# De moeilijkste opgave?

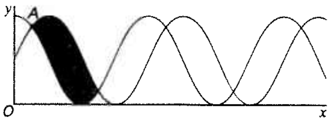
**H. van der Kooij**
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

## Inleiding

Onder bovenstaand kopje kon, nog juist voordat het themanummer wiskunde B van de Nieuwe Wiskrant ter perse ging, een bericht worden opgenomen uit de Volkskrant van 31 mei j.l.. Het ging om een onderdeel van het goniovraagstuk uit het vwo-B examen:

**DE MOEILIJKSTE OPGAVE**

Het wiskunde B-examen voor de vwo'ers eindigde met een haast onmogelijke opgave:




In figuur 3 zijn gedeelten van de grafieken getekend van de functies:
$f$: $x \to 2\cos^2 x$ en $g$: $x \to 1 + \sin 2x$
Er bestaat een $p \in [0, \pi]$ met de eigenschap dat de functie
$h_p$: $x \to f(x + p) + g(x)$ een constante functie is.
Onderzoek voor welke waarde van $p$ dit geldt en bewijs de juistheid van je antwoord.

Op het Freudenthal instituut heerste verbazing: de vraag leek uitermate geschikt om op diverse manieren aangepakt te worden. En dan lijkt het wat overdreven om hem bijna onmaakbaar te noemen. Vandaar de oproep aan de lezers om te reageren. Mogelijk komt zo een discussie op gang rond het karakter van vraagstukken, zoals die voor een vwo B-examen (bij een nieuw programma?) wenselijk worden geacht. Wie weet kunnen ontwerpers van toekomstige programma's en examencomponisten daar hun voordeel mee doen.
Drie docenten hebben gehoor gegeven aan de oproep. Wellicht waren dat er meer geweest als het vierde nummer van de Nieuwe Wiskrant niet traditiegetrouw op de rand van de zomervakantie in de brievenbussen was geploft. Misschien verklaart dit ook waarom de schrijvers uit de noordelijke helft van Nederland afkomstig zijn: het noorden was dit jaar als laatste regio aan de beurt om zich aan de zomerzon bloot te geven.
De aangedragen oplossingen zijn in drie categorieën ingedeeld. Bij elke categorie vermeld ik een paar oplossingen. Tot slot volgen nog wat overwegingen die hopelijk anderen naar de pen (of de tekstverwerker) doen grijpen voor een bijdrage over moeilijke, leuke, verfoeilijke, boeiende vraagstukken uit de examencultuur of, misschien nog aardiger, uit de eigen schoolcultuur.

## Categorie 1: Bruut formulegeweld

Wie kent ze nog, die formules waarmee je in een ver verleden achteloos moest kunnen goochelen?
Ik bedoel natuurlijk de zogenaamde $p,q$-formules.
Wijnia uit Ter Apel durfde zijn VWO-5 leerlingen de dag na het examen de volgende oplossing voor te schotelen:

***Oplossing 1***
$2\cos^2(x + p) + 1 + \sin(2x) = \text{constant}$
$\cos 2(x + p) + 2 + \sin(2x) = \text{constant}$
$\cos(2x + 2p) + \cos(\frac{1}{2}\pi - 2x) = \text{constant}$
En daar komt hij:
$2\cos\frac{1}{2}(2x + 2p + \frac{1}{2}\pi - 2x) \cdot \cos\frac{1}{2}(2x + 2p - \frac{1}{2}\pi + 2x) = \text{constant}$
$2\cos(p + \frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(2x + p - \frac{1}{4}\pi) = \text{constant}$
Omdat de tweede factor zeker niet constant is, moet de eerste factor nul zijn, wil de expressie zijn afhankelijkheid van $x$ verliezen.
Conclusie: $\cos(p + \frac{1}{4}\pi) = 0$ en dus $p = \frac{1}{4}\pi$.

