen geformuleerd, en dat maakt ze bruikbaar voor nieuwe problemen. Op het theorieniveau staat de rechtvaardiging van de schema's: stellingen en bewijzen.

Het valt me op dat de versie die Lagerwerf in zijn boek geeft, zoveel ingewikkelder is dan de versie van Van Hiele. Blijkbaar zijn denkniveaus in de statische meetkunde van vroeger eenvoudiger te beschrijven dan in de contextrijke problemen van nu. Van Hiele sprak over herkennen van figuren, Lagerwerf spreekt over handelen in situaties. Overigens moet ik u teleurstellen als u meent nu alles te weten van Lagerwerfs niveautheorie. Het verontrustende begrip niveaureductie heb ik ten onrechte weggelaten. Het past er mooi in: doordat Lagerwerf over handelen spreekt, kan hij automatisch reageren opvatten als een schema dat tot beeld is gereduceerd, maar dat zo nodig wel verantwoord kan worden.

## Bekend verondersteld

De niveautheorie staat in hoofdstuk 5. Het is verhelderend vanuit deze theorie terug te kijken naar de vorige hoofdstukken, die over schoolwiskunde gaan. Daarin worden de onderwerpen bekend verondersteld. De bordjesmethode, de evenredigheidstabel, het mathematiseren doet Lagerwerf in een paar zinnen af. Je krijgt geen overzicht van het nieuwe programma. De voorbeelden lijken willekeurig gekozen en dienen in de eerste plaats om het begrip schematiseren voor te bereiden.

Vanuit de niveautheorie is het duidelijk hoe deze hoofdstukken bedoeld zijn. De elementen van het niveau waarop Lagerwerf spreekt, zijn de onderwerpen van het wiskundeprogramma. Deze worden intern geordend in een nieuwe samenhang, namelijk in de begrippen beeld en schema. Zo ontstaat een hoger denkniveau. Dit kan alleen als de lezer de elementen (dus de schoolwiskunde) al beheerst.

Het zegt iets over de mensen voor wie het boek bedoeld is. Als je bijles wilt geven en daartoe de schoolwiskunde wilt ophalen en ook wilt leren hoe je moet uitleggen, zul

je met 'Wiskundeonderwijs in de basisvorming' niet ver komen. Maar als je al les geeft en de eerste ervaringen met het nieuwe programma hebt opgedaan en ook wilt weten hoe je er in de klas mee kunt werken, zul je ruimschoots aan je trekken komen.

## Uitgangspunt

Lagerwerf heeft als uitgangspunt dat wiskunde bruikbaar moet zijn en dat leerlingen actief moeten worden. Het eerste zoekt hij in contextrijke opgaven en aansluiting met de werkelijkheid en problemen die leerlingen uitnodigen. Het gaat niet zozeer om toegepaste wiskunde, als wel om wiskunde die leerlingen zich eigen kunnen maken door ermee te werken en door te zien dat het over iets van henzelf gaat. Vandaar het tweede uitgangspunt: leerlingen moeten actief worden. Lagerwerf werkt dit uit in de volgende hoofdstukken: onderwijsleergesprek, voorbeelden geven, samenwerken, onderzoekende houding, zelfstandige leerling. Hier komt de klas in beeld. Het gaat vooral over vaardigheden die docenten nodig hebben bij het nieuwe programma. Zorgen voor veiligheid én eisen stellen. Houvast bieden én uitdagen. Duidelijk maken wat je verwacht én verantwoordelijkheid geven.

In zijn inleiding zegt Lagerwerf dat hij deze dingen behandelt vanuit het gezichtspunt van de niveautheorie. Maar ik vind niet dat de niveautheorie een bijdrage levert tot het beter voeren van onderwijsleergesprekken of tot het beter opzetten van samenwerking. Ze vormt eerder een reden waarom zulke onderwerpen in een huidig didactiekboek zoveel aandacht krijgen. Bij het oplossen van contextrijke vraagstukken moeten handelingen tot beelden worden, en beelden tot schema's. Daartoe moeten leerlingen ze zich actief eigen maken. De leraar moet hen aanmoedigen tot schematiseren door vaak te vragen waarom ze iets zo gedaan hebben en wat het overeenkomstige in al deze opgaven is en hoe de oplossing in elkaar zit. De werkvorm moet dit mogelijk maken.

