Een vijfhoek vouwen

F.P. Vos
Hogeschool Midden Nederland, Utrecht

Als je in een strook papier voorzichtig een knoop legt ontstaat er een vijfhoek. In dit artikel volgt een bewijs dat de vijfhoek regelmatig is.

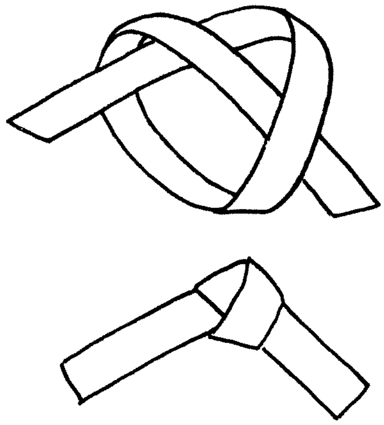
Wiskundewerklokaal

Bij ons op de opleiding hebben we inmiddels een heus wiskundewerklokaal ingericht. Vitrinekasten, werkbanken, scharenblok, lijm, touw, vouwblaadjes, plastic bouwmateriaal, kubussen, spelletjes, meetinstrumenten. Verbazingwekkend hoe veel verschillend materiaal er is, en hoe snel je al de kasten vol hebt. En voor de sfeer zijn er fleurige fractal-posters aan de muur. Het heeft een aardige duit gekost. Maar nu gaat het iedereen inspireren tot allerlei spannende wiskundeactiviteiten. Van enige onwennigheid bij collega's en studenten is natuurlijk nog sprake. Bij mij ook.

Intussen laat mij de gedachte niet los dat het ook goedkoop en eenvoudig moet kunnen. Je hoeft niet eerst te wachten tot de verhuizers zijn langs geweest. Het leren van wiskunde met behulp van concrete materialen kan ook in een kaal, saai lokaal waar een collega van een ander vak een poster van een fontein in Salzburg heeft opgehangen. Concrete materialen kunnen ook heel goedkoop zijn.
Voor het volgende heeft iedereen alleen maar een rechte strook papier nodig, van 1 à 2 cm breed. Leg er voorzichtig een eenvoudige knoop in (geen paalsteek, of zo). Met behoedzaam aantrekken zie je een vijfhoek ontstaan.
Degene die dit verhaal verder wil volgen raad ik hier aan om deze tekst even opzij te leggen en te zoeken naar een strookje papier. Dan is de rest veel beter te begrijpen. Als je de knoop in handen hebt kun je hem ook van achteren bekijken, nog eens een slag draaien. Daar kan geen enkel tweedimensionaal plaatje tegen op.

Allerlei vragen

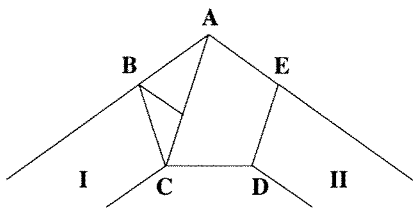
Je hebt dus een knoop in een strookje papier gelegd. Wat je nu gekregen hebt lijkt heel erg op een mooie, regelmatige vijfhoek. Maar is het dat ook? Zijn de zijden precies even lang? Zijn de hoeken allemaal even groot? Als je het met je geodriehoek opmeet, weet je het dan zeker? Trouwens, wat is dat eigenlijk – een regelmatige vijfhoek? Wat zijn daarvan de kenmerken?



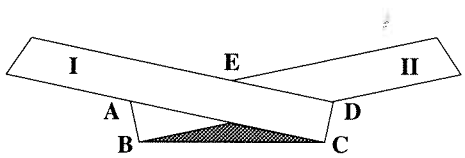
Een bewijs dat de knoop inderdaad een regelmatige vijfhoek oplevert is voor de meeste leerlingen teveel gevraagd. Maar met de knoop in de hand zijn ook andere vragen te stellen die aanleiding geven tot wiskundige activiteiten:
- Als je buurvrouw een andere knoop heeft gekregen (zij begon met rechts-over-links in plaats van links-over-rechts) wat zijn dan de verschillen met jouw knoop? En de overeenkomsten?
- Welke symmetrieën herken je? (Ook aan de achterkant kijken!)
- Zoek de paren evenwijdige lijnen, een symmetrisch trapezium, een stomphoekige gelijkbenige driehoek, een spitse gelijkbenige driehoek (een Brie-hoek).
- Kun je nog nagaan wat de voor- of de achterkant van de oorspronkelijke strook was?
- Probeer, zonder de knoop weer open te vouwen, de oorspronkelijke strook te tekenen met daarin de gemaakte vouwlijnen.
- Je kunt de stukken van de strook die nog buiten de vijfhoek uitsteken precies langs de randen gaan omvouwen, net zo lang totdat alles binnen de vijfhoek zit. Waarom past dat precies?

