

Ruimtelijk inzicht onder de loep

M. Witterholt / H. Heinneman

Werkgroep Wiskundendidactiek, RU Groningen¹

Inleiding

Bij het oplossen van een wiskundig probleem zijn er vaak verschillende oplossingsmethoden. Voor het onderwijs is het daarbij interessant om te weten welke gedachtengang leerlingen volgen en welke denkstappen zij daarbij uitvoeren. Daar kan de uitleg en de hulp van een leraar bij aansluiten. Het is ook van belang om te weten of bepaalde oplossingsmethoden incidenteel door een leerling worden gebruikt of dat er een zekere mate van consistentie valt op te merken.

In dit artikel gaat het over de verschillende manieren waarop vijf leerlingen uit het eerste leerjaar ruimtelijke problemen aanpakken en oplossen. Daarvoor is een pakket ruimtemeetkunde ontwikkeld dat bestaat uit tien opgaven. De opgaven sluiten aan bij het nieuwe leerplan Wiskunde 12-16.

De leerlingen volgden in het schooljaar '92-'93 op het Zernike College in Groningen al een onderwijsprogramma met pakketjes kijkmeetkunde. Zij zijn in dat opzicht goed vergelijkbaar met de leerlingen, die vanaf '93-'94 landelijk de basisvorming wiskunde volgen. Het schooladvies van deze leerlingen varieerde van VBO-MAVO tot VWO.

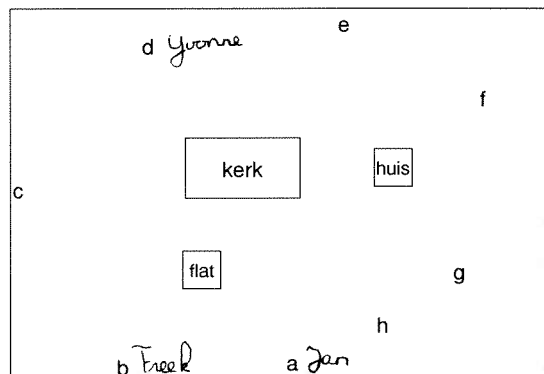
Voor het onderzoek zijn de leerlingen één voor één tijdens een lesuur bij ons te gast geweest en hun aanpak is op de video opgenomen. De werkwijze is als volgt. De leerlingen lezen de vraag hardop voor. Vervolgens begint het oplossen van de opgave. Hierbij wordt de leerling gestimuleerd om hardop te denken en bij elke denkstap te vertellen wat hij/zij doet. Een leerling maakt een opgave 'geheel op eigen kracht', er wordt niks voorgezegd. Voor het maken van de opgaven krijgen de leerlingen veertig minuten de tijd.

In het onderzoek gaat het om de vraag in hoeverre het ruimtelijk inzicht door het wiskundeonderwijs verder kan worden ontwikkeld. Om die ontwikkeling te kunnen volgen wordt ons onderzoek in '94-'95 bij dezelfde leerlingen voortgezet. Uit de verzameling opgaven over ruimtemeetkunde is er één opgave uitgelicht om daarmee de gebruikte oplossingsmethoden te illustreren.

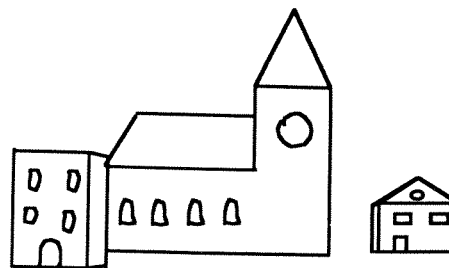
De opgaven

De opgave van het pakket ruimtemeetkunde die we gaan bekijken, wordt vooraf gegaan door opgave 1 waar een plattegrond is gegeven van een kerk, een flat en een huis. Drie personen, Jan, Yvonne en Freek, zien ieder op hun eigen manier de kerk, de flat en het huis. De leerlingen geven in de plattegrond aan, waar de drie personen staan. Om een indruk te krijgen geven we een (goede) uitwerking van opgave 1 zoals die door Carla gemaakt is.

Hieronder zie je een plattegrond van een dorp met een kerk, een flat en een huis.



Jan staat op de plaats van een van de letters.