Er wordt niet vermeld hoe de leerlingen dit hebben verwerkt. Ik kan me voorstellen dat het ontzag voor de kennis van de docent in niet geringe mate is toegenomen.
Ter 'verontschuldiging' meldt Wijnia dat deze aanpak bij hem als een automatisme, aangeleerd in zijn HBS-tijd, naar boven komt. Vandaag de dag durft hij die vaardigheid niet meer te eisen van zijn leerlingen.
Waarom eigenlijk niet? Zijn de leerlingen nu echt minder begaafd dan vroeger? Of heeft het te maken met het feit dat er in het examen al jaren geen vragen meer in deze richting worden gesteld? Daarmee is de noodzaak om dergelijke vaardigheden te onderwijzen en te oefenen eigenlijk weg. Je kunt je tijd wel beter besteden. En omdat examenmakers weten dat de formules niet meer worden geoefend, durven ze er ook geen vragen meer over te stellen.

*Oplossing 2*
Minder zwaar formulegeweld is nodig, als er na $\cos 2(x+p) + 2 + \sin(2x) = \text{constant}$ wordt vervolgd met $\cos 2(x+p) = -\sin(2x)$:
$\cos(2x+2p) = \sin(-2x) = \cos(\frac{1}{2}\pi + 2x)$.
Aangezien dit moet gelden voor alle waarden van $x$, volgt dus $2p = \frac{1}{2}\pi$, ofwel $p = \frac{1}{4}\pi$.

Aldus Postma uit Tytsjerk. Bijna achteloos voegt hij daar de volgende oplossing aan toe:

*Oplossing 3*
$1 + \sin 2x = \sin(\frac{1}{2}\pi) + \sin 2x = 2\sin(\frac{1}{4}\pi + x)\cos(\frac{1}{4}\pi - x)$

$= 2\sin^2(x + \frac{1}{4}\pi)$, dus

$h_p(x) = 2\cos^2(x+p) + 2\sin^2(x + \frac{1}{4}\pi) = 2$, mits $p = \frac{1}{4}\pi$.

Genoeg aanpakken uit deze categorie.
Hoewel ik de neiging niet kan onderdrukken om plezier te hebben in dergelijke oplossingen (ik heb ook zo'n HBS-verleden!), besef ik dat zulke methoden vandaag de dag aan het merendeel van de leerlingen niet zijn besteed.

## Categorie 2: plaatje, redenering en wat algebra

M. Wielders (Nijmegen) komt in deze categorie met de volgende aanpak:
Kijkend naar het plaatje constateer ik dat de twee grafieken 'gelijksoortig' zijn. In feite was dat al expliciet gevraagd aan de kandidaten, maar Wielders schrijft dat hij al vier jaar weg is uit het middelbaar onderwijs. Vandaar dat hij, net als wij overigens, alleen maar over de Volkskrant informatie beschikte.

*Oplossing 4*
De standaardgrafieken van $\sin x$ en $\cos(x + \frac{1}{2}\pi)$ zijn elkaars spiegelbeeld in de $x$-as. Datzelfde geldt dan natuurlijk ook voor $\sin 2x$ en $\cos(2x + \frac{1}{2}\pi)$. De twee grafieken doven elkaar dus uit bij optelling.
Daarmee wordt de functie
$h(x) = \sin 2x + 1 + \cos(2x + \frac{1}{2}\pi) + 1$
een constante functie (op hoogte $y = 2$). Je mist nu nog net de boot, al je denkt dat $p = \frac{1}{2}\pi$.
Uit $2\cos^2(x+p) = \cos 2(x+p) + 1$ volgt echter $p = \frac{1}{4}\pi$.
Wielders geeft nog twee andere oplossingen met, zoals hij het zelf noemt, meer vuurwerk: de formulemanipulerende aanpak. Zijn voorkeur gaat echter uit naar de bovengenoemde oplossing.
Merk op dat de hele oplossing wordt opgezet vanuit beschouwingen over de standaardgrafieken, waarbij kennis van enige gonioformules zeker nodig blijft. Naast de dubbele-hoek formules zijn dat echter formules die gebaseerd zijn op meetkundige transformaties, op de standaardgrafieken en op symmetriebeschouwingen.

Oplossingen die directer gerelateerd zijn aan het gegeven plaatje:

*Oplossing 5*
De somgrafiek is een horizontale lijn (op hoogte 2), als de grafieken van $g$ en $f_p$: $x \to f(x+p)$ elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = 1$.
Spiegeling van $g$ in $y = 1$ resulteert in de functie
$g_s(x) = 1 - \sin 2x$.
$f_p(x) = 2\cos^2(x+p) = 1 + \cos 2(x+p)$
$= 1 + \sin(\frac{1}{2}\pi - 2x - 2p) = 1 - \sin(2x + 2p - \frac{1}{2}\pi)$.
Omdat $g$ en $f_p$ elkaar uitdoven als $g_s$ en $f_p$ samenvallen, volgt dus: $p = \frac{1}{4}\pi$.