- Als je met je geodriehoek de hoeken meet, hoe precies moet je dan meten om zeker te zijn dat de hoeken even groot zijn?
- Als de knoop van je buurman géén regelmatige vijfhoek is, en de jouwe wèl – wat moet je dan doen?
- Kun je ook een zeshoek vouwen?

Maar dan nu het bewijs[1]. Voor dit bewijs gaan we uit van een knoop die begon met rechts-over-links.



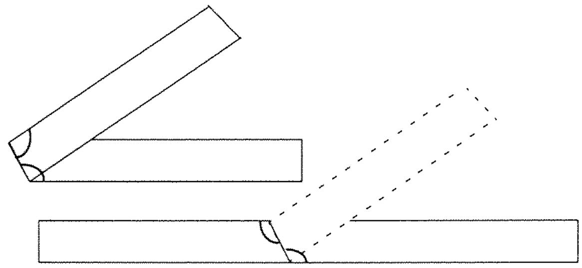
In de figuur heb ik de vijf hoekpunten A, B, C, D en E genoemd. Er zijn drie vouwlijnen: AB, CD en AE.
Er zijn twee uiteinden van de strook die uitsteken: I en II. Alles klemt elkaar precies af of sluit op elkaar aan in de vijf hoekpunten (hoe langer je er naar kijkt, hoe wonderbaarlijker dat wordt!). Maar hoe is de knoop ontstaan? Rustig ontwarren: laten we eerst vouwlijn AE terugvouwen.
Met een beetje draaien hebben we dan een figuur voor ons, die doet denken aan 'twee armen over elkaar'. De vijfhoek $ABCDE$ is hierin nog goed te herkennen.
Hier zie je hoe de twee uiteinden I en II 'leunen' op de vouwlijnen AB en CD. Je kunt hier ook kiezen tussen uiteinde I over uiteinde II, of andersom. Dit is alleen mogelijk als de twee vouwlijnen symmetrisch zijn, dus de hoek bij B moet gelijk zijn aan de hoek bij C.



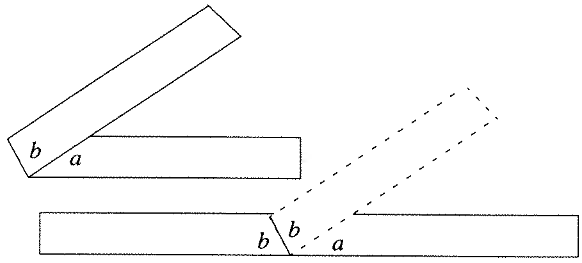
Vouwmeetkunde

Als we nog één vouw terugslaan, dan houden we een V-vormige figuur over.
Eén vouw in het strookje levert altijd een V-vormige figuur op (tenminste: als de vouwlijn niet evenwijdig aan de rand van het strookje is). In zo'n figuur gelden twee eigenschappen, en het ontdekken van deze eigenschappen behoort tot de tak van wiskunde die we 'vouwmeetkunde' kunnen noemen.

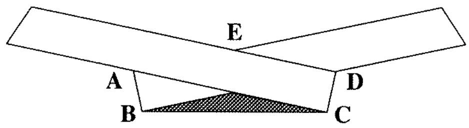
Eigenschap 1
In een V-vormige figuur zijn de hoeken van de buitenste randen met de vouwlijn aan elkaar gelijk. Waarom? Als je de strook weer open vouwt zie je de Z-hoeken.



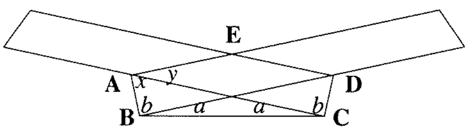
Eigenschap 2
In een V-vormige figuur heb ik twee hoeken aangegeven, a en b. Er is een verband tussen deze twee hoeken. Als je de strook weer open vouwt zie je: $2b + a = 180°$.



Nemen we weer de figuur waarin je de twee 'armen over elkaar' herkennen kunt.



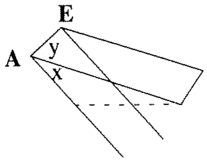
De hoek bij A is gelijk aan die bij B (eigenschap 1), evenals de hoek bij C gelijk is aan die bij D (ook eigenschap 1). Vanwege de spiegelsymmetrie in deze figuur zijn de hoeken bij B en C ook aan elkaar gelijk. Kortom: we weten nu dat vier hoeken aan elkaar gelijk zijn.
In de figuur heb ik de hoeken a en b bij hoekpunt B aangegeven. Dezelfde hoeken zitten bij hoekpunt C vanwege de spiegelsymmetrie.
Bij hoekpunt A heb ik twee andere hoeken aangeduid met x en y.
Nu even rekenen:



In ΔABC is de hoekensom gelijk aan 180°, dus
$x + b + a + a = 180 = 2b + a$
(de tweede gelijkheid volgt uit eigenschap 2).
Dit levert $x = b - a$.

