# Geheugensteun voor kussende cirkels

## Recreatierubriek

**A. Goddijn**
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

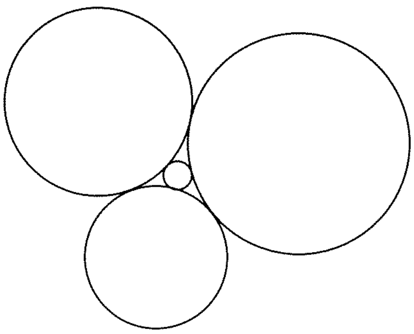
### Kip tot de macht kip log kuiken

Is kuiken.
Daar gaan we het in deze puzzelrubriek over hebben: geheugensteuntjes bij wiskunde. Ze mogen natuurlijk niet meer, want wiskunde moet je in alle nieuwe leerplannen begrijpen.
Vandaar deze actie ezelsbruggetjes, rijmpjes en andere geheugensteuntjes aan de vergetelheid te ontrukken.
Ik geef in deze rubriek een paar voorbeelden en hoop dat lezers meehelpen veel bij elkaar te brengen.

Als laatste onderdeel van deze rubriek: reacties op de opgaven in het juninummer, de wiskunde-B special.

### Kussende cirkels herontdekt

Drie cirkels met gegeven stralen kunnen altijd zo aan elkaar geschoven worden dat elke cirkel twee andere uitwendig raakt. Daarna kan slechts op weinig manieren een vierde cirkel toegevoegd worden die de drie cirkels alledrie uitwendig raakt.



In het totaalplaatje raakt elke cirkel de drie andere uitwendig en er moet een verband tussen de vier stralen zijn, want we zien dat de vierde cirkel praktisch vast ligt, als de eerste drie gegeven zijn.
René Descartes vermeldde in 1642 het verband al in een brief aan prinses Elisabeth van Bohemen.
Het mooist is het verband uit te drukken in de vier krommingen van de cirkels. De kromming van een cirkel is de inverse van de straal van de cirkel, en als we de vier krommingen $\kappa_1$, $\kappa_2$, $\kappa_3$ en $\kappa_4$ noemen, ziet het verband er zo uit:

$$2\left(\kappa_1^{\,2}+\kappa_2^{\,2}+\kappa_3^{\,2}+\kappa_4^{\,2}\right) = (\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4)^2$$

In 1842 werd deze relatie herontdekt door een Engelse amateurwiskundige, Philip Beecroft, die opmerkte dat er nog vier ander onderling rakende cirkels bijhoren: deze cirkels gaan ieder door de drie onderlinge raakpunten van drie van de al aanwezige vier cirkels. Ook deze cirkels raken weer onderling.
Hoe zulke dingen vergeten kunnen worden is een raadsel, maar in 1936 werd de stelling van Descartes wéér opnieuw ontdekt, door Sir Frederick Soddy.
Het is èrg onwaarschijnlijk dat de stelling nu nog vergeten kan worden want Soddy maakte er een rijmpje bij, *The Kiss Precise.*

> Four circles to the kissing come,
> The smaller are the benter.
> The bend is just the inverse of
> the distance to the centre.
> Though their intrigue left Euclid dumb
> There's now no need for rule of thumb.
> Since zero bend's a dead straight line
> And concave bends have minus sign,
> *The sum of the squares of all four bends*
> *is half the square of their sum.*

Om wille van poëtische schoonheid is de 2 naar het rechterlid gebracht en tussen neus een lippen door wordt ook nog verteld hoe gerekend moet worden bij inwendig raken.
Ik vind al deze informatie overigens in Coxeter's *Introduction to Geometry*, dat steeds weer een goudmijn blijkt te zijn. Daar is ook een bewijs van de stelling van Descartes-Beecroft-Soddy te vinden.

