

Het klaphekje

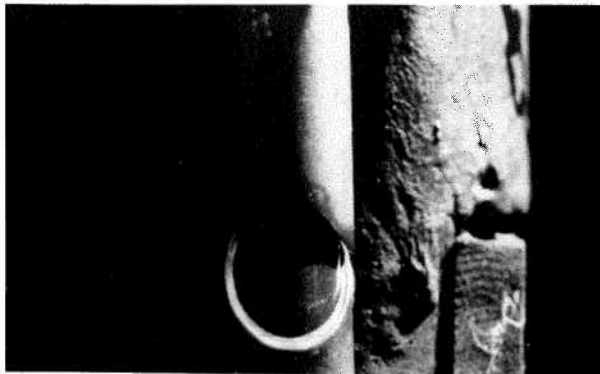
J.A. de Jong

Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht



Klaphekje in de duinen

Deze zomer heb ik enkele duingebieden in Nederland bezocht. Zo ook een keer de duinen van Voorne. Nadat wij ons bij het bezoekerscentrum geïnformeerd hadden, liepen we rond de Tenellaplas naar de rand van het terrein, dat door een klaphekje betreden kon worden. Het hekje viel me meteen op door een ingenieuze constructie. Er is geen veer en het hekje klapt terug door het eigen gewicht. We gingen naar binnen. Tussen de momenten dat we aalscholvers en andere vogels bekeken, bewonderde ik in gedachten het idee van de bedenker van het hekje: alles klopt. Gelukkig kwamen we op de terugweg door de zelfde ingang en kon ik foto's maken.



Detailopname van het hekje

Er is een binnenbuis met daaromheen een precies passende buitenbuis die schuin is doorgezaagd. Duwt iemand tegen de horizontale dwarsstang aan, dan gaat het bovenste gedeelte langzaam omhoog. Als de dwarsstang een kwartslag gedraaid is, is het hekje open. Eventueel zou er nog verder gedraaid kunnen worden, maar je kunt erdoor.

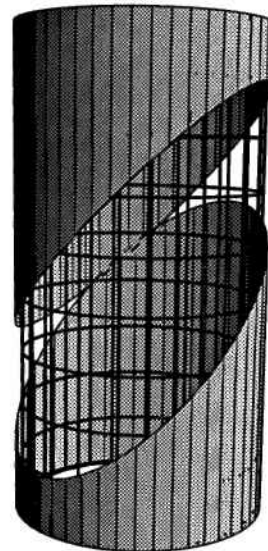


fig. 1 De binnenbuis en de buitenbuizen

In de dagen erna zag ik allemaal vlakken die een cilinder snijden en draaiende ellipsen. Gaandeweg begon ik nieuwsgierig te worden naar de verhoging van de dwarsstang als gevolg van de draaihoek. Ik had geen zin om alleen met pen en papier aan de slag te gaan, dus ik haalde twee grijze pvc-buizen ($\text{Ø } 32 \times 3,2$ en $\text{Ø } 40 \times 3,2$) en zaagde de dikste schuin door. Met de verstekbak moest dat onder een hoek van 45° , maar het hekje heeft ook zo'n zaaghoek. Toen ik iets had om mee te spelen tijdens het nadenken kon ik beginnen.

Inmiddels had ik een paar ideeën gekregen. Ten eerste: Op de opengelegde cilindermantel zag ik het onderste stuk buitenbuis als een sinusoïde, het bovenste stuk was een verschoven sinusoïde die er precies aan raakte. Ten

tweede: De snijlijn van de twee vlakken van beide ellipsen is een raaklijn van de cilinder.
Omdat ik het idee van de platgedrukte mantel wel slim van mezelf vond begon ik daar maar mee.