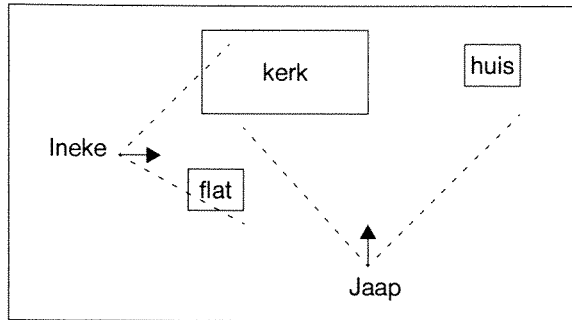
Jan ziet dit.

> Geef op de plattegrond aan waar Jan staat.

Opgave 1

In dit artikel richten we ons verder op opgave 2, waarin een dergelijke plattegrond het uitgangspunt is. Ditmaal is de opdracht aan de leerlingen de foto te tekenen die Jaap maakt.

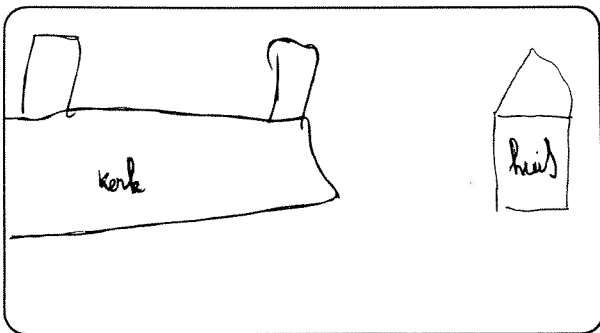
Hieronder zie je een plattegrond met Ineke en Jaap. Ze nemen een foto in de richting van de pijlen. De stippellijnen geven de grens van de foto aan.



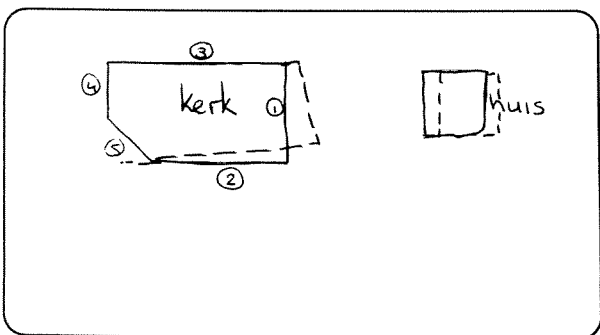
> Teken de foto die Jaap maakt.

Opgave 2

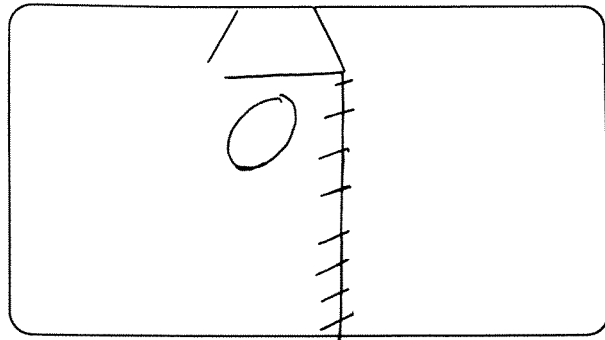
Van de vijf leerlingen uit het onderzoek, Harry, Titia, Ineke, Carla en Jaap Harm staan de uitwerkingen hieronder afgebeeld.