Nee, in de hoofdstukken uit het tweede deel, over onderwijsleergesprek enzovoort, wordt de niveautheorie maar heel terloops genoemd. Het is heel praktisch. Lagerwerf haalt geen psychologische onderzoeken of onderwijskundige theorieën aan om zijn verhalen een schijn van gezag te verlenen. Zijn toon is die van goede raadgevingen, geput uit veel gezond verstand en veel achterin de klas zitten op allerlei scholen waar het nieuwe programma werd voorbereid.

Ik denk dat voor het tweede deel hetzelfde geldt als voor het eerste: hoe meer iemand vertrouwd is met zelf voor de klas staan, hoe beter hij of zij begrijpt waar Lagerwerf het over heeft. Een beginnend leraar zal waarschijnlijk over veel dingen heen lezen, want er staat soms in twee zinnen zo veel dat je het twee jaar zou kosten om het je eigen te maken. Volgens de niveautheorie kan het niet anders.

## Deel drie

Het derde deel gaat over een aantal losse onderwerpen: groepen die extra aandacht vragen (IVBO-leerlingen, allochtonen, meisjes en wiskunde), taalproblemen, differentiatie (zowel georganiseerd in BHV-model als spontaan door op verschillende leerlingen verschillend te reageren), en samenwerking in wiskundesecties. Als u wilt weten wat deze hoofdstukken waard zijn, moet u het stuk over IVBO-leerlingen beslist lezen (11.2), en uw krachten eens beproeven op uw variatie in aanpak (13.3.2).

Het boek sluit af met een hoofdstuk over lesvoorbereiding, waar al het voorgaande in terugkomt.

## Wiskunde

Het boek heet 'Wiskundeonderwijs in de basisvorming'. Over basisvorming wordt niet gesproken. Ook niet over de vraag wat wiskunde is. Maar omdat bij de eerste presentatie van het nieuwe programma, vier jaar geleden bij de regionale bijeenkomsten, sommige leraren vroegen of dit nog wel wiskunde is, wil ik er iets over zeggen.

Wiskunde is een breed gebied, dat bestaat uit een aanschouwelijke grondslag, een onderzoekende houding, een netwerk van stellingen, en een deductieve rechtvaardiging. Dit komt ruwweg overeen met de vier niveaus van Van Hiele (in de versie die ik eerder aanhaalde). Het merkwaardige is dat de manier waarop wiskundige kennis vastgelegd wordt, tot de wiskunde zelf behoort. Sommige mensen vereenzelvigen wiskunde helemaal met het deductieve stelsel, maar Lagerwerf doet dat niet. Aan de andere kant vindt hij ook niet dat wiskunde vooral iets toepasbaars is. De niveautheorie beschrijft een leerproces dat begint bij de alledaagse wereld, en dat eindigt bij een deductieve theorie. De werkelijkheid is noodzakelijk uitgangspunt, maar de theorie is einddoel.

## Hoogste niveau

Waar maak ik dat uit op? Uit het feit dat zowel Van Hiele als Lagerwerf het tweede niveau het hoogste noemen. Noodzakelijk is dat niet. Kees van Baalen, wiens kritisch leraarschap tot op de toren van Ransdorp bevestigd werd, vond het nulde niveau het hoogste<sup>2</sup>. Volgens hem ging het uitsluitend om de concrete werkelijkheid en diende wiskundige kennis alleen als ondergeschikt gereedschap om eigenaardigheden in de werkelijkheid te begrijpen. Maar voor zover ik weet is hij de enige. Zelfs de meest verstokte toegepast wiskundige meent: hoe abstracter hoe waardevoller.

## Bewijs

Als je wilt weten welke opvatting iemand over wiskunde heeft, moet je hem of haar vragen wat de status van bewijzen is. Van Hiele heeft hier herhaaldelijk over geschreven. In 'Begrip en inzicht' staat:

Bij de uitspraak: uit A volgt B gaat het er in de eerste plaats niet om, aan te tonen, dat B wáár is, maar wel, dat deze eventuele waarheid afhangt van het waar zijn van A.