*Oplossing 6*
De twee functies leveren een constante somfunctie (vanwege de identieke vormen) als een top van de één precies boven een dal van de ander ligt. Daarbij kunnen de nulpunten van beide functies worden gebruikt, omdat die de plaats van een dal vastleggen:
$1 + \sin 2x = 0$ levert $x = \frac{3}{4}\pi$
Uit $2\cos^2 x = 0$ volgt $x = \frac{1}{2}\pi$.

Het verschil levert dus $p = \frac{1}{4}\pi$ (of $p = -\frac{1}{4}\pi$?).
Controle door invulling:
$2\cos^2(x + \frac{1}{4}\pi) = 1 + \cos(2x + \frac{1}{2}\pi) = 1 - \sin 2x$. Hoera dus!

Deze oplossing leunt sterk op de grafieken.
Een meer algoritmische variant (een beeld van de grafiek is daarbij niet noodzakelijk) krijg je door de posities van top en dal te bepalen via differentiaalrekening.

## Categorie 3: Moderne technologie

Ongetwijfeld zullen de oplossingen die nu komen talloze tenen spontaan doen krommen.

*Oplossing 7*
Voer de twee functies aan de Graphing Calculator.
Lees met de TRACE-knop de toppen van de twee grafieken af.

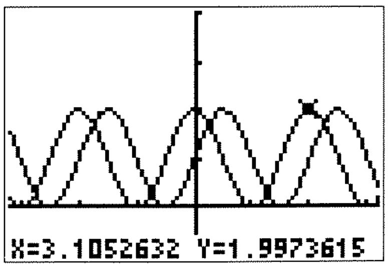
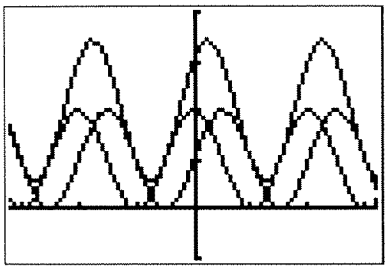



*fig. 1 Twee grafieken met de TRACE op een top*

Het verschil is ongeveer 0.811. De waarde van $p$ zou $\frac{1}{4}\pi$ kunnen zijn, want $\frac{\pi}{0.811} \approx 4$.
Controle, zoals bij oplossing 6, bekrachtigt het vermoeden.

*Oplossing 8*
Voer de GC met de functies
$Y1 = 2\cos^2(x + p)$; $Y2 = 1 + \sin 2x$; $Y3 = Y1 + Y2$
Laat de grafieken tekenen voor diverse waarden van $p$, te beginnen met $p = 0$ en $p = 1$.



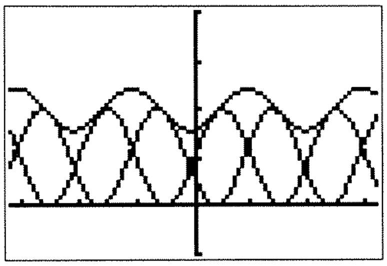


*fig. 2 De grafieken van Y1, Y2 en Y3 voor resp. p = 0 en p = 1*

Je ziet dan dat een waarde $p \approx 1$ al een redelijk resultaat oplevert.
Verder proberen voert je naar $p \approx 0.8$

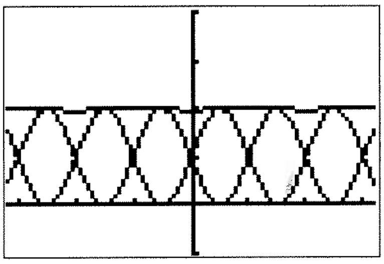


*fig. 3 De grafieken van Y1, Y2 en Y3 voor p = 0.8*

Vermoeden:
$p = \frac{1}{4}\pi$ en dan maar weer controleren via de formules, zoals hierboven.

