Van gulden snede naar zevensnede

F. van der Blij, Bilthoven
W. Vastrick, Utrecht

Het getal vijf

De gulden snede is een interessante verhouding van twee lijnstukken. Kort gezegd komt het neer op de verdeling van een lijnstuk in twee delen, waarbij voor de lengten geldt dat het kleinste stuk staat tot het grootste stuk als het grootste stuk staat tot het gehele lijnstuk.
De beroemde architect Le Corbusier schreef twee studies met de titel *Le Modulor* waarin hij uitlegt dat hij deze verhouding bij zijn werk als uitgangspunt gebruikt. De tekenaars in zijn atelier hebben lijstjes met standaardmaten die met deze verhouding zijn berekend op hun tekenbord.
Veel studies zijn gemaakt of andere kunstenaars in vroegere tijden bewust of onbewust van deze verhouding gebruikt hebben gemaakt. Oude papierformaten zijn op deze basis ontworpen. Men heeft ook gezocht of deze verhouding in de natuur voorkomt. De met deze verhouding samenhangende Fibonacci-getallen, waarover later in dit artikel meer, zijn ontdekt in de structuur van de schubben van de ananas en in de spiralen in de bloemhoofden van de zonnebloem.
Waldy Vastrick, Utrechts kunstschilder, schreef een doctoraal scriptie bij zijn studie kunstgeschiedenis over een ontwerp voor een stoel van Le Corbusier, onder andere over de vraag of ook bij dit ontwerp al sprake was van speciale wiskundige verhoudingen. Daarbij zocht hij contact met Van der Blij.
Jaren later werd het contact hernieuwd rond problemen bij de constructie van de regelmatige zevenhoek. Dit contact voerde tot de artikelen 'Constructies van regelmatige veelhoeken'[1] en 'Driedeling van de hoek'[2].
Daarop ontstond de vraag: *Hoe verdeel je een lijnstuk op een mooie manier in drieën?* met deze studie als gevolg. Een studie waar de rol van speciale meetkundige verhoudingen in de architectuur besproken wordt is in voorbereiding.

De gulden snede is enerzijds gedefinieerd als boven, maar kan ook gedefinieerd worden als de verhouding waarin de diagonalen van een regelmatig vijfhoek elkaar verdelen of als de verhouding van de lengten van diagonaal en zijde van de regelmatige vijfhoek.
Wanneer we de stukken waarin een lijnstuk door de gulden snede verdeeld wordt k(lein) en g(root) noemen kan deze verhouding geschreven worden als

$$k : g = g : (k + g)$$

en dus

$$g^2 = k \,.\, (k + g) = k^2 + kg$$

De verhouding klein staat tot groot als groot staat tot geheel kan ook in formule geschreven worden, met $\frac{g}{k} = \tau$ als

$$1 : \tau = \tau : (\tau + 1) \text{ met } \tau^2 = \tau + 1$$
$$\text{dus } \tau = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} = 1.618033....$$

In figuur 1 zijn bovenstaande relaties meetkundig vastgelegd als gelijkheid van de oppervlakte van vierkanten en rechthoeken.

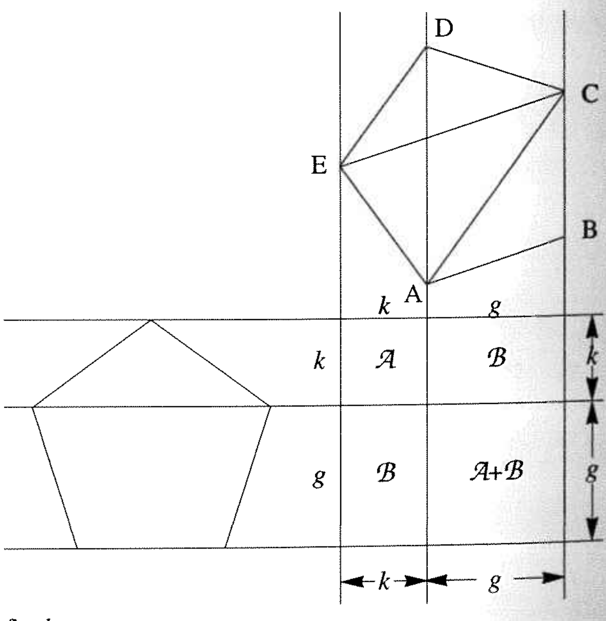


fig. 1

Er is een verband tussen de rij van Fibonacci en de gulden snede. We beginnen met twee niet negatieve gehele getallen en definiëren deze rij door een nieuw element gelijk te stellen aan de som van de twee er onmiddellijk aan vooraf gaande elementen. De rij

