Reactie op het probleem van Sinterklaas

C. Krijnen
Hogeschool voor Economische Studies, Rotterdam

Probleem

Hoe groot is de kans dat er binnen een groep van n personen met 'lootjes trekken' voor Sinterklaasavond, één iemand zichzelf trekt?

Zelden zal een Sinterklaas de 'gemoederen zo in beroering gehouden hebben' als nu het geval is. Door een onwaarschijnlijke samenloop van toevalligheden werd aan mij medio december '93 dezelfde vraag voorgelegd waarover B. Boon in het artikel 'Sinterklaas en het getal e' in de *Nieuwe Wiskrant* en J. Breeman in het artikel 'De wiskunde van Sinterklaas' in *Euclides* het hebben.

Als statistiekdocent aan de Hogeschool voor Economische Studies te Rotterdam werd ik geconfronteerd met dit probleem doordat een student dacht dat de kans dat iemand zichzelf trok $\frac{1}{n}$ was. Dat bracht mij aan het twijfelen, daar ik meteen aan vroeger dacht en wij, met ons talrijk gezin (zo'n 15 personen), tijdens het trekken van lootjes redelijk vaak opnieuw moesten beginnen. En zeker niet ongeveer één keer in de vijftien jaar!
Aangezien mijn manier duidelijk afwijkt van de methodes die B. Boon en J. Breeman aanhouden, lijkt het me zinvol nogmaals stil te staan bij deze problematiek.

Een opmerking vooraf
Uit de literatuur is bekend dat dit type probleem valt onder het begrip dérangementen. Een *dérangement* is een permutatie van objecten waarbij geen der objecten op de plaats blijft. Met behulp van het principe van inclusie en exclusie is een formule af te leiden waarmee direct aangetoond kan worden dat de voorgaande kans inderdaad $\frac{1}{e}$ bedraagt. Daar wil ik echter nu niet op ingaan.
In de 'historische' literatuur staat het probleem van dérangementen bekend onder de naam: 'problème des rencontres' (Montmort, 1708).

Nogmaals een korte uitleg

Zoals al eerder gememoreerd gaat het om het aantal permutaties waarin geen enkel element op zichzelf blijft liggen. Noem dit aantal $f(n)$ (n is het aantal personen)[1]. Dit aantal delen door het totaal aantal permutaties geeft de gevraagde kans.

Dus: P (gevraagd) $= \dfrac{f(n)}{n!}$

Enige waarden van $f(n)$ zijn:

$n = 1$: $f(n) = 0$	Eén persoon trekt altijd zichzelf.
$n = 2$: $f(n) = 1$	Persoon 1 trekt persoon 2; persoon 2 trekt persoon 1. Eén mogelijkheid. Bondig: $1\ 2 \rightarrow 2\ 1$.
$n = 3$: $f(n) = 2$	$1\ 2\ 3 \rightarrow 2\ 3\ 1$ of $1\ 2\ 3 \rightarrow 3\ 1\ 2$. Schrijf alle permutaties op en bekijk in welke permutaties elementen op hun plaats blijven.

Voor $n = 4$ wordt deze aanpak al bewerkelijk. Door een handige zienswijze kunnen we $f(n)$ voor $n = 4$ toch uitrekenen.
We redeneren als volgt:
In de volgorde 1 2 3 4 nemen we aan dat één element blijft liggen, dus een dekpunt is; de overige drie elementen mogen *niet* op hun plaats blijven staan.
Dan bestaan er $\binom{4}{1} f(3)$ van zulke permutaties.
Daarna moeten twee elementen 'dekpunt' zijn. Er zijn $\binom{4}{2} f(2)$ permutaties met twee 'dekpunten'.

Zo voort redenerend zijn er $\binom{4}{3} f(1)$ permutaties met drie dekpunten en $\binom{4}{4} f(0)$ met vier dekpunten.

Dan geldt:
$f(4)$ = totaal aantal permutaties – het aantal permutaties met dekpunten:

$$f(4) = 4! - \binom{4}{1} f(3) - \binom{4}{2} f(2) - \binom{4}{3} f(1) - \binom{4}{4} f(0)$$

$$= 24 - 4 \times 2 - 6 \times 1 - 4 \times 0 - 1 \times 1 = 9.$$

Opmerking:
In de berekening nemen we aan dat $f(0) = 1$. Dit oogt misschien wat vreemd, maar dergelijke afspraken komen we wel vaker tegen. Men denke aan $0! = 1$.