## Nabeschouwing

Jammer genoeg vermeldt geen van de schrijvers of er zich ook leerlingwerk onder hun oplossingen bevond. Postma merkt nog wel op dat zijn (zwakke) examengroep van afgelopen jaar slecht scoorde op deze opgave, met name op het genoemde onderdeel (een gemiddelde score van 0.4). Dat zijn leerlingen daarmee niet extreem slecht waren, is te lezen in het CITO-verslag in *Euclides*: gemiddeld werden er 0.6 punten (van de 5) gescoord: een $p'$-score van 12%.
Ongetwijfeld zullen er steekhoudende argumenten aan te voeren zijn voor deze extreem lage resultaten op een toch niet zo moeilijke vraag.
De twee meest voor de hand liggende zijn: *het was de laatste vraag van het examen* en *het ging over gonio en dat is zeker niet een geliefd onderwerp.*
Ik wil daar nog het volgende aan toevoegen.
Bij de meeste aanpakken van de briefschrijvers kan ik me amper een leerling-aan-het-werk voorstellen binnen de huidige onderwijscultuur.
De categorie formulegeweld steunt op een blinde beheersing van een aantal formules en het inzetten daarvan op het juiste moment. Dat soort vaardigheden heeft geen grote prioriteit meer binnen het onderwijs. In het HAWEX project was het oorspronkelijk ook de bedoeling dat de dubbele hoek formules en de formules voor $\sin(\alpha+\beta)$ enzovoort zouden worden behandeld. Die poging is niet eens ondernomen, omdat in een vroeg stadium al bleek dat leerlingen genoeg moeite hebben met het inzichtelijk hanteren van de eenvoudige typen goniometrische vergelijkingen als $\sin \alpha = \sin \beta$.
De derde categorie van aanpakken is (nog?) niet aan de orde in het onderwijs, behalve op de paar scholen die betrokken zijn bij het Graphic Calculator project. Overigens vind ik dat de gegeven oplossingen in categorie 3 serieus overwogen moeten worden. Het zijn nu eenmaal aanpakken die door het gebruiken van de GC uitgelokt worden.
Veruit de meeste aanpakken die door de drie briefschrijvers worden gegeven, behoren tot categorie 2.
Die aanpakken steunen alle op een mengeling van het bestuderen van een gegeven grafiek, het (her)kennen van standaardgrafieken en het meetkundig manipuleren ervan en op het beheersen van een beperkt arsenaal van formules. Bij deze aanpakken wordt dus een beroep gedaan op de flexibele inzetbaarheid van een breed scala aan vaardigheden en inzichten. Gegeven de huidige vulling van de schoolmethoden voor bovenbouw VWO B en het ontbreken van een systematische inzet in de lessen van computers en/of Graphic Calculators, kan ernstig betwijfeld worden of zo'n flexibele inzet van verschillende vaardigheden verwacht mag worden van leerlingen.
Wijnia sluit zijn brief als volgt af:

> een goed examenvraagstuk in het verleden,
> een goed vraagstuk in een mogelijke toekomst,
> maar ...... niet nu.

Gelet op het bovenstaande zijn de eerste twee regels acceptabel. Maar ik ben het absoluut oneens met de constatering dat het daarom geen goede examenvraag zou zijn in het heden. Het zou een slechte zaak zijn, als examens jaar na jaar dezelfde stereotiepe vragen zouden bevatten. Niets is dodelijker voor goed onderwijs dan steriele vraagstellingen. Dergelijke steriele vraagstellingen blijken in de praktijk maar al te vaak aanleiding te vormen voor algoritmisch, routinematig onderwijzen en leren. Hoewel in de leermethoden, naar mijn mening, momenteel veel te weinig aandacht besteed wordt aan veelsporige aanpakken, ontslaat dit de docent nog niet van de taak om dat aspect zelf in zijn onderwijs in te brengen. Examenvragen zoals deze dwingen je daar als docent toe. Ook ontwikkelaars van een nieuw programma wiskunde B zullen zich moeten realiseren dat er, veel meer dan nu het geval is, expliciet aandacht moet worden geschonken aan het flexibel leren inzetten van een breed arsenaal aan vaardigheden, onder andere door het functioneel gebruik van de Graphic Calculator.

