Typisch graphic calculator

J. van den Brink / M. Doorman
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Inleiding

Twee jaar lang is in VWO en HAVO klassen (bovenbouw) van twee scholen, het Cals College in Nieuwegein en het Liemers College in Zevenaar, onderzoek gedaan naar het gebruik van de grafische rekenmachine in wiskundelessen. Vier bundels zijn ontworpen en tal van observaties uit de klassen verzameld. In het eindverslag van dit project (Doorman e.a., 1994) staat de werkwijze nader beschreven. Eén van de observatoren is geïnterviewd met de vraag welke verschijnselen hij kenmerkend vond.

In dit artikel beschrijven we met behulp van dit interview en de observatieverslagen enkele typerende verschijnselen over het gebruik van de grafische rekenmachine. Reflecties op de observaties en de uitgangspunten waren nodig om boven water te brengen welke invloed de grafische rekenmachine heeft gehad op leerstof en leerlinggedrag. De grafische rekenmachine kan grafieken tekenen; dat is een vorm van visualisatie. Maar dit gegeven is nog niet echt kenmerkend. Typisch voor de grafische rekenmachine is de dynamiek die in de visualisatie kan worden gebracht. Met de grafische rekenmachine kan men bijvoorbeeld inzoomen en uitzoomen op een grafiek of de gevolgen van een kleine verandering in de formules bekijken. Juist deze dynamiek maakt wijzigingen in het onderwijs mogelijk.
De typerende verschijnselen hebben we ondergebracht in drie rubrieken: integratie, dynamiek en onderzoek. We zullen deze rubrieken toelichten en daarbij verwijzen naar observaties.

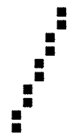
Integratie

'Integratie' houdt onder andere een verstrengeling in van verschillende wiskundegebieden. Denk aan de meetkundige interpretaties van een wiskunde-probleem, de algebraïsche formulering ervan en de numerieke benaderingen van oplossingen. Bij het gebruik van de grafische rekenmachine word je gedwongen de verschillende gebieden te koppelen. In de klas ging dat echter niet zonder slag of stoot. De leerlingen waren aanvankelijk geneigd om de verschillende gebieden geïsoleerd te houden. Ze kozen één benadering. Maar de grafische rekenmachine en vooral de ontworpen vraagstukken verplichtten hen zich meer op de verstrengeling te richten en afwisselend in verschillende gebieden te werken. Dat leverde storingen en verrassingen op, nieuwe inzichten en uitbreiding van begrippen. Het leek wel een tweede soort 'integratie': het inpassen van de machine binnen de kennis en de persoonlijke opvattingen van elke leerling afzonderlijk. Hoe kwamen deze vormen van integratie tot stand? We wezen al op geschikte opgaven en ontdekkingen van leerlingen. Maar ook de eigenschappen van de machine zelf speelden hierbij een belangrijke rol.

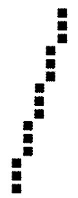
Integratie door beperkingen van de grafische rekenmachine
De grafische rekenmachine kent zijn beperkingen. Het scherm van de machine is begrensd. Getallen worden daarom afgekort, numerieke afschattingen zijn nodig. Ook het tekenscherm van de grafische rekenmachine is begrensd. Het is bovendien opgebouwd uit 'blokjes'. Het behouden van een totaal beeld van een grafiek, in zowel micro- als macroscopisch opzicht, vormt daardoor een typische problematiek bij de grafische rekenmachine. Enige voorbeelden.

Voorbeeld 1
De top van de parabool met vergelijking Y=X(5-X) is exact (2.5; 6.25). Maar op de grafische rekenmachine wordt voor de top (2.44; 6.19) gevonden.*
'Wat denk je dat het echt is?' vraagt de leraar nog. '2.44', meent een leerling, 'Dat zegt hij toch', verwijzend naar de grafische rekenmachine. De rekenmachine kent zijn afschattingen, de algebra zijn precisie. De leerling moet de verbanden leggen.