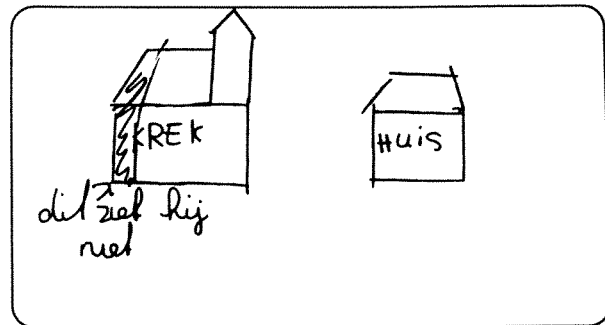
Harry



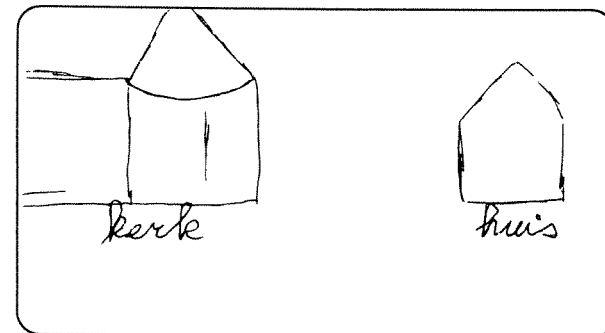
Titia



Ineke



Carla



Jaap Harm

Uit de tekeningen van de leerlingen valt af te leiden dat de leerlingen verschillende oplossingsmethoden gebruiken. Deze zijn:

- een deelplattegrond tekenen
- tekenen wat je recht vooruit, langs de pijl, ziet
- een tekening die goed is, met of zonder perspectief.

De meeste leerlingen gebruiken opgave 1 om te kunnen tekenen bij opgave 2. Harry is echter een uitzondering. De kerk op de foto van Harry heeft namelijk twee torentjes. Hierover zegt hij: 'Zoiets zal die kerk zijn ... torentje erop en daar nog één'. Uitgaande van de pijl en de kijklijnen is de foto die Harry tekent goed. Titia had het er maar moeilijk mee. Ze maakt een deelplattegrond van de gegeven plattegrond, ofwel een bovenaanzicht in plaats

van een vooraanzicht. Door middel van de stippellijnen in haar foto is aangegeven dat ze meerdere malen aan het gummen is geweest. De omcirkelde getallen geven aan welke lijnen Titia achtereenvolgens heeft getekend. De tekening van Ineke laat alleen een deel van de kerktoren zien. Hierbij zegt ze: 'Jaap ziet wat zich tussen de kerk en het huis bevindt'. Volgens haar kijkt Jaap tegen de zijkant en de voorkant van de kerk aan. Daarom arceert ze alleen de zijkant van de kerk in haar foto en tekent ze het kerkraam, een rondje. Als Ineke de foto van Jaap tekent kijkt ze recht vooruit. Jaap Harm had met deze opgave niet zoveel problemen. Hij is de enige leerling die ook met perspectief tekent. Hij lijkt wat dat betreft een voorsprong te hebben op de andere leerlingen.

De analyse

De leerlingen worden tijdens het maken van de opgaven opgenomen op de video. Deze video-opname wordt daarna uitgewerkt tot een protocol. Een protocol geeft een beeld hoe de leerling tot een oplossing is gekomen. Bij iedere belangrijke handeling is de tijd vermeld. Aan het einde van een opgave is af te lezen hoeveel tijd een leerling nodig heeft gehad voor die opgave.

De protocollen leveren enorm veel informatie. De belangrijkste informatie is ondergebracht in categorieën. Op deze manier blijven er vier categorieën over die omgezet worden in grafieken (Schoenfeld, 1982). De grafieken geven kort en overzichtelijk het gehele proces van het oplossen van een opgave door een leerling weer.

Zowel de verkorte protocollen als de grafieken bevatten de volgende categorieën:

1. Rep = Representatie

In de representatie probeert de leerling zich het probleem voor te stellen. Voorbeelden van een representatie zijn (her)lezen van het probleem, draaien van het werkblad, kijken naar het werkblad of aanwijzen op het werkblad.

2. Tek = Tekenen

De leerling tekent op het werkblad. Het tekenen gaat soms gepaard met een verbale toelichting, het aanwijzen van de tekening of van de gegevens of met het kijken naar de tekening. De leerling tekent met of zonder geodriehoek.

3. A = Antwoord

De leerling geeft verbaal een antwoord en/of de leerling vult een antwoord in. Het geven van een antwoord kan voorlopig zijn. De leerling kan een antwoord herzien en vervolgens een definitief antwoord geven.

4. C = Controle

De leerling gaat voor zichzelf na of een gegeven antwoord juist is, dan wel juist kan zijn. Je ziet bijvoorbeeld aan het gummen, dat een leerling een controlehandeling heeft uitgevoerd.