Hoek EAB en hoek ABC zijn aan elkaar gelijk (eigenschap 1), dus $x + y = a + b$.
Hieruit volgt dat $y = a + b - (b - a) = 2a$.
De vouw AE moet de knoop 'afsluiten'. Hier moet de

strook klemmen: exact over het uitstekende strookdeel II vouwen en precies langs AB leggen. Dat betekent dat bij de vouwlijn AE een vouw-voorwaarde komt:
$2y + x = 180°$ (eigenschap 1 voor vouwlijn AE).

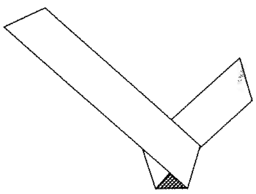


En nu kunnen we a en b invullen:
$2(2a) + (b - a) = 180° = 2b + a$.
Hieruit volgt $2a = b$. Met $a + 2b = 180°$ volgt: $a = 36°$ en $b = 72°$. En $a + b = 108°$.

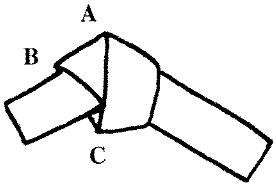
Rest ons nu nog netjes conclusies te trekken: in de vijfhoek is de hoek bij B gelijk aan 108°. De hoeken bij A, C en D zijn even groot, dus ook 108°. In een willekeurige vijfhoek is de hoekensom gelijk aan 540°, dus voor hoek E blijft over: $540 - 4 \times 108$ en dat is 108°. Daarmee zijn alle vijf hoeken aan elkaar gelijk en hebben we inderdaad een regelmatige vijfhoek.
Einde bewijs.

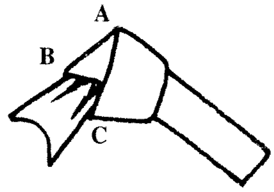
Vouwen langs de geodriehoek

Dit bewijs geeft ons trouwens nog een manier om de knoop 'na te vouwen'. Je neemt een strook papier en vouwt de eerste vouwlijn (voor een V-vormige figuur) over een hoek van $a + b = 108°$. Dat is met een geodriehoek vrij nauwkeurig te doen. De tweede vouwlijn past er tegenover en je krijgt de spiegelsymmetrische vijfhoek *ABCDE*.



Er is vervolgens nog een probleempje als we de knoop afmaken door het uiteinde langs AB te schuiven. Past het dan allemaal precies? Wordt het 'gat' BC precies gevuld met het laatste deel van de strook? Ligt dit niet in een te breed stuk? Of is BC juist te smal en klemt het laatste stukje strook helemaal af?





Gelukkig garandeert de keuze $a + b = 108°$ ons dat het allemaal goed komt. Deze keuze levert ons een regelmatige vijfhoek *ABCDE*, met de eigenschap: AB is evenwijdig aan EC.
Als ik de derde vouwlijn precies langs AE maak, vormt de strook vanuit de punten A en E twee evenwijdige lijnen. De ene lijn gaat vanuit A naar B. Dan kan het vervolgens niet anders of de tweede lijn gaat vanuit E naar C. Conclusie: het laatste deel van de strook vult BC precies op. En de knoop is klaar.
Overigens: als uw leerlingen met strookjes en die knoop in de weer zijn, redenerend, kijkend, de knoop in hun handen draaiend, ontdekkend, dan is het lokaal ook al een heus wiskundewerklokaal.

Noot

[1] Met dank aan Annet Tollens, die mij ervan overtuigde dat je geen goniometrie nodig hebt voor dit bewijs.

ICTMA 7

Van 16 tot en met 20 juli 1995 wordt aan de Universiteit van Ulster in Noord Ierland de zevende ICTMA conferentie gehouden. ICTMA staat voor International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications. De conferentie richt zich op modelvorming, toepassingen en toetsvormen bij wiskunde op het niveau van het voortgezet en hoger onderwijs. Het programma bestaat uit plenaire lezingen, parallelle sessies, poster presentaties, workshops, demonstraties en een tentoonstelling.
De tweede aankondiging is te verkrijgen bij:
ICTMA 7, Department of Mathematics, University of Ulster, Jordanstown, Noord Ierland, BT37 0QB. Fax: 0044 232 362854. E-mail: ICTMA7@ULSTER.AC.UK