Voorbeeld 2
Een andere beperking van de grafische rekenmachine is dat een lijn op het scherm met behulp van blokjes wordt weergegeven. Bij inzoomen verandert de lijn in een bijzondere trapfunctie. Een leerling ontdekte daardoor een 'blokjesmethode' voor de helling van de rechte lijn.

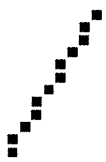


'Kijk', zegt de leerling, 'Het zijn steeds twee boven elkaar, dus de hellingcoëfficiënt is 2'.
Het gaat om de helling van de functie $g(x) = x^3 + 2$ voor $x = -1$. Maar die is 3 in dat punt. De x-as en de y-as hebben blijkbaar niet dezelfde schaal. En de observator raadt daartoe aan om ZOOM SQUARE *te doen. Dat geeft inderdaad:*



De helling lijkt dus 3 te zijn in punt (-1, 3). In het vervolg van de les gaat het steeds zo: de leerling nadert de grafiek tot heel dichtbij, gebruikt ZOOM SQUARE *en telt dan de blokjes.*

De methode lijkt een goed uitgangspunt om het differentiequotiënt als verhouding tussen verschillen op de y-as en de x-as grafisch voor te stellen. Daarbij moet wél worden bedacht dat deze methode van de machine afhangt. Er ontstaan nieuwe vraagstukken: hoe ziet bijvoorbeeld een helling van 1.5 eruit op het scherm van hele 'blokjes'?

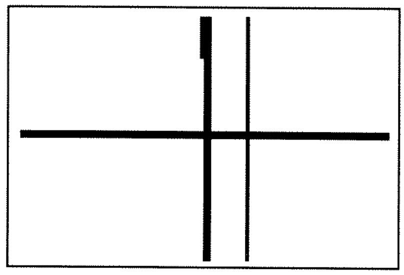


Hoe moet het met zeer grote getallen of met bijvoorbeeld 1.4142 als richtingscoëfficiënt?
Het afkorten is iets waar elke rekenmachine direct de aandacht op vestigt. De afkorting zorgt dat talloze (overaftelbaar veel) ongelijke breuken aan elkaar gelijk worden gesteld (zie Van den Brink, 1990). De grafische rekenmachine met zijn tekenfaciliteiten biedt voor deze problemen ook grafische interpretaties aan (zoals deze 'blokjesmethode') die het inzicht kunnen bevorderen.

Voorbeeld 3
Niet alleen de opbouw van het scherm in blokjes, ook de begrenzing van het scherm kan problemen opleveren. Zo observeerden we een leerling die bij het inzoomen op een scherm met twee grafieken, maar één grafiek op het scherm overhield. Tot onze verbazing wist hij niet meer waar de andere grafiek gebleven was. Spoorloos.

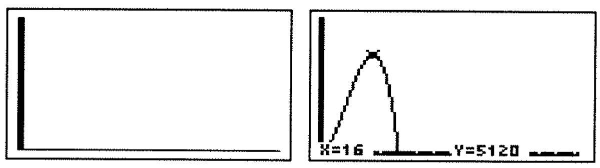
Eén van de eerste problemen die leerlingen tegenkomen bij het laten tekenen van een grafiek is het beperkte beeld dat je op de grafiek hebt. Je moet eigenlijk direct bedenken welk domein en bereik interessant zijn bij het gegeven probleem, anders is vaak niets in de grafiek te herkennen. Je zit er te dicht op of er te ver vanaf.
In de volgende observatie is een leerling bezig met het bepalen van de optimale inhoud van een doos (een opgave uit het pakket *Optimaliseren*). De inhoud is afhankelijk van een rechthoekig gebogen draad die de doos langs de ribben versterkt. De hoogte van de doos is x. Lengte en breedte worden erin uitgedrukt.