De eerste 10 waarden voor $f(n)$

Op soortgelijke manier berekenen we na enig rekenwerk en met behulp van een rekenmachine de eerste tien waarden voor $f(n)$. We krijgen de volgende tabel:

n	$f(n)$	gevraagde kans
1	0	0
2	1	0,5
3	2	0,3333
4	9	0,375
5	44	0,3666
6	265	0,3681
7	1854	0,3679
8	14833	0,3679
9	133496	0,3679
10	1334961	0,3679

Mijn werkwijze laat zich vertalen in de volgende uitdrukking:

$$f(n) = n! - \binom{n}{1} f(n-1) - \binom{n}{2} f(n-2) - \ldots - \binom{n}{n} f(n-n) \ldots \qquad (\#)$$

Of bondiger:

$$f(n) = n! - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} f(n-i)$$

De gevraagde kans wordt dan:

$$\frac{f(n)}{n!} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot f(n-i)}{n!} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(n-i)}{i!\,(n-i)!}$$

Het is mogelijk in de laatste uitdrukking $f(n-i)$ te vervangen door een uitdrukking met $f(n-i-j)$! Hierbij wordt er dus een nieuwe index j toegevoegd, hetgeen zal resulteren in 'geneste' sommaties. Dat zou te ver voeren op dit moment, maar het opent misschien wel perspectieven om aan computertoepassingen te denken. De lezer(es) wordt bij deze uitgedaagd!

Stelsel vergelijkingen

We kunnen uitdrukking (#) ook op een andere manier beschouwen.
Als we voor n waarden gaan invullen dan staat er in feite een stelsel van vergelijkingen:

$$f(n) = n! - \binom{n}{1} f(n-1) - \binom{n}{2} f(n-2) - \ldots - \binom{n}{n} f(0)$$

$$f(n-1) = (n-1)! - \binom{n-1}{1} f(n-2) - \binom{n-1}{2} f(n-3) - \ldots$$

$$f(n-2) = (n-2)! - \binom{n-2}{1} f(n-3) - \binom{n-2}{2} f(n-4) - \ldots$$

$$\vdots$$

$$f(1) = 1! - \binom{1}{1} f(0)$$
$$f(0) = 0!$$

Dit stelsel herschrijven we tot:

$$n! = \binom{n}{0} f(n) + \binom{n}{1} f(n-1) + \binom{n}{2} f(n-2) + \ldots + \binom{n}{n} f(0)$$

$$(n-1)! = \binom{n-1}{0} f(n-1) + \binom{n-1}{1} f(n-2) + \binom{n-1}{2} f(n-3) + \ldots$$

$$(n-2)! = \binom{n-2}{0} f(n-2) + \binom{n-2}{1} f(n-3) + \binom{n-2}{2} f(n-4) + \ldots$$

$$\vdots$$

$$1! = \binom{1}{0} f(1) + \binom{1}{1} f(0)$$

$$0! = \binom{0}{0} f(0)$$

Met de regel van Cramer is $f(n)$ uit dit stelsel op te lossen. We krijgen de volgende uitdrukking voor $f(n)$:

$$f(n) = \frac{\begin{vmatrix} n! & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \ldots & \ldots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ n-1! & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \ldots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} \\ n-2! & 0 & \binom{n-2}{0} & \binom{n-2}{1} & \ldots & \binom{n-2}{n-3} & \binom{n-2}{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \binom{n-n}{0} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \ldots & \ldots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ 0 & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \ldots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} \\ 0 & 0 & \binom{n-2}{0} & \binom{n-2}{1} & \ldots & \binom{n-2}{n-3} & \binom{n-2}{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \binom{n-n}{0} \end{vmatrix}}$$

In de noemer van de bovenstaande uitdrukking herkennen we de driehoek van Pascal. Bovendien kan eenvoudig via volledige inductie bewezen worden dat de noemer de waarde 1 heeft, daar op de hoofddiagonaal alleen enen staan en onder de hoofddiagonaal alleen nullen.