De cilindermantel platgelegd

Knip in gedachten de mantel open bij het hoogste punt. De platgelegde mantel ziet er dan zo uit:

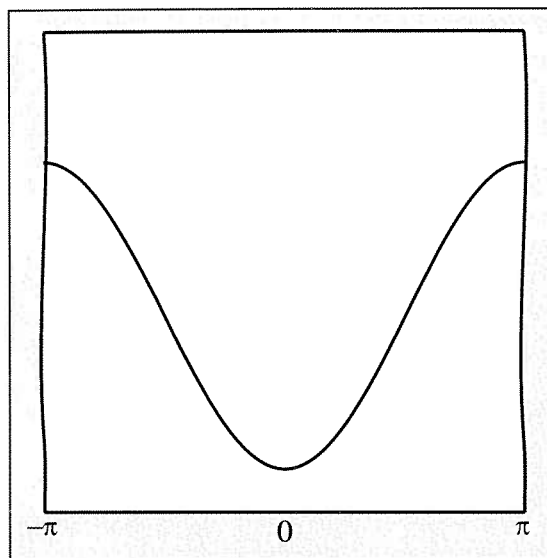


fig. 2 De opengeklapte mantel met de zaaglijn

De grafiek van $t \rightarrow -\cos t$. (Ik kies hier voor het gemak de straal van de cilinder gelijk aan 1 en, omdat de zaaghoek 45° is, is dat tevens de amplitude).¹ Als ik de ellips α graden draai, rechtsom, dan schuift de grafiek α naar rechts en zo ontstaat de grafiek van $t \rightarrow -\cos(t - \alpha)$.

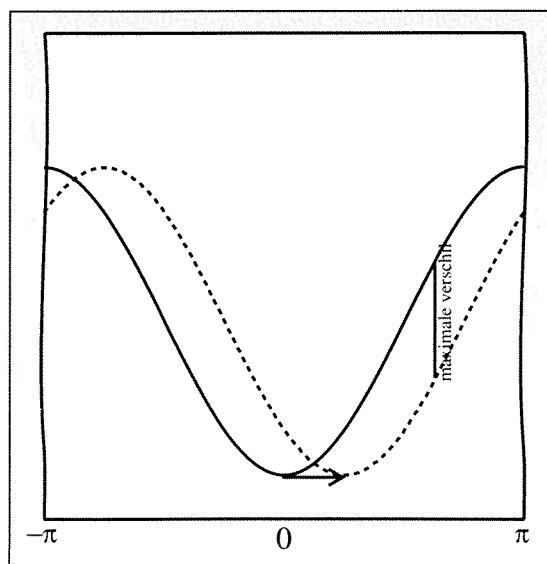


fig. 3 Grafieken van $-\cos t$ en $-\cos(t - \alpha)$

De grafiek moet zoveel omhoog dat ie de andere net nog

raakt. Dat is precies het maximale verschil tussen $-\cos t$ en $-\cos(t - \alpha)$.

$$f(t) = -\cos t + \cos(t - \alpha).$$

$$f'(t) = \sin t - \sin(t - \alpha) = 0 \text{ als } \sin t = \sin(t - \alpha)$$

dus

$$t = t - \alpha \pmod{2\pi} \text{ of } \pi - t = t - \alpha \pmod{2\pi}$$

oftewel

$$t = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha.$$

Het maximum is

$$-\cos\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha\right) + \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha\right) = 2\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

Als de grafiek van $t \rightarrow -\cos(t - \alpha)$ dus $2\sin\frac{1}{2}\alpha$ omhoog verschuift, raakt hij precies de grafiek van $t \rightarrow -\cos t$ en zijn er geen andere gemeenschappelijke punten op het domein.