Voorbeeld 4
Hij heeft de grafiek laten tekenen van de inhoud van de doos als functie van x. Op het scherm is dit zichtbaar:



Y1 = X*(120-5X)*X/2

Hij zegt erbij: '... en ik heb de range al van -100 tot 100 voor x en voor y.' De observator vraagt wat x voorstelt. 'Een lengte,' antwoordt hij, 'oh ja, die kan natuurlijk niet negatief zijn.' Hij verandert de range voor x van 0 tot 1000 en voor y van 0 tot 1000. Het volgende verschijnt op het scherm (links):



Uiteindelijk vindt hij een geschikte range voor x van 0 tot 80 en voor y van 0 tot 7000 (rechts). Toevallig geeft deze met TRACE *precies het maximum voor $x = 16$.*

De verschillende schalen op de x- en de y-as had de leerling natuurlijk met enig nadenken ook uit het vraagstuk kunnen halen. Nu kwam hij erop door gebruik te maken van de grafische rekenmachine. Zonder de grafische rekenmachine gaat gewoonlijk het onderzoek van een functie vooraf aan het tekenen van de grafiek. Bij dit functie-onderzoek bereken je coördinaten van nulpunten en toppen of bepaal je transformaties vanuit een standaardgrafiek. Met deze gegevens wordt een globaal beeld van het domein en bereik bepaald.

Bij het gebruik van de grafische rekenmachine ontbreken deze gegevens en wordt aanvankelijk lukraak een plaatje gemaakt. De leerlingen moeten om een geschikte grafiek te krijgen zowel een goed domein, als een geschikt bereik afschatten met de gegevens in de probleemsituatie. Door die werkwijze krijgt het bepalen van bereik en domein zin. Bovendien helpt de grafische rekenmachine de leerling om zich in stapjes het probleem te 'realiseren'. Dat is een belangrijke rol die de grafische rekenmachine speelt in het 'realistisch' wiskundeonderwijs. Maar anderzijds kan de grafische rekenmachine veel aandacht en energie van de leerling absorberen, waardoor de vraagstelling of de oplossingsstrategie uit het oog verloren wordt.
De terugkoppeling naar de oorspronkelijke context (van het grafiekje op de grafische rekenmachine naar het verhaal) blijft moeilijk voor leerlingen.

Voorbeeld 5

Sofie:	*'Moet je nu van alle vier de grafieken het maximum zoeken?'*
Docent:	*'Waar zijn we eigenlijk mee bezig?'*
Sofie:	*'Optimaliseren* (op zo'n toon van stel niet van die stomme vragen)'
Docent:	*'Wat stellen die grafieken voor?'*
Sofie:	*'Inhouden.'*
Docent:	*'Allemaal inhouden?'*
Sofie:	*'Y1 is a, Y3 is de hoogte .....'*
Docent:	*'Y4 is de capaciteit, daar moet je naar kijken. Je kunt ook alleen Y4 tekenen.'*

Dit probleem, dat natuurlijk altijd al bestaan heeft zodra er met contexten gewerkt werd, komt echter explicieter aan de orde met de grafische rekenmachine. De grafische rekenmachine is immers zelf ook een context, een wereld op zichzelf, die de leerling in beslag neemt. Hij dwingt leerlingen tot integratie van verschillende representaties: de numerieke, algebraïsche en meetkundige. Hij stelt numerieke afrondingen tegenover exacte oplossingen.

Inventiviteit tot integreren

Een andere punt waarin de integratie aan bod komt, is de vaardigheid die leerlingen aan de dag moeten leggen om de verschillende problemen (contextuele, meetkundige en algebraïsche vraagstukken) te vertalen in de taal van de grafische rekenmachine. Het eist een zekere inventiviteit van leerlingen om in een contextprobleem de toepassing van de grafische rekenmachine te zien. Leerlingen komen meestal niet op het idee hoe de machine hen een stap verder kan helpen. Dit onvermogen staat los van handigheid in de bediening van de grafische rekenmachine. De vaardigheid om creatief toepassingsmogelijkheden te zien voor de grafische rekenmachine ontwikkelt zich slechts langzaam temidden van regels die de grafische rekenmachine en die het contextprobleem stellen. Demonstraties en voorbeeld spelen hierin ons inziens een belangrijke rol.

Kenmerkend voor de ontwikkeling van de 'inventiviteit' is dat leerlingen eerst lukraak vermoedens etaleren die door de grafische rekenmachine beloond of afgestraft worden. Een voorbeeld uit de lesverslagen.

