Decimalen van heinde en ver

Recreatierubriek

A.J. Goddijn
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Een driehoek op rijm

Als een hoek van zestig graad
op een rechthoekszijde staat
is de kortste zij de helft der schuine zijde
en de langste zijde, die
is die helft maal wortel drie
maar let goed op wat de langste is van beide!

Van de auteur van de Prisma Schaakboeken: Hans Bouwmeester (1928-). *Inleiding tot het schaakspel* verscheen voor het eerst in 1960, beleefde twaalf drukken en werd in 1987 geheel herzien en uitgebreid nogmaals gepubliceerd.
Dertig jaar geleden gaf Hans Bouwmeester ook nog wiskundeles op het Thorbecke Lyceum in Utrecht, onder andere aan Henny Klein, die dit rijmpje nu nog kent.
Is E. v. Kervel misschien een oud klasgenoot? Die kent het versje ook, zij het met 'wie' in plaats van 'wat' in de slotregel.
Henny Klein weet dat het gezongen werd, E. v. Kervel kent de wijs: 'Snap je dat nou, juffrouw Snip', uit de Snip-en-Snap revue.

π, nu ook alcoholvrij en in vele talen

De rest van de inzendingen naar aanleiding van het januarinummer betreft teksten die geschapen zijn om decimalen te helpen onthouden.
Voor het gemak van de controle geef ik nog even de decimale ontwikkeling van drie getallen, voor zover nodig in dit artikel.

π	=	3. 14159 26535 89793 23846 26433 83279
e	=	2. 71828 18284 59045 23536 02874 71352
$\sqrt{2}$	=	1. 41421 35623 73095 04880 16887 24209

Ik noemde als voorbeeld:
How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy chapters involving quantum mechanics.
Tel de letters van de woorden maar om de begindrie en de eerste veertien decimalen van π te vinden.

Agneta Aukema-Schepel herinnert zich een variant, gegeven door Dirk Struik (zie de biografie van de honderdjarige in de vorige *Nieuwe Wiskrant*) in 1963:

I like a drink, pepsicola of course...

Vertelt de afwijking in het drankje iets over de jeugdbeweging waar Struik nog vóór WO I actief in was?
F. v. d. Blij en Agneta Aukema-Schepel melden beide een Frans vers over π:

Que j'aime à faire connaître
un nombre utile aux sages
immortel Archimède
artiste ingénieux
qui de ton jugement
peut priser la valeur
pour moi ton problème
eut de pareil avantages.

Op 2 oktober 1986 schreef de wetenschapsredactie van de NRC een prijsvraag uit. De bedoeling was een lang verhaal over π te schrijven, waarin de tekst onder meer beschreef hoe de decimalen uit de tekst gehaald moesten worden. Want dat hoefde niet per se door letters van woorden tellen.
E. C. Buisssant des Amorie, die indertijd de tweede en derde prijs deelde met de Haagse zenuwarts dr. M. Zeegers, stuurde van zijn verhaal van toen 196 decimalen op, waarvan ik de decimalen 134 tot en met 196 opneem, omdat ze interessante informatie over π bevatten:

Velen proberen of er een arctangensfunctie is welke hem stipt benaderen doet!
Allerlei ingewikkelde formules gaan onstaan, convergente arctangensfunctie komt eraan
(de wiskunde lykt hulpmiddel te leveren! convergentiekenmerk van Leibnitz wordt er gefluisterd).
Edoch niets lukte. Lindemann bewees toen heel helder in de afgelopen eeuw: pogingen mislukken immer.
Stop onderzoek dus!

Kortom: 58 22317 25359 40812 84811 17450 28410 27019 38521 10555 96446 22948 95493 0.