$$x_0, x_1, x_2, x_3, ...$$

wordt dus gedefinieerd door

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Duidelijk is dat door het aangeven van twee begintermen x_0 en x_1 de gehele rij is vastgelegd. Beginnen we bij voorbeeld met 0, 1 dan wordt de rij

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

We merken even op dat

$$\frac{233}{144} = 1.618055 \ldots$$

en deze verhouding lijkt wel erg veel op de gulden snede.

De vraag is nu of we een formule kunnen vinden om direct de n-de term van de rij te vinden.
We kunnen proberen of $x_n = At^n$ misschien voldoet aan de regel $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.
Wanneer we invullen vinden we

$$A\,t^n = A\,t^{n-1} + A\,t^{n-2} \text{ of } t^2 = t + 1$$

Directe verificatie leert dat de algemene term gevonden kan worden uit:

$$x_n = A\,{t_1}^n + B\,{t_2}^n$$

waarin t_1 en t_2 de wortels van de vierkantsvergelijking $t^2 = t + 1$ zijn. Dus

$$t_{1,2} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Nu kan men bewijzen dat de algemene term van de rij van Fibonacci gegeven wordt door

$$x_n = A(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5})^n + B(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5})^n$$

A en B zijn te bepalen als de eerste twee termen gegeven zijn. Als we met gehele getallen beginnen weten we dat A en B niet nul zijn. We kunnen nu het quotiënt van twee opeenvolgende termen berekenen.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{A\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+1} + B\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+1}}{A\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n} + B\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n}}$$

Omdat $\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right|$ groter is dan $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right|$ vinden we dat de limiet van het quotiënt van twee opeenvolgende termen voor n naar oneindig gelijk is aan

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

en dus juist de verhouding van de gulden snede geeft.
Door gebruik te maken van de rij van Fibonacci kan men willekeurig goede benaderingen van de gulden snede vinden.
De relatie tussen de gulden snede en de rij van Fibonacci is onder andere door Kepler in een brief uit 1608 opgemerkt. Uit een anonieme marginale aantekening in een exemplaar van een werk van Pacioli uit 1509 zou men een aanwijzing vinden voor een al langer bekend zijn van deze relatie. Mevrouw Sandra Heuff was zo vriendelijk ons attent te maken op het werk van Leonard Curchin en Roger Herz-Fischler[3].

Het getal zeven

We willen de gulden snede generaliseren tot een zevensnede, gebouwd met de regelmatige zevenhoek, op analoge wijze als de gulden snede uit de regelmatige vijfhoek gebouwd werd.
We gaan uit van de figuur van de regelmatige zevenhoek *ABCDEFG* zoals getekend in figuur 2.