Voorbeeld 6
Een leerling is bezig met $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 1000}{3x^2 + 1}$

Hij heeft de noemer op 0 gesteld (moet niet) en die vervolgens (fout) opgelost: $3x^2 + 1 = 0$ *geeft* $x = -\frac{1}{9}$. *De observator helpt: 'Maar x moet naar oneindig.' De leerling begrijpt het niet. De observator: 'Vul eens een groot getal in, bijvoorbeeld x = 1 miljoen.' Na wat rekenfouten komen ze tot de conclusie dat de functiewaarde dan in de buurt van* $\frac{2}{3}$ *moet liggen. De grafiek op de grafische rekenmachine verrast de leerling, want hij dacht dat het een hyperbool zou zijn. Met* TRACE *naar rechts. De grafiek schuift mooi mee en de* $\frac{2}{3}$ *lijkt te kloppen.*
De observator: 'En wat gebeurt er als x in de buurt van 0 komt?' Leerling suggereert: 'Verticale asymptoot?' Na wat heen-en-weer geschuif met TRACE *en* ZOOM *rond het punt (0, 1000) wordt de leerling er van overtuigd dat de y-as geen asymptoot is.*
Hij vindt de manier waarop de TI gebruikt wordt wel verhelderend, maar kwam tot nu toe zelf niet op het idee om dat zo te doen. Misschien een volgende keer?

Na de ontdekking van het gedrag van de grafiek voor x in de buurt van nul moet natuurlijk ook weer het verband met de formule worden gelegd. Aan de formule zie je direct dat de y-as geen asymptoot is. De grafische rekenmachine toont de gebruiker het verband tussen de verschillende gebieden; de algebra waarmee de functies zijn geformuleerd en de grafische interpretaties daarvan. Daardoor gaat de leerling door vallen en opstaan als vanzelf verschillende onderwerpen aan elkaar koppelen. Een dergelijke integratie vraagt om inventiviteit van de leerling en, zo is onze ervaring, eist tijd.

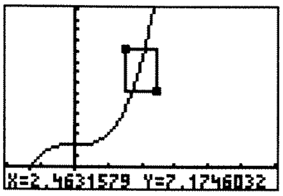
Integratie van het gebruik van de grafische rekenmachine in het onderwijs

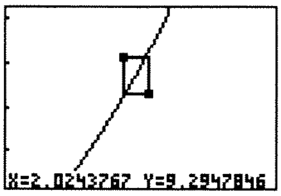
Het gebruik van de grafische rekenmachine wordt in de ontworpen pakketten steeds aan de hand van een wiskundig vraagstuk aangeleerd. Daarbij wordt terloops de handleiding aangeboden. Wat men nodig had aan kennis over de knoppen, hoe je iets uitvoert op de grafische rekenmachine, kwam tijdens het oplossen ter sprake. Dit bevorderde de integratie van het gebruik van de grafische rekenmachine in het doen van wiskunde.

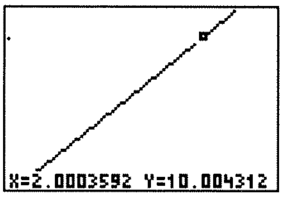
Ook viel op dat leerlingen van een gebied (meetkundig of algebraïsch) al het één en ander moesten kennen, wilden ze de grafische rekenmachine effectief kunnen toepassen. De grafische rekenmachine geeft zelf geen aanwijzingen voor het gebruik. Leerlingen moeten een redelijk overzicht van de situatie hebben om te begrijpen hoe de grafische rekenmachine hen van dienst kan zijn.

Dynamiek

De grafische rekenmachine levert het onderwijs een handzame tekenmachine. Maar het is meer dan alleen maar een mogelijkheid tot visualiseren. Kenmerkend voor de visualisatie met de grafische rekenmachine is namelijk de dynamiek die aan een plaatje wordt toegevoegd.
De dynamiek is een hulpmiddel bij de interpretatie en het oplossen van een probleem. De interpretatie vraagt vaak inzicht in de formules, maar soms ook meetkundig inzicht in de situatie. Met name het in- en uitzoomen op het beeld, waarbij wijzigingen in schaal- en hoekgrootte optreden, waarbij kromme lijnen recht lijken te worden: 'locally straight' (Tall, 1991), vragen om meetkundig inzicht van de leerling.