Haakjes en uitroeptekens leveren de nullen, een lang woord als 'arctangensfunctie' geeft met zijn 17 letters twee decimalen tegelijk.
Zo'n ingewikkelde arctangensformule is bijvoorbeeld

$$\frac{\pi}{4} = 4arctan(\tfrac{1}{5}) - arctan(\tfrac{1}{239})$$

met behulp waarvan Machin rond het jaar 1700 al honderd decimalen van π berekende.
De verwijzing naar Lindemann is ook zeer ter zake. Lindemann bewees in 1882 dat π geen algebraïsch getal is en dat daarom zijn pogingen om met passer en liniaal een vierkant te construeren dat in oppervlakte gelijk is aan een gegeven cirkel, gedoemd is te mislukken.

Alle π-teksten tot nu toe spraken over π zelf.
F. v. d. Blij zond echter ook nog in (in oude spelling):

Eva, o lief o zoete hartedief
Uw blauwe oogen
zijn wreed bedrogen.

Ach, 3.14159265358!

Op de getallen e en $\sqrt{2}$

Maurits Dienske vroeg zich af wat er zo bijzonder is aan π. Ik ga dat hier niet uitleggen, maar geef wel Maurits' aftelvers voor e:

Op het getal E:

De handige e,
grenstal en grondtal!
e evenaart pi -
nochtans geen enkel aftelvers.

Hier telt het vraagteken niet voor de nul; Maurits geeft aan steeds bij de eerste nul te stoppen.
Tel maar na: e = 2.71828 18284 59045... Dat maakt het vers eigenlijk nog knapper.
De inhoud van het vers zou door het vers zelf in ieder geval achterhaald worden, ware het niet dat al eerder was ingezonden:

Je ontmoet e steevast in wiskunde
t grondtal is vernoemd naar Euler misschien!
Deze knaap is een genie van klasse!
Ik bewonder Leonard zeer.

Van de auteur die zoveel geschiedenis in zijn decimalen steekt: E. C. Buisssant des Amorie.

Over naar $\sqrt{2}$.
Maurits Dienske:

Op het getal $\sqrt{2}$ (in het Noors):

I Odda, i Bodø og i Lom,
store røtter to,
dyp desimal snø.

De letterlijke vertaling ligt dichter bij $\sqrt{6}$ dan bij $\sqrt{2}$:

In Odda, in Bodø en in Lom,
grote wortels twee,
diepe decimale sneeuw.

E. C. Buisssant des Amorie:

U weet t. Maar of t ook wordt gekend by een student, ach!

Tot zover 1.41421 35623 73095 04880.

Een ode op 0.110001000000000000000001

Maurits Dienske wijst als bijzonder object voor deze rubriek nog het getal van Liouville aan:

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

Ofwel: het getal dat in zijn decimale ontwikkeling overal nullen heeft, behalve op de posities die gegeven worden door de waarden van $n!$, daar staat een 1, zie het kopje. Maak daar maar eens iets bij! Het draait uit op eenzame eenletterwoorden en erg veel uitroeptekens. Maar is zoiets nodig om dit getal te kunnen onthouden?
We eren α liever met een klein wiskundige feest.
Omdat de decimale ontwikkeling van α niet periodiek is, is α zeker niet rationaal, dat wil zeggen α is niet de oplossing van een lineaire vergelijking met gehele coëfficienten. We gaan onderzoeken of α misschien oplossing is van een vierkantsvergelijking of vergelijking van nog hogere graad, maar wel met gehele coëfficienten.
Wat volgt is Liouville's bewijs (uit 1844) dat zo'n vergelijking niet bestaat. Liouville had daarmee het eerste transcendente getal gevonden. Nou ja, gevonden: uit het bewijs blijkt wel dat α met het oog op dit bewijs in elkaar gezet is. Het bewijs van Liouville (1844) is betrekkelijk eenvoudig, dat wil zeggen vereist weinig speciale voorkennis.
Veronderstel dat α wel algebraïsch is, dan is α wel oplossing van een vergelijking als:

$$F(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

waarin de a's, de coëfficienten, geheel zijn (natuurlijk niet allemaal 0). De graad van F, r, nemen we zo laag mogelijk en daarom zijn er geen kortere relatie van dit type. α is niet rationaal, dus r is minstens 2.
Merk dat de vergelijking $F(x) = 0$ helemáál geen rationale wortels heeft, want dan konden we delen door de factor (x – *die wortel*) en uiteindelijk na wegwerken van

noemers een kortere vergelijking vinden.
Bij invullen van een rationaal getal p/q in de uitdrukking voor F krijgen we zeker een resultaat ongelijk 0, maar er is wat meer te zien als we de hele uitdrukking in één breuk samennemen met noemer q^r; de teller van die breuk is ongelijk 0 en geheel, dus in absolute waarde groter of gelijk aan 1. Dus:

$$\left|F(\tfrac{p}{q})\right| = \frac{\text{geheel getal}}{q^r} \geq \frac{1}{q^r}$$

Omdat $F(\alpha) = 0$ kun je $F(x)$ delen door $(x-\alpha)$en we gaan proberen of we de ongelijkheid over

$$\left|F(\tfrac{p}{q})\right|$$

kunnen ombouwen tot een ongelijkheid over

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right|$$

Afsplitsen van de factor $(x - \alpha)$:

$$F(x) = (x-\alpha)\,G(x)$$

$G(x)$ is weer een veelterm, net als $F(x)$, maar is van lagere graad. G heeft niet allemaal gehele coëfficienten, maar dat doet er niet toe en $G(\alpha) \neq 0$, want anders voldeed α aan $F'(\alpha) = 0$.
We gaan nu α benaderen met rationale getallen p/q, die niet ver (zeg minder dan 1) van α af liggen en dan geldt zeker voor een of ander vast getal M:

$$\left|G(\tfrac{p}{q})\right| < M$$

Nu vullen we p/q ook in de ontbinding van F in:

$$F(\tfrac{p}{q}) = \left(\frac{p}{q} - \alpha\right)G(\tfrac{p}{q})$$

Samen met de begrenzing op G geeft dat:

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| > \frac{1}{Mq^r}$$

Omdat M en r vast zijn, kun je dat samenvatten met:
α laat zich door rationale getallen niet al te makkelijk benaderen. Zo zul je nooit *oneindig* veel verschillende breuken p/q vinden die α met nog hogere orde benaderen, in de zin van:

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{2}{q^{r+1}}$$

Immers, als die extra factor q in de noemer groot wordt, schiet $2/q$ onder de $1/M$, en er volgt een tegenspraak met de vorige ongelijkheid.

Omdat het getal van Liouville op een speciale manier geconstrueerd is, kunnen we laten zien dat er in dat geval juist wèl veel van die goede benaderingen zijn. Neem gewoon beginstukken van de decimale expansie van het getal α:

$$\frac{p_i}{q_i} = \sum_{n=1}^{i} \frac{1}{10^{n!}}$$

De noemer q_i weten we: $q_i = 10^{i!}$.

Het verschil van zo'n breuk met α zelf moet klein zijn, omdat in de decimale ontwikkeling eerst vele nullen staan, namelijk tussen de posities $i!$ en $(i+1)!$. Preciezer:

$$\left|\frac{p_i}{q_i} - \alpha\right| = \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} < \frac{2}{10^{(i+1)!}} = \frac{2}{q_i^{i+1}} < \frac{2}{q_i^{r+1}}$$

De laatste ongelijkheid geldt als $i > r$. Bij vaste r vinden we hier dus met gemak oneindig veel goede rationale benaderingen voor α, namelijk voor elke i groter dan r een. Tegenspraak met wat we zojuist vonden door te veronderstellen dat α aan een vergelijking met gehele coëfficienten van graad r voldoet.
Samengevat: α kan niet aan zo'n vergelijking voldoen. α is transcendent.
Voor π en e bestaan ook transcendentiebewijzen, ze zijn echter omslachtiger. Konden we er bij het getal van Liouville nog mee toe het *getal* α met rationale *getallen* te benaderen, in het geval van e en π moeten we *functies* van het type e^{ax} met rationale *functies* benaderen.
Dat voert hier te ver; laat nog gezegd zijn dat dit type benadering in de donkere krochten van computers wordt gebruikt om snel waarden van e^x, *sin*, *cos*, *tan*, enzovoorts te bepalen!
Einde decimalen, tijd voor een geheel ander probleem.