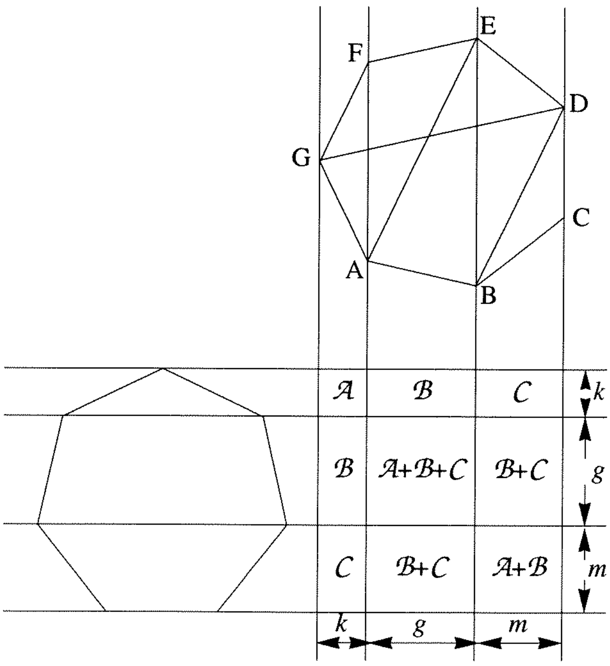
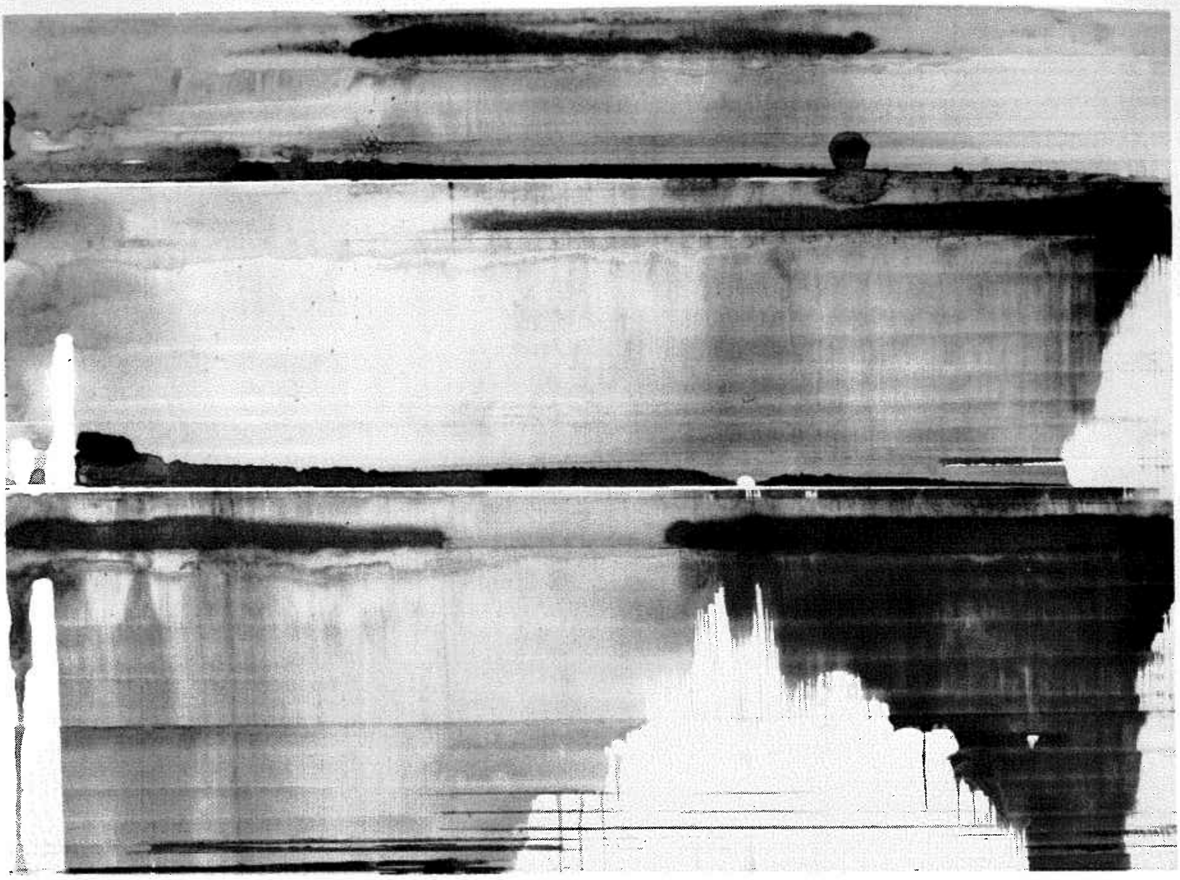


fig. 2

De diagonaal *GD* wordt door de diagonalen *AF* en *BE* in drie stukken verdeeld.
Deze stukken verhouden zich als $k : g : m$, waarin k, g en m(iddelste) de lijnstukken in het getekende vierkant zijn.
In de figuur zien we

$$k : g : m = GF : AE : BD$$



De horizontale stroken in deze penseeltekening (1993) van Waldy Vastrick verhouden zich als k : m : g