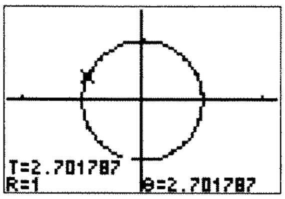


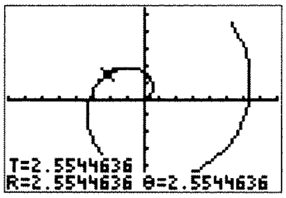


Tijdens de invoering van de zakrekenmachine vond binnen het rekenen een verschuiving plaats van algoritmisch rekenen naar schattend rekenen (Van den Brink, 1992). Zo zal onder invloed van de grafische rekenmachine ook een verschuiving plaats vinden binnen het functie-onderzoek van een exacte vaststelling naar een schetsend tekenen met behulp van kennis over formules en standaardgrafieken (Kok, 1994).
De directe feedback die de grafische rekenmachine levert op een poging van de leerling, maakt een onmiddellijke reflectie mogelijk. Deze afwisseling van experiment en reflectie is voor leerlingen belangrijk bij de beeld- en begripsvorming, kortom bij het leren van wiskunde.

Dynamische visualisatie
De grafische rekenmachine wordt door de leerling als tekenmachine gebruikt. Hij toont de leerling het voordeel van een grafische representatie, een eerste beeldvorming van het probleem. De grafiek geeft veel informatie over de interessante aspecten van het probleem: de aanwezigheid van maxima, minima, nulpunten, asymptoten en buigpunten kun je in één oogopslag constateren. De grafische rekenmachine kan de rem bij leerlingen wegnemen om bij een vraagstuk 'eventjes snel' een schetsje te maken. Hij kan ook een beweging in een grafiek weergeven dat het inzicht bevordert.

Voorbeeld 7
Begin goniometrie. Poolcoördinaten zijn geïntroduceerd. Met de grafische rekenmachine laten we tekenen: X = cos T, Y = sin T. De machine staat op Polar. Met TRACE *loopt het spinnetje over de cirkel. Onderin het scherm staan de waarden van t en de coördinaten van de positie van het spinnetje in R en θ.*





Tijdens het rondgaan van het spinnetje roept David: '$T = \theta$!'. De observator springt hierop in. Hij legt nogmaals het verband tussen de variabelen uit (tijd = hoek en $R = 1$) en $\cos^2 T + \sin^2 T = 1$. Hierna wordt voor $X = T\cos T$ en $Y = T\sin T$ de grafiek getekend: een spiraal. Dan schuiven ze met het spinnetje langs de grafiek. Wat valt op? $R = T = \theta$. Uitleg?
$R = d(O,P) = \sqrt{(T^2\cos^2 T + T^2\sin^2 T)} =$
$\sqrt{(T^2(\cos^2 T + \sin^2 T))} = \sqrt{T^2} = T \ (T > 0)$.

Het doorlopen van de kromme is essentieel om het verband tussen de tijd en de poolcoördinaten te herkennen. Zonder deze dynamiek is het onderwerp veel moeilijker te doorgronden.

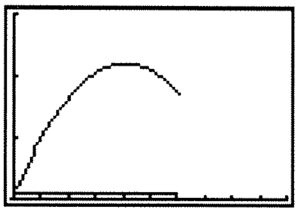
Dynamiek in de opgaven
Contextproblemen met een dynamisch karakter liggen voor de hand om met de grafische rekenmachine te worden uitgevoerd. Dit heeft ook in toenemende mate de ontwerpers aangesproken, hetgeen blijkt uit de titels van enkele pakketten die achtereenvolgens in het project zijn ontworpen: *Optimaliseren*, *Grafiekenalgebra* en *Bewegingen in het vlak*. In het pakket *Optimaliseren* worden functies opgebouwd uit andere functies en worden bundels van grafieken beschouwd waarvan de 'statische toppen' met elkaar in verband worden gebracht. Het opbouwen van functies uit andere functies is in *Grafiekenalgebra* tot hoofdonderwerp gekozen: eigenschappen van som-, verschil- en produktgrafieken worden met de grafische rekenmachine bestudeerd. En tenslotte komt de dynamiek in het onderwerp parameterkrommen aan de orde in het pakket *Bewegingen in het vlak*.

