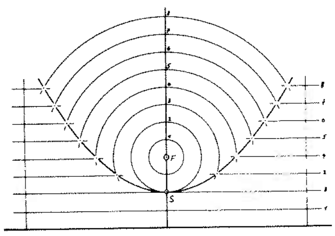
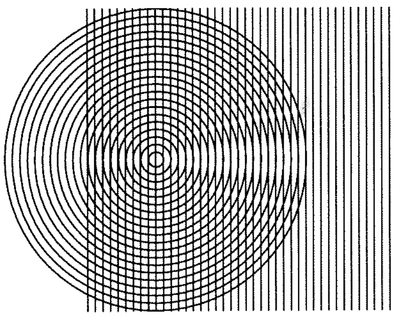
Conflictlijnen, moiré en kegelsneden

L.M. Doorman
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

'De parabool is een conflictlijn van een punt en een rechte.' Martin Kindt laat zien hoe conflicten over visserijzones geabstraheerd kunnen worden tot conflictlijnen tussen punten, lijnen en cirkels (*Nieuwe Wiskrant 14(3)*). Zo blijken conflictlijnen een aanleiding te zijn voor grafieken van kegelsneden. De volgende figuur illustreert de parabool:

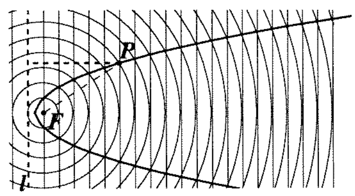


Een op het eerste gezicht geheel ander fenomeen lijkt ook parabolen voort te brengen:

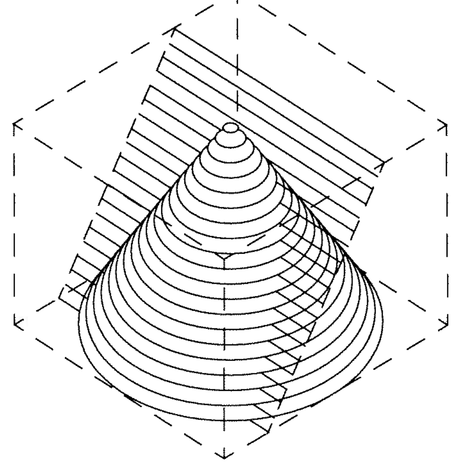


Over dit verschijnsel is eerder gepubliceerd door professor van der Blij (*Zwevingen en zijden kousen*, opgenomen in de bundel *Wiskunst*, Freudenthal instituut, 1995). Het heet *moiré* en is vooral bekend van vitrages. Moiré is het gevolg van twee patronen die over elkaar zijn gelegd. Op de plaatsen waar de patronen min of meer samenvallen en elkaar snijden zijn 'de gaten' groot. Daar kun je makkelijk door de patronen heen kijken. Zo ontstaan lichtere en donkere gebieden die het moiré vormgeven.
Moiré is vaak te bewonderen. Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen op 3 en 4 februari 1995 liet Van der Blij horen dat moiré ook in de muziek voorkomt. De 'snijpunten' van twee ritmen die je tegelijk speelt, geven dan onverwachte effecten.

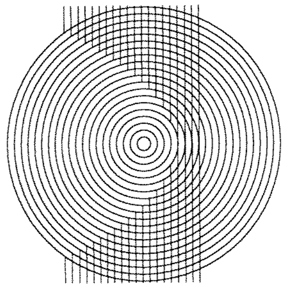
Terug naar het voorbeeld. Is het toeval dat bij het over elkaar leggen van cirkels en lijnen parabolen tevoorschijn komen? Natuurlijk niet. In de figuur hieronder is een deel uitvergroot en is één parabool met bijbehorende richtlijn l en richtpunt F te zien.



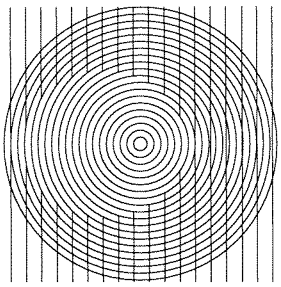
De parabool gaat door opeenvolgende snijpunten. Doordat de lijnen en de cirkels in dit geval gelijke onderlinge afstand hebben, kunnen de punten op de parabool gevonden worden door het tellen van de lijnen en de cirkels: $d(P, F) = d(P, l)$.
Kees Henzen, oud-collega en deskundig op dit terrein, wees me erop dat dit ook eenvoudig ruimtelijk is in te zien: de twee patronen stellen hoogtelijnen voor. De cirkels zijn hoogtelijnen van een kegel en de lijnen zijn hoogtelijnen van een vlak. Aangezien de onderlinge afstanden tussen de lijnen en de cirkels gelijk zijn, heeft het vlak dezelfde 'helling' als de kegel. Volgen we weer één serie snijpunten dan ontstaat het volgende plaatje:



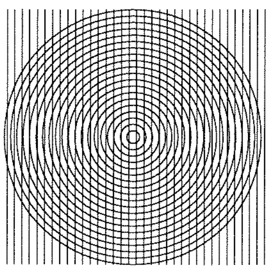
Met als bovenaanzicht:

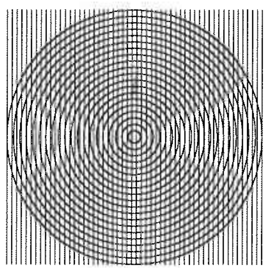


Het fraaie is nu dat als je de afstanden tussen de rechte lijnen iets groter maakt (de helling van het vlak wordt kleiner), ook de andere kegelsneden verschijnen:



Als alle cirkels weer doorzichtig zijn, dan zijn vele ellipsen te zien. Dit komt doordat het vlak op een aantal niveaus de kegel kan snijden en bovendien kan het omlaag of omhoog door de kegel gaan. Alle mogelijkheden geven snijpunten waardoor het moiré-effect ontstaat.
Een 'hyperbolisch' moiré ontstaat als het vlak een grotere helling heeft dan de kegel, dus als de hoogtelijnen van het vlak dichter bij elkaar staan dan die van de cirkel.



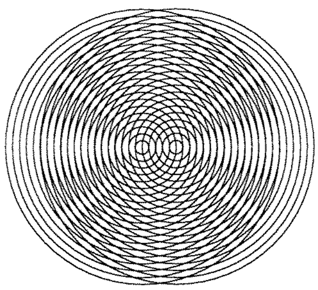


De kegelsneden zijn ook analytisch te verklaren. Dit gaat minder charmant, maar heeft voor enkelen een grotere overtuigingskracht. Bovendien kunnen dergelijke dwarsverbanden didactische waarde hebben. Stel de cirkels hebben onderlinge afstand 1 en de lijnen afstand d. Opeenvolgende snijpunten geven het moiré-patroon. Snijden van de n^e cirkel met de $n - 1^e$ lijn geeft het stelsel:

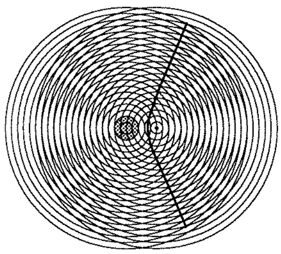
$$\begin{cases} y^2 + x^2 = n^2 \\ x = (n-1)\,d \end{cases}$$

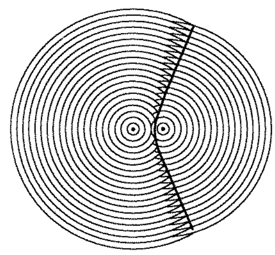
Na elimineren van n volgt: $y^2 + (1 - 1/d^2)\,x^2 + 2x/d = 1$.
Hieraan is te zien dat $d = 1$ inderdaad parabolen geeft.
Als $d \neq 1$, dan krijg je na wat gemanipuleer:
$y^2 + (1 - 1/d^2)\,(x + d/(d^2-1))^2 = 1 + 1/(d^2-1)$.
En dat geeft inderdaad een ellips voor $d > 1$ en een hyperbool voor $d < 1$.

De moiré-patronen zijn dus te verklaren met behulp van de kennis over conflictlijnen en kegelsneden. Het patroon ontstaat op de snijpunten van hoogtelijnen die op dezelfde hoogte liggen. Zo is ook te onderzoeken wat het resultaat is van het snijden van twee kegels. Leg twee cirkelpatronen over elkaar en moiré toont de snijfiguren:

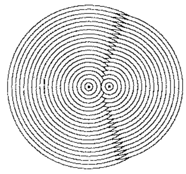


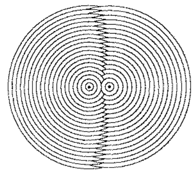
Keurig komen hyperbolen tevoorschijn. Eén van de hyperbolen is in de figuur hieronder getekend. Deze hyperbool is conflictlijn van de gearceerde cirkel in het linkerpatroon en het middelpunt van het rechterpatroon. Of ruimtelijk: de gearceerde cirkel van het linkerpatroon ligt op dezelfde hoogte als de top van het rechterpatroon:

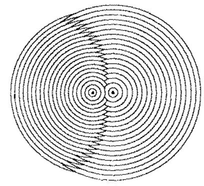




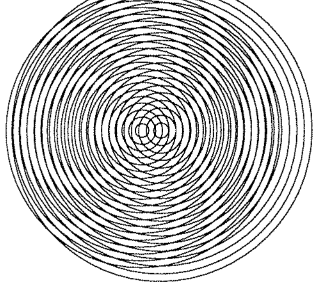
En twee kegels met verschillende 'hellingen'? In de figuur hieronder wordt de afstand tussen de hoogtelijnen van de rechterkegel iets groter (de helling wordt kleiner).







Het moiré-effect is verrassend:



Martin Kindt beweert in zijn artikel dat een uitgebreide behandeling van kegelsneden niet zijn boodschap is. Hij maakt duidelijk dat de klassieke meetkunde springlevend, breed en dynamisch is. Laat deze bijdrage die bewering ondersteunen. ❐