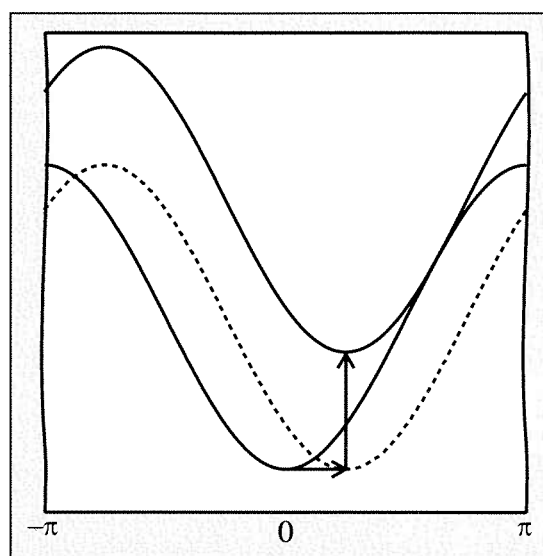


fig. 4 Na het omhoogschuiven raken de grafieken elkaar

Wel mooi zo'n resultaat, dacht ik: als het hekje α graden draait, dan gaat de dwarsstang $2\sin\frac{1}{2}\alpha$ omhoog. Wat wel knaagde was de periode van $2\sin\frac{1}{2}\alpha$. Die had 2π moeten zijn, want na 2π is het hekje één keer rond. Na een tijd naarstig zoeken vond ik dat $f'(t)$ wél van + naar - moet veranderen wil het een maximum zijn, het is dus soms $t = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha$ en anders $-\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha$, en het maximum is $2\sin\frac{1}{2}\alpha$. Hiervan is de periode wel 2π .

Had ik maar de pq -formules gebruikt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(t - \alpha) - \cos t = -2\sin\left(-\frac{1}{2}\alpha\right) \sin\left(t - \frac{1}{2}\alpha\right) = \\ &= 2\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \sin\left(t - \frac{1}{2}\alpha\right), \end{aligned}$$

het maximum is

$$2\sin\frac{1}{2}\alpha \text{ bij } t = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha \text{ (als } \sin\frac{1}{2}\alpha > 0)$$

of

$$t = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha \quad (\text{als } \sin\frac{1}{2}\alpha < 0).$$

Als beloning voor mijn vasthoudendheid kreeg ik nog een geschenk: $|\sin\frac{1}{2}\alpha|$ is niet differentieerbaar in de nulpunten, en *verdraaid*, nu ik nog eens probeerde met mijn pvc-buizen *voelde* ik die niet-differentieerbaarheid in het onderste punt. Het loopt niet soepel daar beneden, heel anders dan bovenin. Het hekje buiten staat dan ook na twee klappen stil nadat iemand er doorheen is gelopen. De opbrengst van de aanpak met de platgelegde cilinder is een oversteek van meetkunde naar analyse. In deze context is het maximale verschil tussen twee functies relevant en heeft niet-differentieerbaarheid betekenis.