Met andere woorden: als een stelling bewezen is, staat niet vast dat ze waar is, maar dat haar waarheid afhangt van de waarheid van de axioma's. De vraag of de axioma's waar zijn, wordt door de deductieve theorie niet beantwoord.

Ik maak uit 'Wiskundeonderwijs in de basisvorming' op dat Lagerwerf hier iets anders over denkt. Hij hecht er veel waarde aan dat een leerling leert zijn eigen resultaten te controleren, vooral op het eerste niveau. Bewijzen heeft dan de status van zichzelf of de leraar overtuigen. En over het tweede niveau schrijft hij: 'Er is geen plaats meer voor onzekerheid, er is nu definitief zeker weten'. Maar volgens mij blijft zulk weten niet meer dan overtuiging, zolang de verontrustende vraag waar de waarheid van de axioma's op berust, niet beantwoord wordt. Bewijzen geeft alleen maar de zekerheid dat je de axioma's niet tegenspreekt.

## Verschuiving

Gezien vanuit de niveautheorie is het verschil met de vroegere schoolwiskunde dat het nulde niveau, de aanschouwelijke werkelijkheid, veel nadrukkelijker aanwezig is. Dat blijkt uit het voorbeeld van de twee bouwkransen dat ik eerder aanhaalde. Aan de andere kant blijft het theorieniveau vrijwel achterwege. Lagerwerf geeft hiervoor als reden, in overeenstemming met de gewoonte van de laatste jaren, dat leerlingen in het voortgezet onderwijs hier niet aan toe komen. Zijn didactiek is er vooral op gericht hoe je leerlingen van het beeldniveau naar het schaniveau krijgt.

Misschien lijkt het alsof het wiskundeonderwijs hierdoor in niveau gedaald is. Maar dat kun je zo niet zeggen: je moet denkniveau niet verwarren met onderwijsniveau. Wiskundeonderwijs in de basisvorming betekent dat leerlingen minder theoretische kennis hebben, maar hun kennis beter kunnen gebruiken, doordat ze zich die actief eigen gemaakt hebben. Dat is een andere verschuiving dan dalen in niveau. Hoe groot de winst is zullen de komende jaren uitwijzen. Al met al heeft Lagerwerf, zonder het met zoveel woorden te zeggen, een heel traditioneel beeld van wiskunde. De vermaning van Freudenthal, dat je het begrip continue functie niet aanschouwelijk mag definiëren, heeft blijvende invloed gehad.

## Bezwaren

U zult mij als boekbespreker niet ernstig nemen, als ik ook niet een paar zure aanmerkingen ten beste geef. Hier zijn vier bezwaren:

1. In het hoofdstuk over de niveautheorie lopen de voorbeelden een beetje door elkaar. Op het beeldniveau worden een contextprobleem en het begrip rechthoek

genoemd. Op het schaniveau en theorieniveau komt wel de rechthoek terug, maar niet het contextprobleem. Dat is jammer. Ten eerste omdat de theorie duidelijker wordt als beide voorbeelden op alle drie de niveaus verschijnen. Ten tweede omdat het boek als hoofdonderwerp heeft dat de niveautheorie ook op contextrijke wiskunde toepasbaar is.