Een controlehandeling kan ontstaan naar aanleiding

van een vraag die de begeleider aan de leerling stelt. Er is dan sprake van een niet-spontane controle. De leerling kan ook uit zichzelf een controlehandeling uitvoeren. Een dergelijke controle is wel spontaan.

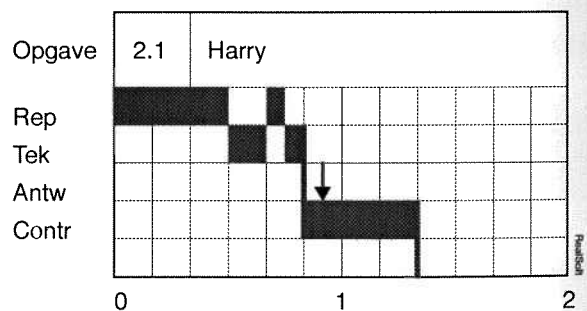
5. ↑ of ↓

De begeleider stelt een vraag aan de leerling. Vaak wordt een vraag, gesteld door de begeleider, onbedoeld gevolgd door een controlehandeling of een (nieuwe) representatie door de leerling. Het is niet zeker wat een leerling gedaan zou hebben als er geen vraag gesteld zou zijn. De begeleider stelt alleen een vraag als niet duidelijk is waarom een leerling een bepaalde handeling uitvoert.

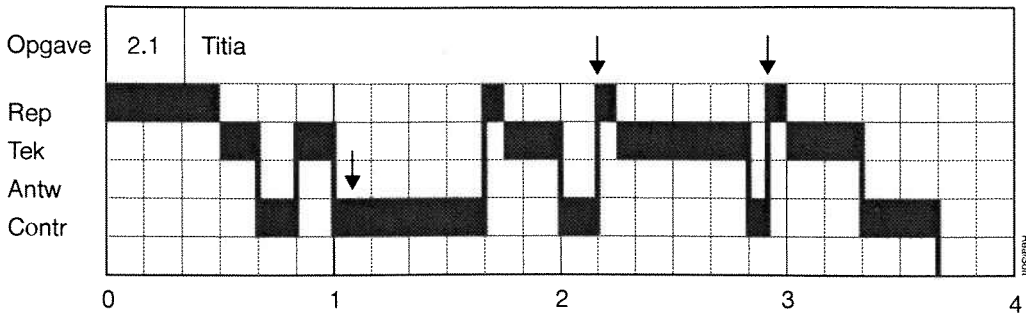
De grafieken

De grafieken zijn een belangrijk onderdeel van het onderzoek. Met behulp van de grafieken kunnen de verschillende leerlingen gekarakteriseerd worden. We kunnen hierbij denken aan leerlingen die maar wat doen, leerlingen die zich laten leiden en leerlingen die hun eigen gang gaan. De grafieken laten zien hoe leerlingen tot een oplossing komen. Hierbij kan gelet worden op representeren, tekenen en controleren. Hieronder beschouwen we de grafieken die gemaakt zijn naar aanleiding van de gemaakte opgave.

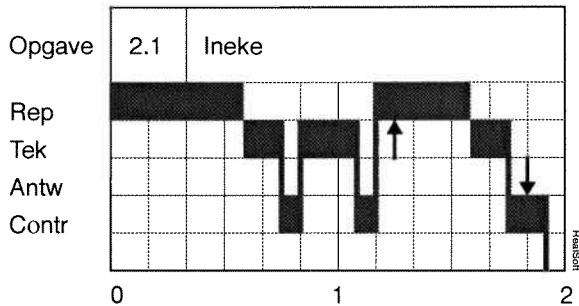
Als eerste kijken we naar de grafiek van Harry. Voor het maken van deze opgave heeft Harry slechts 1.20 minuten nodig. Als we de tekening van Harry bekijken is dat niet zo verwonderlijk. Hij schetst wat 'Jaap' ziet. Uit de grafiek valt af te leiden dat Harry de opgave even representeren, tekenen en controleren. Daarna begint hij te tekenen, de kerk. Daarna nog even representeren waar het huis staat, tekenen en tot slot controleert hij de tekening.



