

Ze kunnen meer

Werken aan oplossingsstrategieën in 2 vwo

J.M. Debets

Christiaan Huygens College, Eindhoven

Inleiding

In dit artikel wordt verslag gedaan van een manier van werken in een klas 2 vwo (gymnasium) waarbij naast het normale boek en de normale stof stelselmatig aandacht wordt besteed aan het bij leerlingen ontwikkelen van extra vaardigheden die van belang kunnen zijn voor het oplossen van problemen bij wiskunde en andere vakken. Het was een samenloop van omstandigheden die er toe geleid heeft dat ik op dit moment in mijn tweede klas gymnasium van de drie uur wiskunde per week er twee besteed aan de gewone stof (*Getal en Ruimte*) en één uur aan probleemoplossen in algemenere zin, aan discussies over oplossingsmethoden, aan denken op het scherp van de snede, aan een uitdaging voor de leerlingen en voor mij.

Allereerst waren daar de basisvorming en het nieuwe wiskundeprogramma. Er bleek in klas 1 voor de leerlingen tijd over te zijn. Vervolgens was daar het besluit van mijn school, het Christiaan Huygens College in Eindhoven, om te starten met een gymnasiumbrugklas waarin van de leerlingen meer geëist zou gaan worden dan van de andere brugklassers.

Verder was daar mijn deelname aan de studiereis naar Schotland mei vorig jaar samen met 29 collega-docenten wiskunde. Door die reis maakte ik kennis met het boek *Teaching problem-solving strategies*¹. Dat boek was het startpunt voor mijn ene speciale uur.

En tot slot was daar al langer de overtuiging dat leerlingen, en niet alleen gymnasiasten, meer kunnen dan wij van ze vragen en zij van zichzelf vermoeden.

Laat ik wat nader ingaan op de genoemde factoren.

Basisvorming en het nieuwe leerplan

Het tempo en het niveau in klas 2 is aanmerkelijk hoger dan in klas 1. Voor de hoeveelheid stof en oefening was het dus achteraf gezien niet nodig geweest om op zoek te gaan naar iets extra's.

Tot nog toe zie ik toch kans om in de twee uur die wij uit het gewone boek werken gelijk op te gaan met de twee HAVO-klassen die ik heb. Dat houdt natuurlijk wel in dat in 2 gym meer opgaven worden overgeslagen.

Gymbrugklas

Op meer plaatsen in onderwijsland is er een tendens om extra aandacht te besteden aan leerlingen die 'er boven uitsteken'. Zonder nu meteen te spreken over hoogbegeefden is het toch duidelijk dat voor leerlingen die sneller dan normaal de leerstof begrijpen en hun huiswerk eerder afhebben, het demotiverend is dat zij zonder bovenmatige inspanning goede cijfers halen.

Daarom besloot mijn school om goede leerlingen vanaf de brugklas te verenigen en hen extra uit te dagen in de vorm van projectweken naast de normale leerstof. Voor mij was die stap aanleiding om ook voor 2 gym op zoek te gaan naar extra uitdaging.

Studiereis Schotland

In Schotland is de middenschoolgedachte volledig verwezenlijkt. Leerlingen van de laatste klas basisschool gaan en bloc naar dezelfde middelbare school en zitten daar de eerste jaren bij elkaar (mixed ability). Op een van de scholen die ik bezocht heb, maakte ik een les mee waarbij het heterogene systeem doorbroken was: speciaal voor wiskunde werden de beste leerlingen van alle eerste brugklassen bij elkaar gezet en kregen zij problemen gepresenteerd uit het boek dat ik hierboven noemde. De leerlingen waren zo enthousiast bezig en mijn eerste indruk van het boek was zo positief, dat ik bij terugkomst in Nederland besloot het boek te bestellen. Bij bestudering in de zomervakantie bleek dat het niet alleen problemen presenteerde, maar dat ook gestructureerd deed. Ik besloot daarom dat boek te gaan gebruiken.

Capaciteit leerlingen

De gedachte dat leerlingen meer kunnen, vloeit voort uit mijn overtuiging dat leerlingen beschikken over een universeler denkpotentieel dan het vermogen 'standaard' wiskundeopgaven op te lossen. In die mening sta ik niet alleen, zie ook bijvoorbeeld de organisatie *VIERSKANT*².