De verhouding $k : g : m$ is dus gelijk aan de verhouding van de zijde tot de lange diagonaal tot de korte diagonaal van de regelmatige zevenhoek. Uit de figuur zien we dat deze verhouding ook te vinden is als

$ED : FC : GB$ en als $EF : GD : AC$

Projecteren we deze verhoudingen weer naar de lijnstukken op de zijden van het vierkant dan vinden we

$$k : g : m = m : (m+g) : (k+g) = g : (k+m+g) : (m+g)$$

We vinden dus

$$m^2 = k^2 + kg$$
$$mg = km + kg$$
$$g^2 = k^2 + km + kg.$$

Hiermee zijn de, in de figuur met sierletters aangegeven, gelijkheden van oppervlakten van de rechthoeken en de vierkanten waarin het grote vierkant in figuur 2 verdeeld wordt bewezen.
Uit de figuur van de regelmatige zevenhoek kunnen we direct afleiden dat

$$k : m : g = \sin h : \sin 2h : \sin 3h \text{ waarin } h = \frac{\pi}{7}.$$

Om de formules te vereenvoudigen voeren we in $k = 1$. We vinden dan

$$m^2 = 1 + g, \quad mg = m + g, \quad g^2 = 1 + m + g$$

en dus

$$m^3 - m^2 - 2m + 1 = 0$$

en

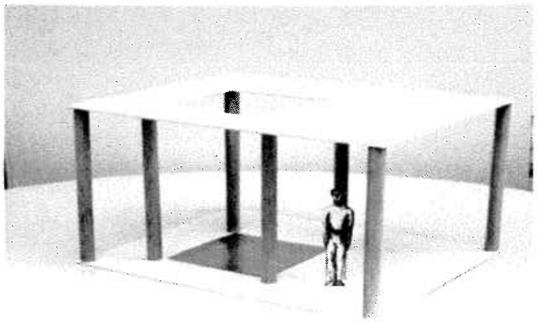
$$g^3 - 2g^2 - g - 1 = 0$$

Lossen we deze vergelijkingen numeriek op, dan vinden we, omdat m en g groter dan 1 zijn, de wortels:

$$m = 1.8019.... \text{ en } g = 2.2469....$$

De boven gevonden betrekkingen tussen k, g en m zijn dus ook te schrijven als goniometrische identiteiten. Ook hiermee zijn direct numerieke benaderingen voor de verhoudingen te vinden.

We geven in een tabel alle verhoudingen, die een rol spelen bij de zevensnede. Horizontaal staan de tellers, verticaal de noemers van de betreffende breuken.



maquette van een patio

Het maatsysteem van de zevensnede is gebruikt bij de maquette van een patio. Lengte, breedte en hoogte van de patio verhouden zich als g : m : k.
Lengte en breedte zijn zelf ook weer in drieën gedeeld volgens de zevensnede. De volgorde van de delen is zo gekozen dat de vijver binnenin de patio precies vierkant wordt.
In de patio staat een mens. Voor de verhouding tussen de lengte van de staande mens en de afstand van de kruin tot het dak is de gulden snede genomen. Uitgaande van een mens van 1.75 liggen vervolgens alle maten van de patio vast.

	k	g	m	$k+g$	$g+m$	$k+g+m$
k	1	g	m	$1+g$	$g+m$	$1+g+m$
g	$g-m$	1	$m-1$	$g-m+1$	m	g
m	$m-g+1$	$g-1$	1	m	g	$m+1$
$k+g$	$m-2g+3$	$2g-m-2$	$m-g-1$	1	$g-1$	$m-g+2$
$g+m$	$g-2$	$m-g+1$	$g-m$	$m-1$	1	$g-1$
$k+g+m$	$2-m$	$g-m$	$2m-g-1$	$g-2m+2$	$m-1$	1