Dan geldt voor $f(n)$:

$$f(n)=\begin{vmatrix} n! & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ (n-1)! & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} \\ (n-2)! & 0 & \binom{n-2}{0} & \binom{n-2}{1} & \cdots & \binom{n-2}{n-3} & \binom{n-2}{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0! & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n-n}{0} \end{vmatrix}$$

Een rekenvoorbeeld voor $n = 4$ werkt verduidelijkend: De vet en cursief gedrukte getallen in de matrices worden gebruikt om de matrices af te wikkelen naar 3 bij 3 matrices.

$$f(4)=\begin{vmatrix} 4! & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ 3! & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ 2! & 0 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ 1! & 0 & 0 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\ 0! & 0 & 0 & 0 & \binom{0}{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \boldsymbol{1} & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{1} \end{vmatrix} =$$

$$\boldsymbol{1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{vmatrix} + \boldsymbol{1}\cdot\begin{vmatrix} 24 & 4 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ \boldsymbol{1} & 0 & 0 & \boldsymbol{1} \end{vmatrix} = -\boldsymbol{1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$-1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{1}\cdot\begin{vmatrix} 24 & 4 & 6 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3+4+-4+12=9$$

Conclusie

Zonder enige twijfel is de methode die B. Boon en J. Breeman aanhouden een minder bewerkelijke manier om tot resultaat te komen. Bovendien leent hun manier zich ervoor om een aantal zaken te generaliseren en tot algemeen geldende conclusies te komen met betrekking tot convergentie naar $\frac{1}{e}$. De methode die ik hier uiteengezet heb is op dit moment zeker niet afgerond en leent zich misschien ook voor een bewijs van convergentie. Andermaal wordt hier de lezer(es) uitgedaagd.[2]
Mijn bedoeling is om te laten zien dat je op een andere manier toch tot gelijkluidende resultaten kunt komen waarbij ik het eindantwoord dat $f(n)$ met een matrix te berekenen is toch heel aardig vind!

Noot

[1] In het artikel van Boon wordt gesproken over $Z(n)$ in plaats van $f(n)$. Beide uitdrukkingen betekenen hetzelfde.

[2] Vlak nadat ik dit artikel had ingezonden werd ik er door een collega, de heer P. Wolters, op geattendeerd dat hij een bewijs gevonden had voor de convergentie naar $\frac{1}{e}$.

Literatuur

B. Boon (1994). Sinterklaas en het getal e. *Nieuwe Wiskrant, 13* (3), 25-27.

J. Breeman (1993). De wiskunde van Sinterklaas. *Euclides, 69* (4), 114-115.

Cursusboek Open Universiteit *Combinatoriek*, deel 1 uit de serie over Discrete wiskunde, leereenheid 6, p. 153 e.v.

Themadag Faculteit Wiskunde en Informatica, Universiteit Utrecht

Het is inmiddels een jaarlijks terugkerend evenement geworden: de themadag van de faculteit Wiskunde en Informatica aan de Universiteit Utrecht. Dit jaar zal deze dag plaatsvinden op 25 maart 1995.
De bedoeling van de dag is scholieren van 4 en 5 VWO kennis te laten maken met het soort onderzoek dat aan de faculteit gebeurt op het gebied van wiskunde, computational science en informatica. De nadruk van de dag ligt op een toegankelijke presentatie van onderzoeksonderwerpen en het verband met onze alledaagse werkelijkheid. Ook docenten zijn nadrukkelijk van harte welkom op deze dag.
Door de bijdrage van het Freudenthal instituut aan het programma zullen ook onderwerpen die specifiek ingaan op reken- en wiskundeonderwijs aan de orde komen.
Als onderwerp van de themadag is dit jaar gekozen voor modelvorming en de wereld van de 'virtual reality'. Hoe verhouden modellen zich tot de werkelijkheid; hoe werken we ermee; waarvoor worden ze gebruikt? Leerlingen kunnen ook zelf aan de slag in de workshops en in het pauzeprogramma. Het wordt een dag waarop veel 'te doen' is.
Begin februari krijgen alle wiskundesecties van het VWO een affiche en opgaveformulieren toegestuurd. Ontvangt u geen materiaal, of wilt u het materiaal op naam toegezonden krijgen, belt u dan de faculteit Wiskunde en Informatica, Elise Goeree: 030 - 53 14 20 (op werkdagen tot 16.00 uur; niet op vrijdag).