Uitgangspunten

Ondanks de vernieuwingen met het nieuwe programma wiskunde in de basisvorming is er ook bij de nieuwere

contextgebonden wiskunde nog steeds een duidelijke relatie tussen de behandelde theorie en de direct daarop volgende opgaven.

In het boek dat ik gebruik, *Getal en Ruimte*, wordt een stukje theorie gepresenteerd, een voorbeeld van een opgave met de oplossingsmethode die erbij hoort en daarna een aantal opgaven om deze oplossingsmethode in te oefenen. Meestal gaat het dan om het inoefenen van een algoritme. Gevolg is dat als de leerling de regel(s) van het algoritme niet meer kent ook het oplossingsmechanisme stopt.

Omdat wiskunde meer is dan het inoefenen van oplossingsmethoden, is het zinvol om naar situaties te zoeken die een groter beroep doen op de creativiteit, onafhankelijkheid en het eigen beoordelingsvermogen van de individuele leerling: hij/zij moet zich meer uitgedaagd weten.

Ik vind het belangrijk de leerling actief kennis te laten maken met strategieën voor het oplossen van een probleem. Het verschil met de eerder genoemde oplossingsalgoritmen is dat bij strategieën een minder star schema van aanpak voorgeschreven is: er wordt slechts een richting aangegeven die zou kunnen leiden tot het gestelde doel. Dat betekent dus dat een strategie flexibeler is.

Gevolg is wel dat tevoren minder duidelijk is welke strategie in welke probleemsituatie succesvol zou kunnen zijn. Er wordt dus een groter beroep op het beoordelingsvermogen van de probleemoplosser gedaan. Tevens zijn de toepassingsmogelijkheden groter: nadrukkelijk ook bij niet-wiskundige problemen. Tenslotte geeft de bekendheid van de leerling met bepaalde strategieën aan de docent de mogelijkheid hieraan te refereren als de betreffende leerling met een bepaald probleem vastzit. De docent hoeft dan niet de oplossing geheel of gedeeltelijk voor te doen, maar kan de hint geven een bepaalde strategie te proberen bij het oplossen van het probleem.

Het onderwijskader

Zoals gezegd besteed ik één van de drie lessen per week in 2 gym aan werken met oplossingsstrategieën. Tijdens die ene les wordt door mij niet verwezen naar situaties uit het gewone boek. Op die manier is de kans op een universeler transfer van de strategieën naar andere vakken groter. De behandelde strategieën, de oplossingen van problemen worden verder nergens getoetst en hebben dan ook geen directe invloed op het cijfer voor wiskunde. Dat betekent dat het presteren in die lessen zonder cijferdruk is en dat de motivatie slechts gehaald wordt uit het succes bij het oplossen van de problemen.

Lesinhoud

In het eerste deel van *Teaching problem-solving strategies* worden zes basisstrategieën gepresenteerd:

- schatten en controleren
- een overzicht maken (lijst, tabel)

- patronen herkennen
- een model ontwerpen
- elimineren
- vereenvoudigen.

Elk van deze zes werkwijzen wordt in een aantal lessen (twee à vier per onderwerp) systematisch ontwikkeld bij de leerlingen.

Dat gebeurt in de vorm van een introductieles aan de hand van een probleem of een spel waardoor de leerlingen zelf ervaren welk nut een bepaalde strategie kan hebben.

Aansluitend geven een of meer werkbladen met opdrachten de gelegenheid om de betreffende strategie (niet een algoritme!) verder te ontwikkelen (zie de voorbeelden van opgaven op de volgende pagina).

Zelf heb ik nog een zevende oplossingsstrategie toegevoegd:

- lezen, redeneren en controleren.

Bij deze strategie gaat het vooral om het oplossen van logicaproblemen en het controleren van de antwoorden daarvan.

De onderwijspraktijk

In het begin heb ik de stof uit het boek niet zo gestructureerd aangeboden als de bedoeling was, want ik wilde eerst kijken of de problemen aansloegen. Toen dat goed ging, heb ik een aantal volgende basisstrategieën wel gestructureerd aangeboden. Ook dat ging goed. Zo is bijvoorbeeld de eerste les van de tweede oplossingsstrategie (maak een lijst/overzicht) een spel waarin spelenderwijs de begrippen permutaties en combinaties worden gebruikt. Niet om formules te introduceren voor die wiskundige begrippen, maar om de noodzaak van een goede en systematische registratie van de mogelijkheden te laten ervaren.