Ter discussie: de modderige kinderen

Soms kom je plotseling een oude bekende tegen.
Ik werd enkele weken geleden opnieuw geconfronteerd met het volgende probleem:

De Modderige Kinderen

Een vader heeft acht kinderen. Op een dag hebben de kinderen buitengespeeld en als ze thuis komen hebben er vijf modder op hun hoofd.
De kinderen kunnen wel van de anderen zien of ze modder op hun hoofd hebben, maar ze kunnen niet vaststellen of ze zelf modder op hun hoofd hebben.
Verder praten de kinderen niet met elkaar.
Vader roept alle kinderen bij zich en zegt: "Er is hier minstens één kind met modder op het hoofd. Willen nu alle kinderen met modder op het hoofd naar voren komen?"
Er gebeurt niets. Dan herhaalt vader de vraag en weer gebeurt er niets.
Maar als vader de vraag voor de vijfde keer stelt, stappen opeens alle kinderen met modder op hun hoofd naar voren.

Hoe kan het dat de kinderen opeens zeker weten dat ze modder op hun hoofd hebben?

De opgave voor deze keer is niet: beantwoord die vraag. Ik geef het begin van een antwoord en stel dat ter discussie.

Oplossing (?):
Nadat vader zijn vraag voor de eerste keer gesteld heeft weten alle kinderen dat er minstens één kind is met modder op het hoofd. Als er precies één kind was met modder op het hoofd, dan zou dàt kind weten, dat het modder op het hoofd had, omdat dàt kind geen medemodderaars ziet. Dat is niet het geval. Dus zijn er minstens twee.
Als de vader zijn vraag voor de tweede keer stelt, weet iedereen dat dus, en als er dan precies twee kinderen met modder op het hoofd zijn... enzovoort.
Het verhaal loopt zo verder, tot bij de vijfde keer, als ieder weet dat er minstens....
Enzovoort.

Opgave 119
Is hier een goede redenering van te maken? Of is er iets fundamenteel mis met de puzzel? Moet de puzzel misschien anders geformuleerd worden?

Om vast wat twijfel te wekken:
Zet er een moeder naast die zegt: "Er is hier minstens één kind dat géén modder op het hoofd heeft. Willen nu de kinderen zonder modder op het hoofd een pas naar achteren doen?"
Dat verandert weinig aan de puzzel, toch zou volgens de logica van het bovenstaande nu al na drie keer toespreken bekend zijn wie wel of geen modder op het hoofd heeft!
Het verhaal wordt gebruikt om het onderwerp verspreide kennis bij parallelle computers aan te snijden. Duidelijk is waarom: de kinderen schijnen er gebruik van te maken dat de anderen ook redeneren.
Ik kende de puzzel in andere vorm al: met kabouters met blauwe of rode puntmutsen, en zonder zo'n herhalende vader. Toen was één keer vragen nog genoeg.
Het verhaal werd gebruikt als voorbeeld bij volledige inductie.

Volgende keer

Graag meer argumenten en tegenargumenten bij de modderige kinderen! Reacties worden zoals altijd opgenomen en deze keer natuurlijk ook tegenover elkaar geplaatst.
Nieuwe opgaven zullen gaan over het thema conflictlijnen, dat in het artikel van Martin Kindt in deze *Nieuwe Wiskrant* aan de orde wordt gesteld. Lees dat!