Door substitutie van $g = 2.2469....$ en $m = 1.8019....$ krijgt men de numerieke benaderingen van deze verhoudingen.
We zoeken nu naar een analogon van de rij van Fibonacci voor de zevensnede. We beginnen met drie niet negatieve gehele getallen x_0, x_1 en x_2 en construeren de rij

$$x_0, x_1, x_2, x_3, ...$$

met het voorschrift

(#) $\quad x_{2n+1} = x_{2n} + x_{2n-1} \qquad n = 1, 2, ...$

(&) $\quad x_{2n+2} = x_{2n} + x_{2n-1} + x_{2n-2} \qquad n = 1, 2, ...$

Een voorbeeld van zo'n rij is

0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 6, 11, 14, 25, 31, 56, 70, 126, 157,...

De relaties zijn iets anders te schrijven

$$x_{2n+4} - 2x_{2n+2} - x_{2n} + x_{2n-2} = 0$$

Hieraan voldoet

$$x_{2n} = Ap^n + Bq^n + Cr^n$$

waarin p, q en r de wortels zijn van de vergelijking

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$$

en even zo kan men afleiden dat

$$x_{2n+1} = Dp^n + Eq^n + Fr^n$$

We kiezen voor p de grootste wortel, $p = 2.2469....$
Vullen we nu deze formules voor x_{2n} en x_{2n+1} in de formules (#) en (&) in dan kunnen we allerlei relaties tussen A, B, C, D, E en F vinden. We gebruiken slechts één daarvan namelijk $A = D(1 - \frac{1}{p})$.

Zonder moeite kunnen we nu berekenen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{Dp^n + Eq^n + Fr^n}{Ap^n + Bq^n + Cr^n} = \frac{D}{A}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = 1.80193 ....$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n}}{x_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{Ap^n + Bq^n + Cr^n}{Dp^{n-1} + Eq^{n-1} + Fr^{n-1}} =$$

$$= \frac{Ap}{D} = p - 1 = 1.24697....$$

en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n+1}}{x_{2n-1}} = p = 2.24697....$$

Wanneer we met een goede benadering voor k, m en g beginnen vinden we al snel zeer goede benaderingen voor de zevensnede. Bijvoorbeeld:

20, 36, 45, 81, 101, 182, 227, 409, 510, ...

en $\frac{510}{409} = 1.24694....$ $\frac{409}{227} = 1.80176....$ $\frac{510}{227} = 2.24669....$

Zo is dus 227 : 409 : 510 een goede benadering voor $k : m : g$.

Driehoeken

We keren terug naar de regelmatige vijfhoek. De gulden snede zagen we ook als verhouding van $\sin \frac{\pi}{5} : \sin 2\frac{\pi}{5}$. Door middel van de sinusregel kunnen we de verhouding van de sinussen terugvinden in de verhouding van de zijden van een driehoek.
We zoeken driehoeken waarvan de hoeken veelvouden van $\frac{\pi}{5}$ zijn. Noemen we hoeken respectievelijk a, b en c maal $\frac{\pi}{5}$, dan moet $a + b + c = 5$ zijn. Daarvoor zijn twee mogelijkheden: 1, 1 en 3 en 1, 2 en 2, twee gelijkbenige driehoeken waarvan de lengten van de zijden zich verhouden als de gulden snede.
Met behulp van geschikt gekozen lijnen door de hoekpunten kunnen deze driehoeken verdeeld worden in kleinere die weer de zelfde vorm hebben. Door middel van gelijkvormigheid kan men met behulp van de verdeling van een driehoek 1, 2, 2 in een driehoek 1, 2, 2 en een driehoek 1, 1, 3 eenvoudig de getalwaarde van de gulden snede berekenen, figuur 3.

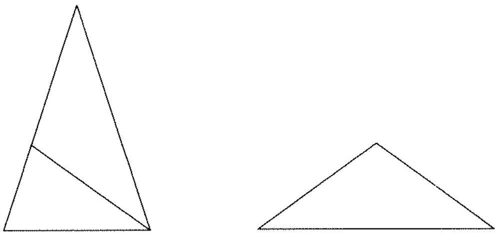


fig. 3

Bij de regelmatige zevenhoek onderzoeken we driehoeken, waarvan de hoeken veelvouden van $\frac{\pi}{7}$ zijn.
Nu moet gelden $a + b + c = 7$, we vinden als oplossingen 1, 1 en 5 (type I); 1, 2 en 4 (type II); 1, 3 en 3 (type III) en tenslotte 2, 2 en 3 (type IV), zie figuur 4.