Aan het begin van de les wordt de klas in twee gelijke groepen verdeeld die ieder aan een kant van het lokaal tegenover elkaar plaatsnemen. Iedere groep kiest een team van drie leerlingen die de groep vertegenwoordigen. Elk van die leerlingen krijgt een blad papier met daarop groot geschreven een letter. Het ene team de letters A, B en C en het tweede team de letters D, E en F. Beide teams stellen zich tegenover elkaar op en doen op het teken van de docent één stap naar voren in een lettervolgorde die telkens weer nieuw moet zijn. De zittende groepsleden van de tegenstander houden bij of die volgorde inderdaad anders is. Verliezer is het team waarbij een volgorde zich het eerst herhaalt.

Wordt al snel ontdekt dat er zes mogelijkheden zijn, dan kan de opdracht verzwaard worden door teams van vier leden samen te stellen of – nog ingewikkelder – door teams van vijf leden te laten kiezen waarvan bij het signaal telkens twee van de vijf in een nieuwe combinatie naar voren moeten stappen. Zelfs als er een leerling is die telkens vrij snel weet uit te rekenen hoe groot het aantal mogelijkheden is (zoals in mijn klas het geval was) blijkt

toch het team te winnen dat een systeem hanteert bij de notatie en de volgorde van de mogelijkheden.

Daar ben je dan een hele les mee bezig, maar ieder weet de les daarna nog precies waarom de een won en de ander verloor. Vervolgens komen er lesbladen met aansluitende problemen.

Een voorbeeld van een opgave voor het maken van een lijst is:

O CCASION
C AR
C ENTRE

Bij uw NIEUWE AUTO
drie opties GRATIS!

Kies uit de lijst
HIERNAAST !

Hoeveel verschillende pakketten met daarin drie opties zijn mogelijk bij de firma OCC?

Maak een overzicht volgens een systeem zodat je geen mogelijkheden over het hoofd ziet.



Ervaringen en reacties

Geen enkele leerling in mijn klas vindt die speciale les vervelend en een meerderheid vindt het zelfs heel leuk zoals blijkt uit de reacties op een aantal vragen die ik hen stelde.

Wat vind je van de speciale les?

Abi-Janne: Ik vind de extra lessen wel leuk want je hebt iets meer vrijheid en het zijn een soort raadseltjes. Het is een beetje een uitdaging om het goede antwoord te vinden. Bovendien vind ik het leuk dat je mag samenwerken.

Wat leer je er (extra) van?

Silvia: Het logisch denken en de vraag goed lezen.
Timon: Meer vooruit denken en beter schaken (er is niet één schaakvraagstuk aan de orde geweest!).

Vind je het erg nadelig: de gewone wiskunde in twee in plaats van in drie uur?

Peter: Nee, dat vind ik niet, ik kan het goed bijhouden en het huiswerk is ook geen punt, omdat we daar in de les ook al wat aan mogen werken.

Welk soort opgaven vind je het leukste?

Evelien: Ik vind 'logica' het leukste omdat er een verhaaltje over verteld wordt en je dan de belangrijkste dingen eruit moet halen en dat bij elkaar samenvoegen tot een oplossing.

N.N.: De moeilijkste of hele makkelijke waar je toch niet opkomt (instinkertjes).

De gang van zaken tot nu toe heeft mijn verwachtingen overtroffen en wel in twee opzichten. Dat leerlingen dergelijke wat meer uitdagende opdrachten wel leuk zouden vinden, kwam niet onverwacht.

Ik had niet gedacht dat de winst bij het *formuleren van het denkproces/oplossingsstrategie* zo groot zou zijn. Leerlingen die een oplossing hebben, doen hun uiterste best om voor de klas zo zorgvuldig en duidelijk mogelijk de weg naar de oplossing te formuleren en de klasgenoten zitten op de punt van hun stoel om de geldigheid van de gevolgde redenering tegen het licht te houden en er vervolgens commentaar op te geven. Dit gebeurt zonder elkaar vliegen af te vangen. Ook alternatieven worden aangeboden en met elkaar vergeleken.