De grafiek van Titia geeft een volstrekt ander beeld dan de grafiek van Harry. Titia heeft 3.40 minuten nodig gehad om de opgave te maken. De verschillende categorieën wisselen elkaar af. Titia probeert telkens opnieuw het probleem te representeren, gevolgd door tekenen en controleren. Uit de gemaakte tekening blijkt dat de controlehandelingen die ze uitvoert vooral bestaan uit gummen, de stippellijnen in de tekening. Titia tekent een deelplaattegrond. Kennelijk kan ze zich geen goede voorstelling maken van de plaats waar Jaap staat.



Ineke heeft de tekening behorende bij deze opgave binnen twee minuten op papier staan. Evenals de andere leerlingen begint Ineke met een representatie. Als ze heeft getekend, dan controleert ze dit altijd spontaan. Ineke denkt dat Jaap tussen de kerk en het huis doorkijkt. Jaap zou volgens haar dus evengoed niks kunnen zien. Na de tweede representatie komt ze erachter dat Jaap waarschijnlijk alleen de zijkant en de voorkant van de kerk ziet. Dit geeft ze aan in de tekening.

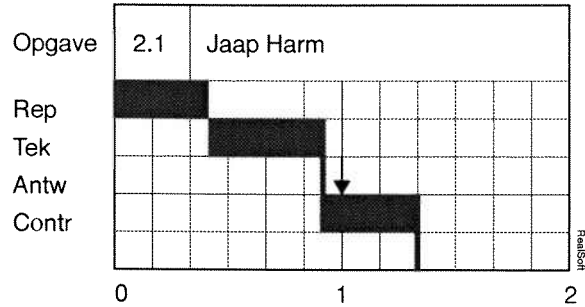


Carla begint opgave 2.1 met een opvallend lange representatie. Dit is kenmerkend voor Carla. Ze verplaatst zich in de tekening op de plek van Jaap en bespreekt alle mogelijkheden. Deze aanpak handhaaft ze eigenlijk bij alle opgaven van dit pakketje.

De representatie kost veel tijd, maar het gevolg is dat Carla daarna de tekening snel kan maken. Carla voert na het tekenen telkens een controlehandeling uit. Meestal vertelt ze even wat ze heeft gedaan. De begeleider hoeft haar dan ook amper om een toelichting te vragen.

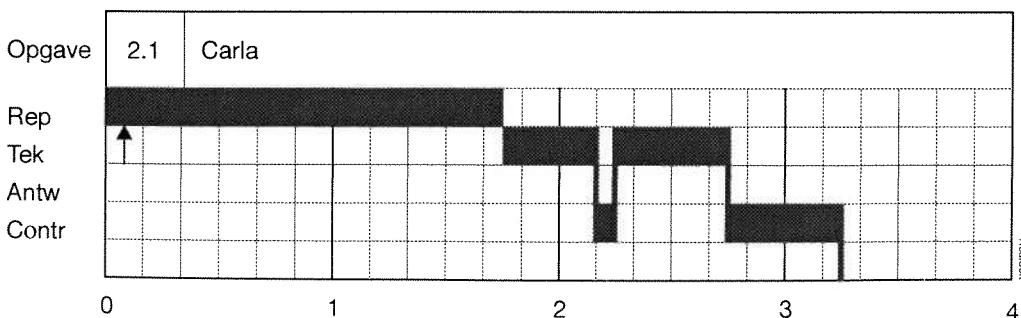
Voor Jaap Harm is een dergelijke opgave 'een fluitje van een cent'. Hij representeert de opgave, tekent, controleert en klaar is het alweer. Jaap Harm heeft duidelijk veel inzicht. Voor hem is representeren een kwestie van de opgave goed lezen. Vervolgens ziet hij de situatie meteen

voor zich. In volgende opgaven is Jaap Harm dan ook geneigd om de controlehandeling weg te laten. Hij weet immers wel dat z'n gevonden antwoord goed is!