De snijvlakken

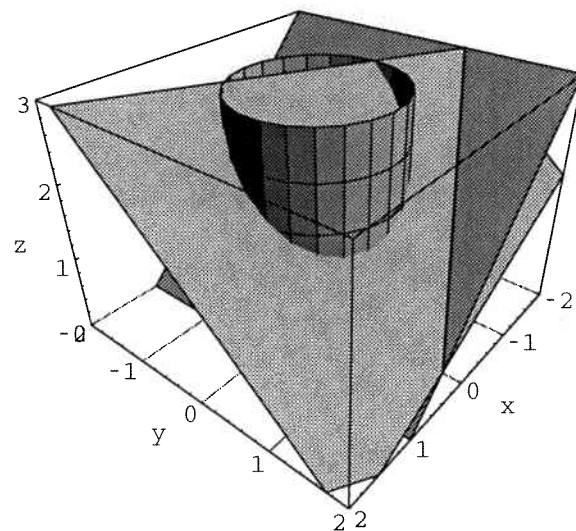
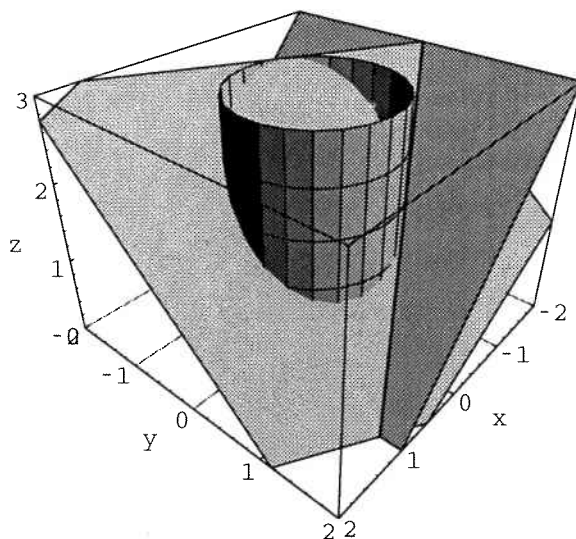
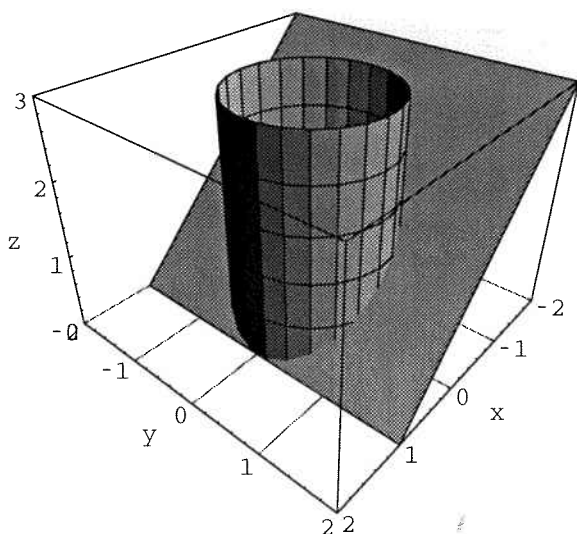


fig. 5 *Uitgangssituatie*

Laat het stelsel zo aangebracht zijn dat het onderste snijvlak de cirkel in het xy -vlak raakt in $(1,0,0)$. De vergelijking van dit vlak is $x + z = 1$. De normaal van het vlak is $(1,0,1)$. Na een draaiing rond de z -as over een hoek van α graden gaat de normaal over in $(\cos\alpha, \sin\alpha, 1)$ en gaat het vlak nog steeds door $(0,0,1)$, dus de vergelijking van het vlak is $x\cos\alpha + y\sin\alpha + z = 1$.

Na een verticale verplaatsing over h heeft het vlak als vergelijking $x\cos\alpha + y\sin\alpha + z = 1 + h$.

De twee vlakken

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x\cos\alpha + y\sin\alpha + z = 1 + h \end{cases}$$

hebben altijd een snijlijn.

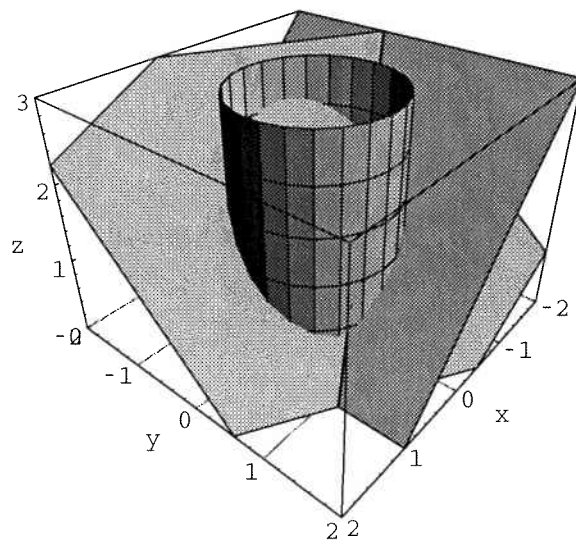


fig. 6 *De drie voorkomende situaties*

Maar alleen in de stand waarin de ellipsen elkaar raken is deze snijlijn *raaklijn* aan de cilinder. Het raakpunt van de ellipsen is dan tevens het raakpunt van deze lijn aan de cilinder.