Zonder dat daar veel sturing van mijn kant voor nodig was, waren na één à twee lessen de – inhoudelijk soms diepgaande – discussies zo vormgegeven dat ieder wist en voelde waar ze voor bedoeld waren: het aanscherpen van eigen denkprocessen, het verbeteren van redeneringen, het vergroten van de bagage aan oplossingsstrategieën. Als docent moet je trouwens evenzeer alert zijn, omdat wat over tafel gaat nooit routine is.

Wat er verder uitspringt, is de ontplooiing van leerlingen die wat introverter van aard zijn. Doordat er nogal eens wordt samengewerkt, maar vooral door de presentatie

Voorbeelden

Uit IV-1: een model ontwerpen

Bij elk van de volgende problemen moet je:

- beslissen of een model zou kunnen helpen of niet bij het oplossen
 - als je besluit *geen model* te gebruiken het antwoord geven voor het probleem en je oplossing verklaren
 - als je denkt dat een model kan helpen dat *model beschrijven* maar het *probleem zelf niet oplossen*.
- > Op hoeveel verschillende manieren kun je drie postzegels uit een groot vel postzegels scheuren als alle drie postzegels aan elkaar vast moeten blijven zitten?
- > Kanonskogels liggen naast een antiek kanon klaar om afgevuurd te worden. De kogels zijn opgestapeld in vier lagen die samen een piramide vormen waarbij het grondvlak vierkant is. Hoeveel kogels bevat de piramide?

Uit VI-1: vereenvoudigen

Soms is een probleem te ingewikkeld om in één keer te overzien. In zo'n geval is het nuttig het probleem te vereenvoudigen.

Dat kun je doen door het in aparte deelproblemen te splitsen en elk deel apart aan te pakken.

- > Hoeveel palindromen zijn er tussen 0 en 1000? (Een palindroom is een getal zoals bijv. 525: dezelfde betekenis als je het van voor naar achter of van achter naar voor leest.) (Vereenvoudig het probleem. Zoek apart naar het aantal palindromen met n , twee en drie cijfers.)
- Hoeveel van de getallen van 1 t/m 9 zijn palindromen?
 - Hoeveel van de getallen tussen 10 en 100 zijn palindromen? (Maak een lijst van de palindromen.)
 - Zoek het aantal palindromen tussen 100 en 1000.
1 0 1 2 0 2 ...
1 1 1 2 1 2 ...
... ...
Ga zo door!
 - Wat is het antwoord op de oorspronkelijke vraag?
- > Als je de cijfers in een getal optelt, bij hoeveel van de getallen tussen 0 en 1000 is de som van de cijfers dan 10?
- > Toen de oude man stierf was zijn leeftijd het $\frac{1}{29}$ ste deel van zijn geboortjaar. Hij leefde al in het jaar 1900. Hoe oud was hij in dat jaar?

Uit VII-1: lezen, redeneren en controleren

Bij elk van de volgende problemen moet je:

- de tekst goed lezen
 - proberen via een goede redenering een oplossing te vinden
 - je gevonden antwoord controleren.
- Als blijkt dat je antwoord fout was, begin je van voren af aan met de opdracht.
- > Een fles wijn kost f 10,-. De wijn was f 9,- meer waard dan de fles. Hoeveel was de fles waard? (Dat is nu dus simpel. Vergeet niet toch even te controleren...)
- > 56 dierenkaakjes worden gevoerd aan 10 huisdieren: katten en/of honden. Iedere hond krijgt 6 en iedere kat 5 kaakjes. Hoeveel katten en hoeveel honden waren er? (De mogelijke aanpak voor zo'n probleem zijn we al eerder tegengekomen, maar het gaat ook door 'trial and error': als je maar telkens controleert.)

Uit VII-2: logica en ijzeren logica

- > Op een bepaalde vergadering zijn 100 politici aanwezig. Iedere politicus is óf eerlijk óf een schurk. Gegeven zijn verder de volgende twee feiten:
- tenminste één van de politici is eerlijk
 - bij elk willekeurig tweetal van de 100 is tenminste één van de twee een schurk.
- Kan hieruit worden afgeleid hoeveel van de 100 er eerlijk en hoeveel er schurk zijn? (Maak je geen zorgen over de vraag hoe het in werkelijkheid staat met de eerlijkheid van politici maar beperk je tot het gestelde hiernaast. Het juiste antwoord is langs verschillende wegen te verkrijgen.)

Zuiver redeneren kan van levensbelang zijn zoals uit de volgende opgave over ter dood veroordeelden blijkt.