## En dan nog even dit....

Toen ik de plaatjes voor de figuren 2 en 3 maakte op mijn TI82, kwamen er, zoals overigens vaak gebeurt als ik wat zit te spelen met dat apparaat, spontaan een paar nieuwe vragen naar boven:

1. Het lijkt er op dat de somgrafiek raakt aan één van de afzonderlijke grafieken.
   Onderzoek of dat inderdaad het geval is.
2. Onderzoek in het algemeen aan welke voorwaarden moet zijn voldaan, wil de grafiek van een somfunctie $S(x) = f(x) + g(x)$ raken aan de grafiek van een van de functies $f$ en $g$.

En zo kan ik nog wel een tijdje doorspelen. Maar dat gebeurt dan in een volgende Nieuwe Wiskrant.

---

## Het 31ste Nederlands Mathematisch Congres 1995

Het 31ste Nederlands Mathematisch Congres wordt op donderdag 20 en vrijdag 21 april 1995 gehouden in het Zernike complex van de Rijksuniversiteit Groningen, Paddepoel, Landleven 12, Groningen. Het Congres staat in 1995 in het teken van Johann Bernoulli: het is dan driehonderd jaar geleden dat Johann Bernoulli in Groningen als hoogleraar in de wiskunde werd aangesteld. Het programma omvat de volgende plenaire voordrachten:

a. Openingsvoordracht (donderdagochtend): Prof.dr. H.J.M. Bos (UU): *Johann Bernoulli over exponentiële krommen, ca. 1695 – vernieuwing en gewenning in de overgang van expliciete constructie naar impliciete functie.*
b. Johann Bernoulli lezing 1994-1995 (donderdagavond) Prof.dr. H.W. Lenstra Jr. (University of California, Berkeley): *Wiskunde en onbegrip.*
c. Slotvoordracht (vrijdagmiddag) Prof.dr. A.M. Cohen (TUE): *Computers: de (be)rekening gepresenteerd.*

Verder zijn er parallelle voordrachten op uitnodiging en symposia over:

a. Geschiedenis en maatschappelijke functie van de wiskunde. Thema: *Johann Bernoulli*
b. Logica en grondslagen
c. Discrete wiskunde
d. Algebra en Meetkunde: *Getaltheorie rond Kurt Mahler*
e. Stochastiek en Statistiek: *Kansrekening en Statistiek, Waarheen?*
f. Numerieke wiskunde: *Numerieke Wiskunde in de industrie*
g. Mathematische Fysica
h. Systeem- en regeltheorie: *Wiskunde uit de praktijk van systeem- en regeltheorie*
i. Industriële en toegepaste wiskunde: *Wiskunde toegepast in de industrie*
j. Wiskunde en ontwikkelingsvraagstukken.

***Lerarensymposium***
Speciaal voor leraren wordt op donderdagmiddag een Symposium gehouden, gecoördineerd door Dr. A. van Streun (RUG) en Dr. J. Top (RUG) over *De nieuwe wiskundeprogramma's in de bovenbouw havo-vwo, Tweede Fase*. Verder zijn er parallelle secties met voordrachten op aanmelding (duur 20 minuten), computerdemonstraties, films en een boekententoonstelling.

***Certificaat, aanmelding en kosten***
Voor deelname op donderdag wordt door het Instituut voor de Lerarenopleiding van de RUG een nascholingscertificaat toegekend. Aanmelding dient voor 1 april 1995 schriftelijk te gebeuren op onderstaand adres.
Gelieve de volgende gegevens te vermelden: naam en adres, geboortedatum en -plaats, de school waar u werkt, de dag(en) waarop u aanwezig zult zijn en of u op deze dag(en) een lunch wenst.
De inschrijvingskosten bedragen voor leraren *f* 15,-.
De lunch (facultatief) kost *f* 10,- per keer.
Het totaalbedrag dient gelijktijdig met de inschrijving te worden overgemaakt op girorekening 3012682 t.n.v. 31ste Nederlands Mathematisch Congres 1995 te Groningen.

Voor nadere informatie kunt u contact opnemen met Dr. J.A. van Maanen, secretaris Congrescommissie.
Congrescommissie Nederlands Mathematisch Congres 1995, p.a. Vakgroep Wiskunde, Rijksuniversiteit Groningen, Postbus 800, 9700 AV Groningen.
Tel.: 050-633977, E-mail: NMCongres@math.rug.nl