Is het tweede vlak te hoog, dan zijn de ellipsen 'los' van elkaar en ligt de snijlijn geheel *buiten* de cilinder.

Is het tweede vlak te laag, dan snijden de ellipsen elkaar en de lijn door deze snijpunten is de snijlijn van de vlakken, die *door* de ellips loopt.

De interesse gaat dus uit naar de conditie waaronder de snijlijn van de vlakken aan de cilinder raakt.

Uit het stelsel volgt

$$x(1 - \cos\alpha) - y\sin\alpha = -h,$$

dus

$$y = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}x + \frac{h}{\sin\alpha}$$

De lijn raakt aan de cilinder, dus een oplossing moet voldoen aan $x^2 + y^2 = 1$. Ofwel

$$x^2 + \left(\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}x + \frac{h}{\sin\alpha}\right)^2 - 1 = 0$$

In het algemeen heeft

$$\begin{aligned} x^2 + (px + q)^2 - 1 &= x^2 + p^2x^2 + 2pqx + q^2 - 1 = \\ &= x^2(1+p^2) + 2pqx + q^2 - 1 \end{aligned}$$

precies één nulpunt als de discriminant gelijk is aan 0.

$$\begin{aligned} \text{Discriminant} &= 4p^2q^2 - 4(1+p^2)(q^2-1) \\ &= 4p^2q^2 - 4(1+p^2)q^2 + 4(1+p^2) \\ &= 4(p^2q^2 - q^2 - p^2q^2 + 1 + p^2) \\ &= 4(-q^2 + 1 + p^2) = 0 \end{aligned}$$

Dus als $q^2 = 1 + p^2$.

Het stelsel heeft dus precies één oplossing op de cilinder als

$$\frac{h^2}{\sin^2\alpha} = 1 + \frac{(1 - \cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}$$

of wel

$$\begin{aligned} h^2 &= \sin^2\alpha + 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha = 2 - 2\cos\alpha = \\ &= 4\sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \end{aligned}$$

Dus als

$$h = 2\sin\frac{1}{2}\alpha$$

De opbrengst van deze aanpak is een oversteek naar de algebra, waarbij het raken van een lijn aan een cilinder uiteindelijk zich laat vertalen naar het nulstellen van een discriminant.

Het bovenaanzicht

Bij het onderzoeken van de vorige benadering tekende ik ook het bovenaanzicht met daarin een hoogtelijnenkaartje van beide vlakken.

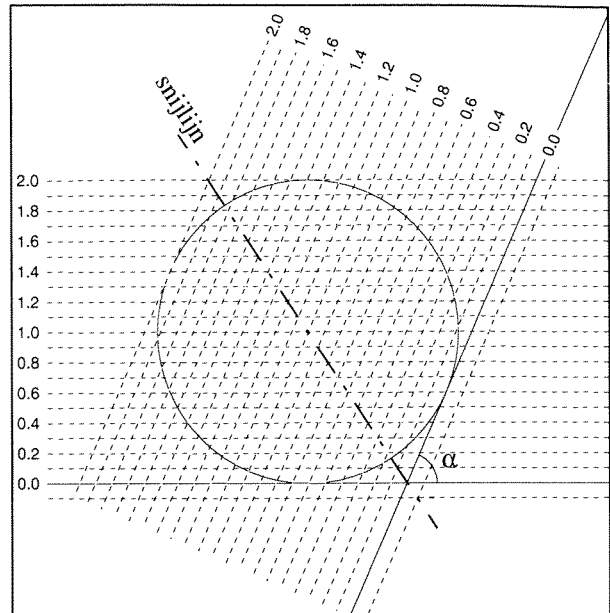


fig. 7 Boveenaanzicht met hoogtelijnenkaartje van $V: x + z = 1$ en van hetzelfde vlak na draaiing om de z -as over α , V_α

De snijlijn van V en V_α is te vinden door de snijpunten van hoogtelijnen met dezelfde hoogte te verbinden. Deze snijlijn gaat door $(0,0,1)$, in het bovenaanzicht is dat het midden van de cirkel. Dat is niet zo verwonderlijk, want in alle standen gaat het vlak V_α door $(0,0,1)$, immers dit punt ligt op de rotatieas.