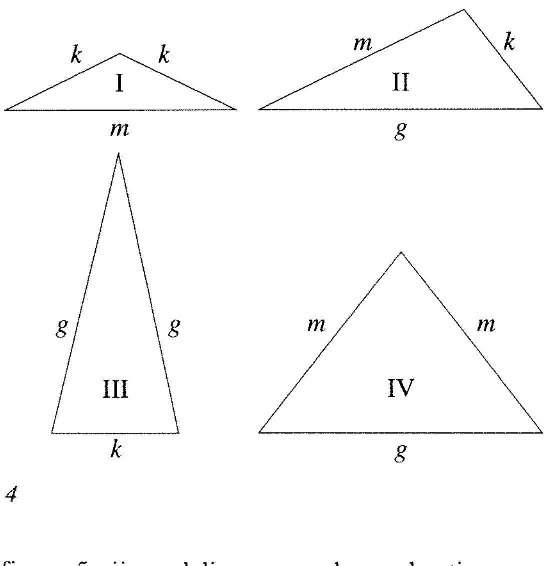


fig. 4

In figuur 5 zijn opdelingen van de regelmatige zevenhoek in driehoeken van type I, II, III en IV zijn getekend:

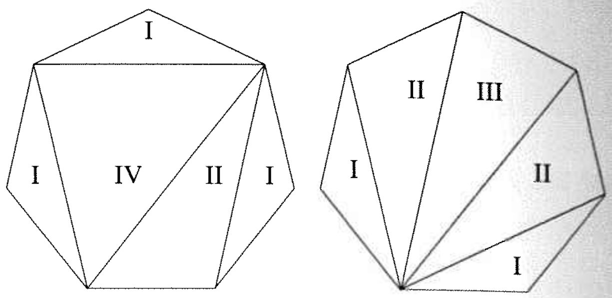


fig. 5

Dus drie gelijkbenige driehoeken waarin we in de lengten van de zijden een van de verhoudingen van de zevensnede terugvinden en een niet gelijkbenige driehoek waarin we alle verhoudingen van de zevensnede terug vinden.

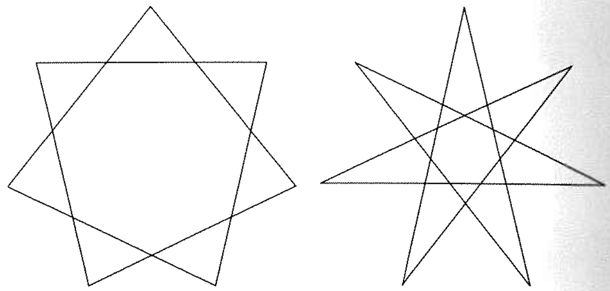


fig. 6

We merken nog op dat er twee verschillende regelmatige zevensterren zijn (figuur 6), waar de verhoudingen op vele plaatsen zijn terug te vinden.

Opmerkingen

1. Met de driehoeken van type I t/m IV zijn natuurlijk allerlei vragen over vlakvullingen te stellen en te behandelen, men vergelijke de theorie over de bekende Penrose-vlakvullingen.
2. De overgang van vijf naar zeven staat model voor een algemene theorie, uitgaande van een regelmatige veelhoek met een oneven aantal zijden. Enkele details hangen af van het feit of het aantal zijden al dan niet een priemgetal is.
3. De tweede auteur heeft in enkele van zijn schilderijen en architectonische ontwerpen deze zevensnede gebruikt.

Noten

[1] Constructies van regelmatige veelhoeken. *Euclides, 66*, (1990/1991), 168-174.
[2] Driedeling van de hoek. *Euclides, 66* (1990/1991), 202-204.
[3] Curchin, L. en R. Herz-Fischler (1985). De quand date le premier rapprochement entre la suite de Fibonacci et la division entre extrême et moyenne raison? *Centaurus 28*, 129-138.