Dynamiek in operaties
Met de grafische rekenmachine kunnen op vele manieren operaties op grafieken en formules worden uitgevoerd. We zetten ze op een rijtje.

a. Het construeren en onderzoeken van som- en produktfuncties samengesteld uit gegeven functies. Voor veel leerlingen is het verrassend dat het 'produkt van twee rechte lijnen' geen rechte lijn oplevert maar een parabool.

b. Het stapsgewijs (systematisch) veranderen van formules om een beoogde grafiek te krijgen (in het kiezen van andere parameters en het tekenen van bundels).
c. De beweging waarin een grafiek van een parameterkromme wordt getekend kun je vertragen, versnellen of tegengesteld laten uitvoeren. Een sprekend voorbeeld is het vraagstuk waarin een fietser al fietsend een steen opwerpt. De somfunctie van de kogelbaan (X_{1T}, Y_{2T}) en de weg van de fietser levert een scene op het scherm op waarbij de fietser door een voltreffer geveld lijkt te worden.

$:X_{1T}=1$
$:Y_{1T}=1+20T-5T^2$
$:X_{2T}=20T$
$:Y_{2T}=1$
$:X_{3T}=X_{1T}+X_{2T}$
$:Y_{3T}=Y_{1T}+Y_{2T}$



Zo leent de grafische rekenmachine zich ook uitstekend voor het verkennen van valbewegingen in de natuurkundeles. Ton Hengeveld en Hans Dompeling hebben hiertoe voor de vierde klas lesmateriaal ontwikkeld (Hengeveld, 1994).
d. Onderzoek van grafieken door inzoomen en uitzoomen, veranderingen in de range aanbrengen en met TRACE coördinaten aflezen.

Onderzoek

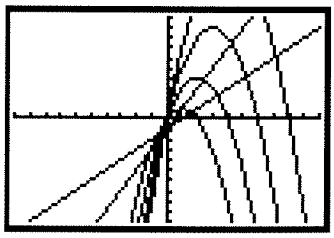
Het werken met de grafische rekenmachine is in wezen een individuele zaak. Onze ervaring is dat klassikaal werken in sommige situaties goed past, zoals bij uitleg en nabespreking van opgaven (Dijksterhuis, 1993). Andere situaties, bijvoorbeeld het doen van onderzoek, worden gekenmerkt door individueel werken of in groepjes van twee.
Het onderzoek dat de leerlingen ondernamen accentueerde het belang van
- de exploratie door leerlingen
- het spel en spelen met de grafische rekenmachine.

Explorerende activiteiten
Met name het eigen onderzoek van functies wordt sterk gestimuleerd door de grafische rekenmachine. Eigen onderzoek levert nieuwe methoden op. We wezen al op de 'blokjesmethode'.
Een ander voorbeeld van onderzoek door leerlingen is een opdracht waarbij leerlingen werd gevraagd derdegraads krommen te classificeren. Tijdens dit onderzoek bedacht een groepje leerlingen een 'regel': 'Als a, b, c, en d in de vergelijking $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ groter dan nul zijn dan loopt de grafiek van linksonder naar rechtsboven en als minimaal één getal negatief is dan loopt de grafiek van linksboven naar rechtsonder'. Toen ze het verband met de hellinggrafiek gingen onderzoeken vonden ze al snel dat de waarde van d er niet toe deed. Daarmee konden ze hun regel bijstellen (Drijvers, 1993).
De nieuwe mogelijkheden van de machine kunnen voor leerlingen zeer aantrekkelijk zijn en heftige reacties uitlokken. We hadden in het geheel niet verwacht dat leerlingen zo op onderzoek uit wilden gaan.