### Decimalen onthouden

Na deze stelling in versvorm een geheel ander gebied, dat van de versjes waarin je van elk woord het aantal letters moet tellen. Je vindt dan bijvoorbeeld een serie decimalen van π:

*How I want a drink, alcoholic of course,*
3 1 4 1 5 9 2 6

*after the heavy chapters*
5 3 5 8

*involving quantum mechanics.*
9 7 9

Dit stamt geloof ik van de Engelse natuurkundige Arthur Stanley Eddington. Ik citeer het nu uit het hoofd, dat lukt met zo'n regel.

Wie levert Nederlandse equivalenten, liefst wat langer? Voor $\pi$, voor het getal e, eventueel voor $\sqrt{2}$ en ln (2). Andere talen zijn natuurlijk ook welkom.
Hier volgen voldoende decimalen voor een sonnet.

$\pi$ = 3. 14159 26535 89793 23846 26433 83279
50288 41971 69399 37510 58209 74944
59230 78164 06286 20899 86280 34825
34211 70679 82148 08651 32823 06647
09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559

e = 2. 71828 18284 59045 23536 02874 71352
66249 77572 47093 99959 57496 69676
27724 07663 03535 47594 57138 21785
25166 42742 74663 91932 00305 99218
17413 59662 90435 72900 33429 52605
95630 73813 23286 27943 49076 32338

$\sqrt{2}$ = 1. 41421 35623 73095 04880 16887 24209
69807 85696 71875 37694 80731 76679
73799 07324 78462 10703 88503 87534
32764 15727 35013 84623 09122 97024
92483 60558 50737 21264 41214 97099
93583 14132 22665 92750 55927 55799

ln (2) = 0. 69314 71805 59945 30941 72321 21458
17656 80755 00134 36025 52541 20680
00949 33936 21969 69471 56058 63326
99641 86875 42001 48102 05706 85733
68552 02357 58130 55703 26707 51635
07596 19307 27570 82837 14351 90307

## Een geheugenkunstenaar

Ireneo Funes mag hier niet ongenoemd blijven, hoofdfiguur in een verhaal van Jorge Luis Borges. Funes onthoudt tot in de kleinste details alles wat hij ziet en hoort. Het verhaal 'Het onverbiddelijke geheugen van Funes' staat in de bundel *De Zahir*. Een fragment waarin een geheel nieuwe manier van tellen ter tafel komt:

> Hij zei me dat hij omstreeks 1886 een eigen telsysteem had uitgedacht en dat hij in een paar dagen tot over vierentwintigduizend geteld had. Hij had het niet opgeschreven omdat wat hij eenmaal gedacht had niet meer uit zijn geheugen kon worden gewist. Een eerste prikkel daartoe was, geloof ik, zijn misnoegen over het feit dat de 'drie-en-dertig' in Montvideo (een plein) twee cijfers en drie woorden nodig had, in plaats van één enkel woord en één enkel cijfer. Dat onzinnige principe paste hij daarna toe op de andere getallen. In plaats van zevenduizend dertien zei hij (bijvoorbeeld) *Máximo Pérez*, in plaats van zevenduizend veertien, *de Spoorwegen*; andere getallen waren *Luis Melián Lafinur, Olimar, zwavel, de pakzadels, de walvis, het gas, de waterketel, Napoleon, Augustín de Vedia*. In plaats van vijfhonderd zei hij *negen*. Elk woord had een eigen teken, een soort merk; de laatsten waren erg ingewikkeld... Ik trachtte hem uit te leggen dat die rapsodie van onsamenhangende woorden juist het tegendeel was van een telsysteem. Ik zei hem dat men, als men 365 zegt, drie honderdtallen, zes tientallen, vijf eenheden aanduidt; een ontleding die niet mogelijk is in de 'getallen' *De Neger Timotheüs* of *de ken van vlees*. Funes begreep me niet of wilde me niet begrijpen.

Na dit toppunt van niet willen begrijpen en toch kunnen onthouden:

***Opgave 118***
*Zoek zoveel mogelijk verbale geheugensteuntjes bij wiskunde en zend ze in voor publikatie in deze rubriek.*

Schroom niet zaken in te sturen die u niet zelf bedacht hebt en waarvan u denkt dat iedereen ze kent. Het gaat om verzamelen deze keer.