Om het symbolisch rekenwerk te beperken, ga ik nu V naar beneden bewegen in plaats van V_α naar boven. In het bovenaanzicht verandert er weinig, de hoogtelijnen krijgen alleen andere nummers en de snijlijn verschuift.

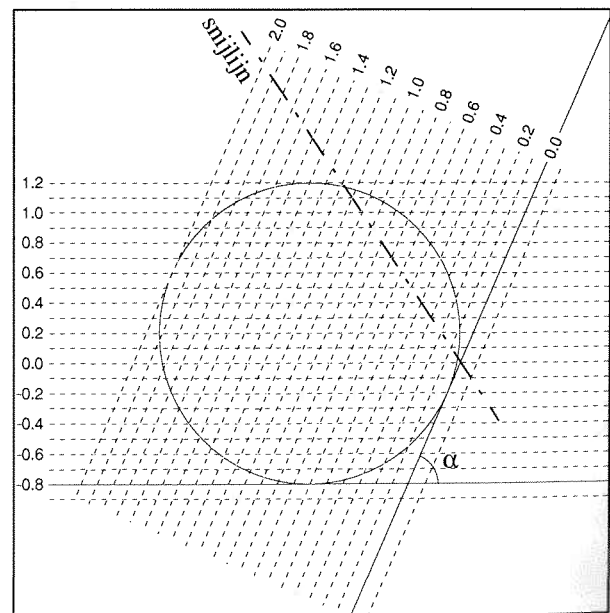


fig. 8 Hoogtelijnenkaartje van $x + z = -0.8$ en van V_α

De verticale verschuiving moet zo gekozen worden dat de snijlijn aan de cirkel raakt. Omdat de helling van V gelijk is aan 45° , is de verticale verschuiving gelijk aan de horizontale verschuiving van de hoogtelijnen. In essentie ben ik in onderstaande figuur dus op zoek naar LX , uitgedrukt in α .

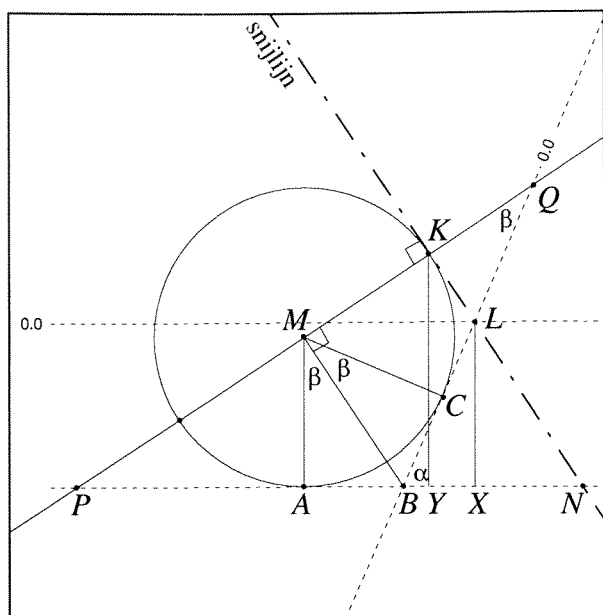


fig. 9 Situatietekening; $KN \parallel MB$, $\angle AMC = \alpha = 2\beta$

In de figuur zitten allerlei (gelijkvormige) rechthoekige driehoeken met $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ als hoek. We noemen even $\cos \beta = c$ en $\sin \beta = s$.

Als ik één zijde van zo'n driehoek weet, kan ik met de volgende hulpfiguur snel de andere vinden.