Voorbeeld 8
Met de demoset worden voor de parameter u=1, 2, 3 en 4 grafieken getekend op de overheadprojector. Voor het tekenen van meer grafieken wordt een programma gebruikt dat de docent heeft ingevoerd. Zodra dat op het scherm verschijnt, verloopt de les heel anders dan we verwachtten. Omdat leerlingen de machines al hebben, beginnen ze allemaal fanatiek het programma over te nemen, met de nodige problemen: Hoe kom je in de programma editor? Hoe krijgt het programma een titel? Hoe krijg je Label, If, Goto, <? En intussen roepen ze door elkaar: 'Is dit belangrijk? Moeten we dit allemaal onthouden?' Hoewel de leraar sussend zegt dat ze het helemaal niet hoeven te kunnen, gaan ze toch ijverig door tot het bij iedereen werkt. Maar dan is het wel tien minuten later en hebben we plaatselijk de nodige problemen op moeten lossen. De leraar probeert het terug te pakken: 'Nu weer verder met de wiskunde'. Een leerling op de achterste rij: 'Dit is juist wiskunde!'

De mogelijkheden van de grafische rekenmachine stimuleren een onderzoekende houding bij leerlingen. Veel vermoedens kunnen snel worden gecontroleerd met betrekkelijk weinig moeite. Het blijkt dat leerlingen soms ongevraagd uitgedaagd worden om zo verbanden te onderzoeken. Hieronder volgt een voorbeeld uit een les met het pakket *Optimaliseren*.

Voorbeeld 9
Een leerling heeft voor a = 2, 4, 6 en 8 de grafieken van x(a-x) getekend. Ze zegt: 'Door de toppen gaat een lijn.' Ik vraag welke lijn en ze antwoordt x – 1, ik wijs er op dat ze die met DrawF kan laten tekenen, wat ze direct doet. Oh nee, hij moet steiler... 2x – 1 dan. Nee ook niet. Ze kijkt naar het scherm:



Ik vraag naar de coördinaten van een top. Ze zoekt een top en vindt (4, 16). 'Misschien is het wel een parabool, maar dan moet hij aan de negatieve kant weer omhoog gaan'. Ze laat x(-5 – x) tekenen. En inderdaad de top ligt weer boven de x-as. Uiteindelijk probeert ze DrawF x^2, en ja, daarop liggen de toppen.

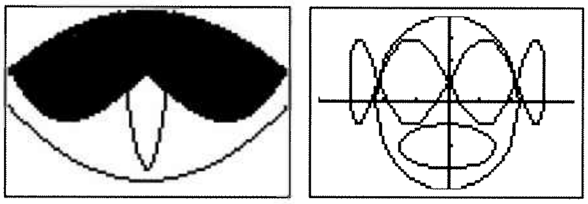
De volgende stap is om naar een verklaring van die x^2 te vragen. De waarde van het hieraan voorafgaande trial-and-error proces is dat leerlingen in ieder geval het verband zelf al gevonden hebben. Dat motiveert. Het geven van het bewijs dat hun poging de juiste is, is vervolgens een typische wiskunde B activiteit (zie Kindt, 1993).

Spel en spelen met de grafische rekenmachine

De leerlingen spelen vaak met de grafische rekenmachine. Soms ter oefening van een vaardigheid, soms ter controle. Maar vaak ook met een zelf bepaald doel voor ogen. Het spelen wordt daardoor minder vrijblijvend; het vindt meestal op verschillende niveaus plaats.

Om bijvoorbeeld een plaatje te maken op het scherm naar eigen wens, is vergaande kennis nodig van de grafische rekenmachine en van functies. Allerlei gebruiksregels komen daarbij aan de orde. De wiskundige kennis van karakteristieken van functies, bijvoorbeeld, wordt danig uitgebreid en toegepast.

Op beide experimenteerscholen hebben leerlingen geprobeerd om met grafieken een gezicht te tekenen. Het linker gezichtje is ontstaan op het Cals College (Doorman, 1993) en het rechter gezichtje, opgebouwd uit parameterkrommen, komt van het Liemers College.