- > Drie ter dood veroordeelden worden in een donkere kamer gelaten waarin drie rode en twee witte mutsen liggen. Ieder pakt een muts en zet hem op. Ze gaan op een rij achter elkaar staan met hun gezicht ieder dezelfde kant op. Daarna gaat het licht aan en wordt aan ieder de vraag gesteld of hij weet welke kleur muts hij op heeft. De achterste antwoordt: nee, ik weet het niet. Daarna zegt de middelste ook dat hij het niet weet, waarna de voorste tenslotte na enig nadenken zegt dat hij het wel weet. Wat antwoordde de voorste, die daarmee aan uitvoering van het vonnis ontsnapte? (De voorste was in het nadeel want hij ziet geen enkele muts en moet bovendien ook nog als laatste antwoorden. Of is dat juist een voordeel?)

van oplossingen en de discussies daarover, komen ook die leerlingen meer los. Zij laten zich steeds meer horen in discussies of dragen een alternatief aan. Dat sociale aspect is een even onverwacht als welkom pluspunt, aangezien zo'n gymklas in principe een aantal jaren de zelfde samenstelling houdt. Dan is elkaar leren kennen, zich zelf laten kennen en het accepteren van elkaars persoonlijkheid en capaciteiten natuurlijk van groot belang.

Tot slot is het natuurlijk heel leuk als je merkt dat leerlingen zich inderdaad uitgedaagd weten en al hun, soms niet geringe, capaciteiten aanspreken om een zo goed mogelijke oplossingsstrategie te ontwikkelen.

Dat heeft al een aantal keren geleid tot oplossingen die eleganter zijn (en in één geval zelfs briljant in zijn eenvoud) dan de doorsnee oplossing. Twee voorbeelden hiervan zijn:

Eerste voorbeeld

56 dierenkaakjes worden gevoerd aan 10 huisdieren: katten en/of honden. Iedere hond krijgt 6 en iedere kat 5 kaakjes. Hoeveel katten en hoeveel honden waren er?

De leerlingen kennen het algoritme van twee vergelijkingen met twee onbekenden nog niet. Meerdere groepjes komen dan met de oplossing: ... *Stel dat er alleen katten waren ...*

Tweede voorbeeld

Dit is een opgave afkomstig van VIERKANT:

Op een eiland wonen twee typen bewoners: ridders en schurken. Ridders spreken altijd de waarheid en schurken liegen altijd. In een bus op het eiland zitten elf mensen die elkaar allemaal kennen. Aan hen wordt gevraagd: "Hoeveel ridders zitten er in de bus?"

Zij gaven de volgende antwoorden:

nr.1: ten hoogste één ridder

nr.2: ten hoogste twee ridders

.....

.....

nr.11: ten hoogste elf ridders.

Hoeveel ridders zaten in de bus?

Na korter of langer denkwerk komt meer dan de helft van

de leerlingen met het goede antwoord, maar dan komt het probleem van het formuleren.

Een fraaie presentatie kwam van Silvia:

De eerste zegt 0 en 1 zijn goed, de tweede 0, 1 en 2. Dus:

```

0 1
0 1 2
0 1 2 3
0 1 2 3 4
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5 6 ←
0 1 2 3 4 5 6 7
0 1 2 3 4 5 6 7 8
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

```

Alleen bij 6 ridders klopt het!

Hoe verder

Door de goede ervaringen zijn wij op het Christiaan Huygens College het volgende van plan: in 2 gym herhaling van het beschreven programma, enigszins aangepast en in 3 gym voortborduren op wat geweest is door met een lagere frequentie (eens per twee à drie weken?) nieuw materiaal aan te bieden.

Het zou echter fijn zijn als na het lezen van dit artikel meer wiskundedocenten besluiten om iets dergelijks bij hen op school uit te proberen en er dan melding van te maken. Ik gun u en uw leerlingen van harte die ervaring, want ze kunnen niet alleen meer. Ze willen ook meer!

Noten

[1] Dolan, Daniel T. en James Williamson (1983). *Teaching problem-solving strategies*. Addison Wesley. ISBN 0-201-102231-5

[2] VIERKANT wil jongeren met wiskunde kennis laten maken door middel van buitenschoolse activiteiten. (Zie ook aankondiging elders in dit nummer.)

Inlichtingen:

Dr. Zsófia Ruttkay, tel. 020-4447776 of 035-561192