## De opgaven van juni 1994

***Opgave 113: Drei versteckte Gegenstände aus der DDR***
Floor Lamoen merkt op dat de drie voorwerpen slechts op 6 manieren over de handtassen van de meisjes verdeeld kunnen worden.
Een manier is:

Anna: Ball
Brigitte: Bleistift
Claudia: Schere

Nu zijn precies twee van de gegeven antwoorden kloppend, en op deze manier is het dus niet goed.
Ga alle mogelijkheden na en ontdek dat alleen

*Anna: Schere*
*Brigitte: Ball*
*Claudia: Bleistift*

klopt.

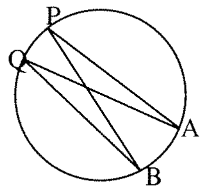
***Opgave 114: Gegenstände von verschiedener Farbe***
Ik citeer hier weer Floor Lamoen:
'Prachtopgave. Geef deze opgave aan een leerling en die merkt onmiddellijk dat de stelling correct is. Maar dan het goed verwoorden, om gèk van te worden. Gewend als wij zijn aan redeneertaal is dat voor ons geen probleem: Neem twee objecten die verschillen van kleur. Wanneer zij ook van vorm verschillen zijn we klaar (het duurt even voor leerlingen inzien dat ze dàt moeten zeggen).

Zo niet, kies dan een derde object dat van de twee objecten van vorm verschilt. Dat object verschilt met minstens één van de twee eerdere objecten ook van kleur.'

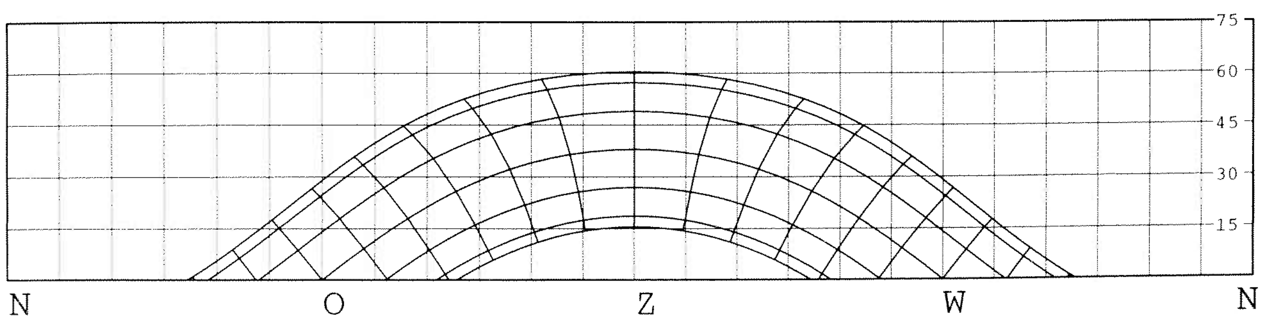
***Opgave 115: Het Mysterie van het Monte Carlo Slot***
Deze opgave staat in *The Lady or the Tiger*, een van de boeken vol logica-puzzels van Raymond Smullyan.
Piet Lemmens en Floor Lamoen losten de opgave op.
Beiden merken op dat eigenschap S van de code een handvat geeft: je moet een code vinden die speciaal gerelateerd is aan zichzelf. Zo'n code kan volgens eigenschap S niet neutraal en ook niet fataal zijn. Blijft over: het is een openende code.
Piet Lemmens: 'Bij de lettercoden zag ik dat *RVLVQxQ* gerelateerd is aan *xQxQ*, zodat voor $x$ = *RVLV* de code *RVLVQRVLVQ* ontstaat die gerelateerd is aan zichzelf. Dit is dan een openende code wegens eigenschap S en het gegeven dat er slechts 3 soorten codewoorden zijn.'
(Dat laatste is natuurlijk de bedoeling, het had inderdaad vermeld moeten worden).
Piet Lemmens vraagt zich terecht af wat nu precies fataal is. Valt het slot dicht als je zo'n code alleen maar draait, of gebeurt dat pas als je het slot probeert te openen na het invoeren van zo'n code? Ik herformuleer een deel van de brief van Piet Lemmens als extra opgave: bewijs onder de extra-aanname dat beginstukken van niet-fatale codes niet-fataal zijn, dat *QQ* een openende code is. (Ook mag worden aangenomen dat de lege code niet fataal is.)
Floor Lamoen en Raymond Smullyan geven hetzelfde antwoord als hierboven. Smullyan beweert dat dit de kortste openende code is. Floor Lamoen geeft nog aan dat voor en achter de zojuist gegeven tienlettercode een gelijk aantal *Q*'s mag staan en levert ook nog *QRVLVQRVLVQQ* als oplossing. En er zijn er nog meer.