Samenvatting

Tenslotte vatten we nog eens de drie verschijnselen samen die we typisch vonden voor het gebruik van de grafische rekenmachine: de integratie, de dynamiek en het onderzoek.

De integratie betrof onder andere verschillende gebieden: numeriek versus exact, grafiek versus formule, algebraïsch/analytisch versus meetkundig. Ze worden door de grafische rekenmachine geïntegreerd. Denk aan de meetkundige interpretaties van een probleem, de algebraïsche formulering ervan en het gebruik van de grafische rekenmachine daarbij. De grafische rekenmachine koppelt die verschillende gebieden. Dit levert verrassingen op in de klas. Inzicht in het verband tussen die verschillende gebieden wordt op een nieuwe manier verkregen.

Kenmerkend voor de grafische rekenmachine is ook de dynamiek in allerlei vormen: de dynamische visualisatie bijvoorbeeld, of de dynamische onderwerpen en operatoire activiteiten die op en met de grafische rekenmachine uit te voeren zijn. Dankzij de grafische rekenmachine is het mogelijk om leerlingen de probleemsituatie te laten variëren en bijvoorbeeld de gevolgen te onderzoeken van de rol van een parameter.

En tenslotte vindt op de grafische rekenmachine onderzoek plaats op verschillend niveau. De grafische rekenmachine is voor leerlingen een experimenteermachine. Eigen onderzoek, spel en spelen worden door de grafische rekenmachine gestimuleerd. Bij dit eigen onderzoek blijkt de uitdaging van de machine en de verrassing van de snel (en zonder veel inspanningen) verkregen grafieken een typerend aspect van de grafische rekenmachine te zijn.

Literatuur

Doorman, L. M. (1993). Een ander gezicht van de grafische rekenmachine, *Nieuwe Wiskrant 12* (2), 39-41.

Doorman, L. M., P. Drijvers en M. Kindt (1994). *De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs*. Freudenthal instituut, Utrecht. Cdβ-reeks 15.

Drijvers, P. (1993). Grafieken classificeren met een grafische rekenmachine, *Nieuwe Wiskrant 12* (3), 33-37.

Dijksterhuis, F.J. (1993). Met de TI-81 voor de klas, *Nieuwe Wiskrant 13* (2), 28-33.

Idzerda, S. (1994). *GC&A, de grafische rekenmachine bij Toegepaste Analyse binnen Vwo-Wiskunde A* (afstudeer scriptie Wiskunde).

Hengeveld, T. en H. Dompeling (1994). *Banen bij Vrije Val, Een Verkenning met de TI-81*. Utrecht, IVLOS.

Kindt, M (1993). James Bond, de wet van Snellius en wiskunde B, *Nieuwe Wiskrant 13* (1), 45-50.

Kok, E .J. (1994). Van rekenen en tekenen naar schatten en schetsen. De grafische rekenmachine in de onderbouw? *Nieuwe Wiskrant, 14*(1), 44-49.

Tall, D. (ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht.

Van den Brink, F. J. (1990). W12-16 ZakRekenMachines, *Nieuwe Wiskrant 10* (2), 34-39.

Van den Brink, F. J. (1992). W12-16 ZakRekenMachines, *Nieuwe Wiskrant 11* (2), 14-21.

Vonk, G. A.(1992) De graphics calculator in de klas, *Nieuwe Wiskrant 12* (1), 8-11.

Het lesmateriaal

Doorman, L. M. en P. Drijvers (1993). *Differentiëren met een grafische rekenmachine*. Freudenthal instituut, Utrecht.

Drijvers, P. en M. Kindt (1992). *Optimaliseren met behulp van de grafische rekenmachine*. Freudenthal instituut, Utrecht.

Doorman, L. M. en P. Drijvers (1993). *Grafiekenalgebra*. Freudenthal instituut, Utrecht.

Doorman, L. M., P. Drijvers en M. Kindt (1994). *Bewegingen in het vlak met een grafische rekenmachine*. Freudenthal instituut, Utrecht.