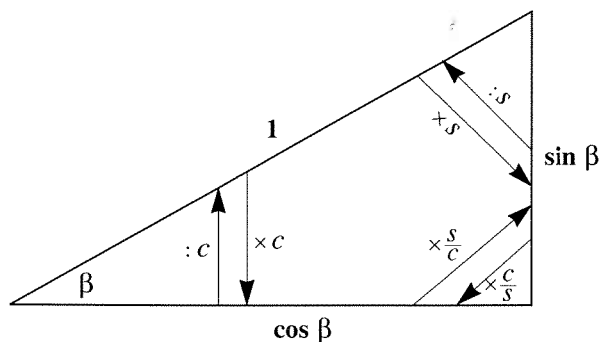


fig. 10 Verhoudingsberekeningen

Pas deze figuur toe:

in MAB : $MA = 1$ dus $MB = \frac{1}{c}$
in QMB : $MB = \frac{1}{c}$ dus $MQ = \frac{1}{c} \times \frac{c}{s} = \frac{1}{s}$
net zo:
in PMB : $MB = \frac{1}{c}$ dus $MP = \frac{1}{c} \times \frac{c}{s} = \frac{1}{s}$

$$PK = PM + MK = \frac{1}{s} + 1 = \frac{1+s}{s}$$

in PYK : $PK = \frac{1+s}{s}$ dus $KY = \frac{1+s}{s} \times s = 1+s$

in KYN : $KY = 1+s$ dus $KN = \frac{1+s}{c}$

$$KQ = MQ - KM = \frac{1}{s} - 1 = \frac{1-s}{s}$$

in QKL : $KQ = \frac{1-s}{s}$ dus $KL = \frac{1-s}{s} \times \frac{s}{c} = \frac{1-s}{c}$

$$LN = KN - KL = \frac{1+s}{c} - \frac{1-s}{c} = \frac{2s}{c}$$

in LXN : $LN = \frac{2s}{c}$ dus $LX = \frac{2s}{c} \times c = 2s$

In zo'n plaatje is α altijd positief dus 'aan de andere kant' is LX ook positief, met andere woorden

$$LX = 12 \sin \frac{1}{2} \alpha$$

De opbrengst van deze aanpak is de overstek naar de vlakke meetkunde, met de hoogtelijnen als begeleiders. De liefhebber van vlakke meetkunde kan zijn hart ophalen bij al die evenredigheden of proberen een kortere weg te vinden naar hetzelfde resultaat.

Een kenmerk van een realistische context is dat er een verscheidenheid aan oplossingen is. Dat is hier het geval. Maar wie is er eigenlijk geïnteresseerd in de hoogte als functie van de hoek? Is dat wel zo realistisch? Kwam mijn interesse doordat ik op sommige momenten overal wiskunde meen te zien? Ik weet het niet precies. Maar toen ik er nog eens over nadacht, herinnerde ik mij dat ik me ook had afgevraagd hoe het raakpunt over de doorsnede beweegt. Het onderzoek daarnaar had ik uitgesteld omdat ik me eerst in de breedte van de drie benaderingen wilde uitleven. Nu is het tijd om nog wat dieper op de positie van het raakpunt in te gaan.

Het raakpunt

Uit de berekening bij de aanpak met de mantel volgt dat het raakpunt ligt bij een horizontale hoek $t = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha$ voor $\sin \frac{1}{2}\alpha > 0$ en $t = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha$ als $\sin \frac{1}{2}\alpha < 0$. Bij één volle draaiing, van 0 tot 2π , varieert t van $\frac{1}{2}\pi$ tot $1\frac{1}{2}\pi$. En als $\alpha = 2\pi$ dan vallen de ellipsen samen. Daarna schiet het raakpunt naar de overkant om bij $\frac{1}{2}\pi$ opnieuw te beginnen.