Achtergronden

De categorisering en visualisering van de oplossingsprocessen is in dit artikel beperkt tot de indeling, die relevant is voor de besproken opgave. In de literatuur over het oplossen van problemen komt onder allerlei namen het belang van de vorming van een goede representatie van de probleemsituatie naar voren². Leerlingen hebben de neiging om de fase van het representeren over te slaan en snel een specifieke oplossingsmethode uit hun geheugen op te diepen. Een tweede belangrijk aspect van het oplossen van problemen kun je samenvatten onder het begrip 'controleren'. In de literatuur spreekt men over 'monitoring', het controleren en evalueren van wat je aan het doen bent. Het gaat om de metacognitieve vaardigheden, het nu en dan op afstand bekijken wat je bij het oplossen aan het doen bent. Dus bijhouden waar je mee bezig bent, 'Wat was ook al weer de vraag', 'Hoe ver ben ik nu', 'Is dit een redelijk (tussen)antwoord', 'Had ik het achteraf handiger kunnen doen', enzovoort.



Een aspect dat zich niet laat vangen in de grafieken, betreft de houding ten opzichte van wiskunde, de durf om aan een probleem te beginnen, het vertrouwen dat je er wel uitkomt, de opvatting over hoe je wiskunde moet leren. Grofweg gaat het daarbij om het verschil tussen leerlingen die denken dat je wiskunde leert door specifieke oplossingsmethoden uit het hoofd te leren bij specifieke opgaven en leerlingen die erop vertrouwen dat zij al nadenkend bij wiskunde een heel eind komen.

Deze drie aspecten van het met succes kunnen oplossen van wiskundige problemen zijn voor het wiskundeonderwijs in de basisvorming en daarna nog veel belangrijker geworden dan zij al waren. Het eenvoudig trainen op typen opgaven met de bijbehorende oplossingsmethode belooft veel minder succes dan bij de huidige examens het geval is. Een grote variatie aan contexten en probleemsituaties maakt het noodzakelijk om in het wiskundeonderwijs veel meer aandacht te schenken aan het leren representeren ('wat is er eigenlijk aan de hand?'), aan het onderweg nadenken over wat je eigenlijk aan het doen bent ('waar ben ik ook al weer mee bezig?') en aan het bevorderen van het vertrouwen dat je zelf door nadenken en passende concretisering bij wiskunde een heel eind kunt komen.

Discussie

De in dit artikel besproken ruimtelijke opgave laat belangrijke verschillen tussen de leerlingen zien. Verschillen in aanpak, oplossingsmethode, houding, mate van controleren enzovoort. Dergelijke verschillen waren ook bij de andere ruimtelijke opgaven te constateren. Het valt hierbij op dat bij leerlingen sommige algemene aspecten van hun manier van oplossen consistent terug komen, terwijl andere aspecten wisselen per opgave.

Kijken we nu in het bijzonder naar de besproken ruimtelijke opgave, dan valt het volgende over de aanpak van die opgave op te merken. De opgave vereist dat de leerlingen zich als het ware in de positie van Ineke of Jaap verplaatsen en dan tekenen wat je daar ziet. Dit is een essentieel aspect van ruimtelijk inzicht. Leerlingen die een deelplattegrond tekenen of alleen recht vooruit tekenen, zijn nog niet zover. In de onderwijssituatie ligt het dan voor de hand om tot concretisering over te gaan en de ruimtelijke situatie na te laten bouwen. Het hoort bij de te verwerven houding dat leerlingen dat uit zichzelf gaan doen.

In het vervolgonderzoek willen we nagaan hoe bij deze leerlingen hun ontwikkeling in het representeren, controleren en gebruik van oplossingsmethoden verloopt, dankzij of ondanks het wiskundeonderwijs. Verandert de houding ten opzichte van wiskunde met de jaren? Verbeteren de algemene werkmethode zich? Interessant is de vraag hoe het ruimtelijk inzicht zich bij de leerlingen verder ontwikkelt.

Noten

- [1] Onderzoek opgestart en begeleid in een werkgroep met: drs. A. de Haan, dr. E.G. Harskamp, prof. dr. K.B. Koster, drs. M.G.W. Bos, dr. A. van Streun, drs. H. Heinneman en drs. M.G. Witterholt.
- [2] B. Lagerwerf (1994). *Wiskunde onderwijs in de basisvorming*; A.H. Schoenfeld (1992). *Learning from Instruction*, in: *Handbook of Research on mathematics teaching and learning*, 355-357; A. van Streun (1983). De herkenning van wiskundige essenties in realistische probleemsituaties. *Nieuwe Wiskrant*, 2 (4), 20-24.