***Opgave 116: Wiebelende tafel***
Beide reeds genoemde inzenders geven dezelfde redenering. Zet de tafel op de vloer, noem de poten A, B, C en D, op de gewone manier in het rond. Zorg dat A, B en C op de vloer staan en neem aan dat D boven de vloer zweeft. Noem de plekken van de vloer waar A, B en C de vloer raken: a, b en c. Schuif nu de tafel zó over de vloer (terwijl dus A, B en C contact houden met de vloer) dat B op a komt en C op b. Poot A staat dan op de vloer, ongeveer op de plek waar D boven zweefde. Maar dan zou de AD-kant van de tafel nu dus lager staan dan de DC-kant in de oorspronkelijke positie. Met andere woorden: poot D zit onder c. Ergens tijdens het schuifproces moet D tegen de vloer zijn opgekomen en dat was dan een geschikte stand voor de tafel. De oplossing is makkelijk in meer wiskundige termen te formuleren; dan valt ergens de uitdrukking 'tussenwaardestelling voor continue functies'.

***Opgave 117: Valse zonnewijzer***
Weer dezelfde inzenders.
Beide oplossers merken op dat, als de zonnewijzer correct is, dat het dan zo moet zijn dat het hoekhoogteverschil van de zon tussen bijvoorbeeld 12 uur en 10 uur op alle dagen van het jaar hetzelfde is.
Dat volgt uit de bekende stelling over omtrekshoeken: in onderstaande figuur zijn hoek APB en AQB gelijk. (P en Q zijn de posities van het gaatje in de ring op twee verschillende dagen, A en B de posities van 10 en 12 uur.)




Men kan op verschillende manieren laten zien dat de zon het niet op deze manier doet in onze streken. Een helder verhaal vraagt wat sterrenkundig inzicht en veel ruimte. Daarom geef ik hieronder een zonnebanenkaart. Daarin is de positie van de zon af te lezen, zowel richting (N, O, Z, W) als hoogte in graden zijn aangegeven.
De lange golvende lijnen geven de positie van de zon op de 21-ste van de opeenvolgende maanden. Juni is de hoogste lijn. De korte stukken lijn verbinden punten die bij dezelfde tijden op verschillende data horen. De middenste lijn, de verticale, staat voor 12 uur ware zonnetijd. Op allerlei manieren is nu af te lezen dat het niet lukken kan, zo'n ringzonnewijzer.
Piet Lemmens merkt nog op dat het op de Noordpool wel kan. Daar valt zo'n zonnewijzer inderdaad wel te maken, maar dan moeten alle uuraanduidingen op één punt van de ring liggen. En al maakt de gegeven ringvormige zonnewijzer al geen onderscheid tussen twee uur voor en twee uur na de hoogste zonnestand, een zonnewijzer die de hele dag 'stil' staat, dat is toch wel teveel van het goede. Maar geeft natuurlijk wel veel tijd voor Opgave 118!




*Zonnebanenkaart voor 52° noorderbreedte*