Dit betekent dat zelfs als α nog heel klein is, het raakpunt al voorbij $\frac{1}{2}\pi$ is. Het maximale verschil tussen $-\cos t$ en $-\cos(t - 0.1)$ is weliswaar klein (ongeveer 0.1) maar dat wordt toch al aangenomen bij $\frac{1}{2}\pi + 0.05$. Ach, waarom zou dat maximum ook in de buurt van $t = 0$ verwacht moeten worden? Dat treedt natuurlijk op waar de grafiek van $t \rightarrow -\cos t$ het steilst is, bij $\frac{1}{2}\pi$.

In de praktijk betekent een en ander dat alleen de bovenste helft van de onderste ellips slijt en ook alleen de onderste helft van de bovenste ellips. Gezien de lineariteit van de uitdrukking voor x gebeurt dit slijten gelijkmatig.

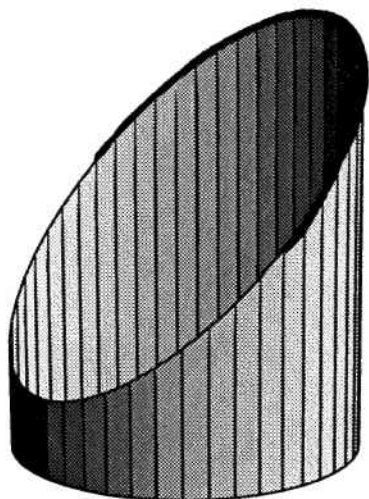


fig. 11 De slijplekken op de onderste buitenbuis

Pakken we de draad weer op bij de aanpak van de snijlijn, dan zien we dat als

$$x^2 + (px + q)^2 - 1 = x^2(1 + p^2) + 2pqx + q^2 - 1$$

één nulpunt heeft, het minimum aangenomen wordt bij:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2pq}{2(1+p^2)} = \frac{-pq}{1+p^2} = \frac{-pq}{q^2} = \frac{-p}{q} = \\ &= \frac{-\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}{\left(\frac{h}{\sin\alpha}\right)} = \frac{-(1-\cos\alpha)}{h} = \frac{-2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha} = \\ &= -\left|\sin\frac{1}{2}\alpha\right| = -\sin\frac{1}{2}\alpha, \text{ als } \alpha \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

en tevens

$$\begin{aligned} y &= (px + q) = p \cdot \left(\frac{-p}{q}\right) + q = \frac{-p^2 + q^2}{q} = \\ &= \frac{-p^2 + (1+p^2)}{q} = \frac{1}{q} = \frac{\sin\alpha}{h} = \frac{\sin\alpha}{2\left|\sin\frac{1}{2}\alpha\right|} = \\ &= \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}{2\left|\sin\frac{1}{2}\alpha\right|} = \cos\frac{1}{2}\alpha \text{ als } \alpha \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

en $z = 1 - x$.

Ook nu blijkt weer dat het draaien begint bij $(x, y, z) = (0, 1, 1)$, halverwege de onderste ellips, en eindigt bij $(0, -1, 1)$, aan de overkant.

Bij de benadering met het bovenaanzicht (zie figuur 9) is dit inzicht helemaal eenvoudig.

$$\angle AMK = \angle AMB + \angle BMK = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\pi$$

Dus

$$\angle AMK \text{ ligt tussen } \frac{1}{2}\pi \text{ en } 1\frac{1}{2}\pi$$

Noot

[1] Als de lezer twijfelt of er sprake is van een sinusoidale dan volgt hier een verklaring. Op de cilinder met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ geldt $x = \cos t$ en $y = \sin t$, waarbij t de booglengte is. Op het snijvlak geldt $z = -x$. De grafiek van de opengeknipte cilinderrand is dus die van de functie $z(t) = -\cos t$. Andere snijvlakken geven ook een lineaire uitdrukking van z in x en y , waaruit volgt dat de grafiek van $z(t)$ ook dan een sinusoidale is. De doorsnede van een vlak met een cilinder is in het algemeen een ellips. Dat hoeft hier niet bewezen te worden want ik gebruik alleen de naam van de figuur en verder geen eigenschappen van ellipsen.