2. Niet alle bronnen worden genoemd. De hoe en wat-plaatjes, het knipperbolmodel, de begeleide verwerking, de actie en relatietaal: heeft u ze allemaal herkend? En weet u van wie ze afkomstig zijn? Ik ben blij met een boek dat zoveel ervaring als een geheel aanbiedt, maar de afwezigheid van een paar namen vervult me met vage wrevel.
3. Sommige verwijzingen naar het verleden klinken als een karikatuur. 'Vroeger was het algemeen de didactische praktijk dat de docent (met behulp van het boek) voordeed wat de leerlingen moesten leren, en die probeerden dat dan na te doen. Tegenwoordig moet van de leerlingen meer creativiteit worden gevraagd, want voor veel leerlingen is leren een moeilijk proces' (blz. 115). Ik zal niet zeggen dat het onwaar is, maar heb wel de indruk dat een slechte leraar van toen wordt vergeleken met een goede van nu.
4. Lagerwerf heeft een uitgesproken overtuiging hoe goed wiskundeonderwijs in de basisvorming eruit ziet. Dat heeft voor- en nadelen. Het voordeel is dat de onderwerpen samenhangen en dat het boek inspireert. Het nadeel is dat andersdenkenden weinig keus hebben. Ze kunnen enkel meer of minder ver gaan op de enig mogelijke weg. Het team W12-16 zei altijd dat het geen didactiek voor het nieuwe programma voorschreef. Geeft Lagerwerf ook zoveel ruimte?

## Aangeraden

Het boek heeft als ondertitel: *Een didactische ruggesteun voor wiskundedocenten*. Zoals ik al opmerkte lijkt het

mij het meest aan te raden voor leraren die al enige ervaring met Wiskundeonderwijs in de basisvorming hebben opgedaan en die op zoek zijn naar eigen ontwikkeling of naar andere mogelijkheden. Het boek is overzichtelijk genoeg om in te grasduinen. Ik hoop dat veel wiskundedocenten het zullen lezen.

Voor studenten aan de lerarenopleidingen lijkt het me niet geschikt om mee te beginnen. Er moet iets aan vooraf gaan: kennis van het nieuwe programma en eerste stage-ervaringen. Daarna verwacht ik dat het verrijkend is voor studenten, maar moeilijk voor didactiekdocenten. Met alleen maar doorlezen zal een student er niet alles uithalen. Er valt van alles rondom de tekst te doen, maar het boek bevat nauwelijks opdrachten die daarbij kunnen helpen.

En dat is goed. De tijd waarin Wilhelm Busch schreef: 'Wenn jeder schläft und einer spricht, den Zustand nennt man Unterricht', moet ook in de wiskundedidactiek nu maar eens voorbij zijn.

*Wiskundeonderwijs in de basisvorming. Een didactische ruggesteun voor wiskundedocenten.*

Auteur: Bram Lagerwerf

Uitgever: Wolters-Noordhoff

Jaar: 1994

Aantal pagina's: 222

ISBN: 9001 520227

Prijs: f 45,00

## Noten

[1] Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en inzicht*. Muusses Purmerend.

De versie van de niveautheorie die ik aanhaal staat op bladzijde 177.

[2] Goffree, F. (1985). *Ik was wiskundeleraar*. Enschede, SLO.

Daarin een vraaggesprek met Kees van Baalen.

## Geslaagd voor de basisvorming?

Dit jaar ronden de eerste leerlingen de basisvorming af. Hebben ze de lang bediscussieerde kerndoelen nu gehaald? Hoe toets je dit? Zijn er al officiële eindtoetsen en binnen welk wettelijk kader vindt de afsluiting plaats?

Het APS, CPS, KPC en CITO organiseren conferenties over de afsluiting van de basisvorming. Ze zijn bedoeld voor de docenten van alle vakken in de basisvorming en worden verspreid over vier plaatsen in het land gegeven: Utrecht, Zwolle, Eindhoven en Rotterdam.

Op de conferenties worden voorbeelden gegeven van eindtoetsen en kunnen docenten zien hoe ze met de toetsen kunnen omgaan. Hoe scoor je, wat toets je nu eigenlijk, wat is per vak de relatie tussen de toets en de kern-

doelen, welke conclusies kun je er aan verbinden als je leerlingen moet adviseren over het vervolg van de schoolloopbaan? Voor docenten van het I-VBO wordt een aparte conferentie georganiseerd met workshops die specifiek op de eigen problematiek ingaan.

Inlichtingen voor wiskunde: APS, tel. 030-856600.

Tijd: 9.30-16.30 uur

Data en plaatsen:

16 november Utrecht, 23 november Zwolle,

30 november Eindhoven, 7 december Rotterdam

conferentie I-VBO: 14 december Utrecht

Prijs: f 125,- inclusief lunch en conferentiemap