

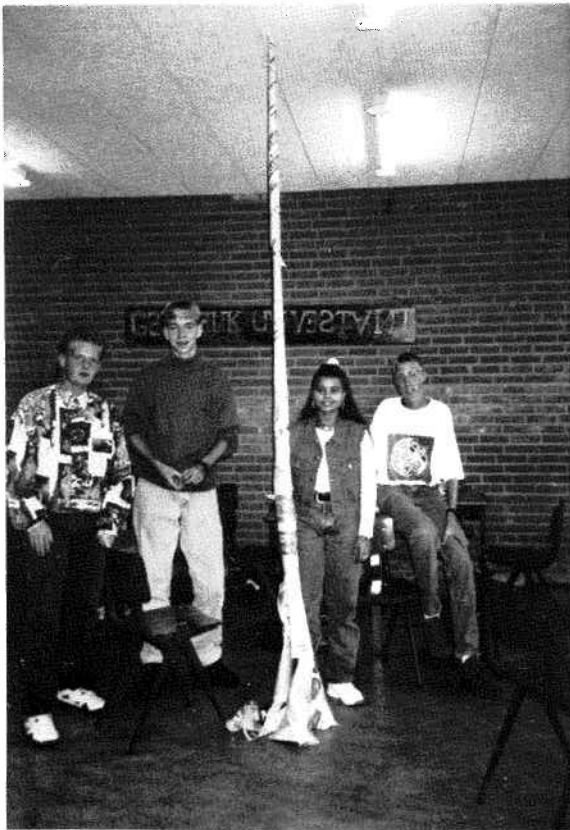
Onderzoeksoopdrachten en zelfstandig leren

K. Garst

Arcus C.S.G., Lelystad

Een stapel kranten en 1 meter plakband

De eerste les wiskunde B in HAVO 4: 23 leerlingen met boek en schrift op tafel en pen in de aanslag wachten af wat er komen gaat. Maar, in plaats van met opgave 1 uit het boek te beginnen, wordt de klas in groepen verdeeld en krijgen de leerlingen de opdracht een zo hoog mogelijke vrijstaande toren te bouwen van de aanwezige kranten en een beperkte hoeveelheid plakband. Moet dit echt? Een dreigende rebellie wordt afgewend doordat enkele leerlingen voor zichzelf beginnen met het oprollen en in elkaar steken van kranten.



Een toren van kranten

De opdracht begint te intrigeren, maar blijkt lastiger dan die in het begin leek. Hoe doen andere groepen het? Er ontstaat overleg over een mogelijke constructie. Een proefopzet wordt gemaakt en aangepast, waarna de taken onderling verdeeld worden. Tijdens het bouwen nemen de leerlingen regelmatig afstand van de constructie: zijn we op de goede weg? Sommigen haken af en verliezen belangstelling. Anderen zetten door en presenteren trots na ruim een lesuur een stevig bouwwerk dat tot het plafond reikt. Was dit nou ruimtemeetkunde, of heeft dit niks met wiskunde B te maken? Waarom doen we het dan?

Waarom deze start?

Een aantal dingen hebben mij aangespoord het schooljaar in deze groep op deze manier te beginnen.

Ten eerste mijn toenemende onvrede over de gang van zaken binnen de wiskunde B lessen. Te vaak ben ik bezig met het structureren van oplossingen van problemen, daarbij de activiteiten van de leerlingen reducerend tot het uitvoeren van door mij aangegeven deelstrategieën. Te vaak constateer ik dat leerlingen bij het zelfstandig werken in de klas vastlopen, afhaken en vervolgens afwachten tot de leraar het denkwerk overneemt. Kortom, te vaak zie ik een niet-actief lerende leerling. Op deze wijze worden te veel mogelijkheden van het wiskunde B programma op het gebied van probleemoplossen onbenut gelaten.

Bijna haaks op deze ervaringen staan de officiële verwachtingen met betrekking tot de actief lerende leerling, die mede verantwoordelijkheid draagt voor het leerproces. De school als studiehuis, waar de docent begeleider wordt van leerprocessen van een zelfstandig lerende leerling. Doelstellingen die ik van harte ondersteun, maar die nog ver weg staan van mijn dagelijkse lespraktijk.

Investigations

Een tweede stimulans om op een andere wijze het jaar te beginnen komt voort uit lesbezoeken op een aantal scho-

len voor voortgezet onderwijs in Engeland. Deze bezoeken vormen een onderdeel van een Master's opleiding, georganiseerd door de wiskundeafdeling van de Hogeschool van Utrecht. Een van de onderdelen van het Engelse leerplan voor 11- tot 16-jarigen is het leren uitvoeren van 'investigations'. Opdrachten waarvan het begin gegeven is, maar die geen vast eindpunt kennen in de zin van een eindantwoord. De leerlingen worden uitgedaagd het probleem te onderzoeken, met de oorspronkelijke bedoeling hen iets te laten ervaren van wat 'wiskunde doen' kan inhouden. In het werkstuk dat ontstaat, is het proces van exploreren terug te vinden. De opdrachten bestaan meestal uit het opsporen van patronen en regelmaat, een wiskundeactiviteit die in Nederland minder aandacht heeft.

Ook een bezoek aan het West Sussex Institute of Higher Education in Zuid-Engeland gaf me moed dat er meer te bereiken is ten aanzien van zelfstandig leren. Dit instituut heeft een werkwijze ontwikkeld waarbij leerlingen op 'A-level' (vergelijkbaar met 5/6 VWO) sterk betrokken worden bij hun eigen wiskundige ontwikkeling. In voortdurend overleg met de docent werkt de leerling aan problemen, waarbij de richting waarin het onderzoek gaat niet van te voren vastligt. De werkstukken over de verschillende onderwerpen vormen tezamen met logboeken, waarin de voortgang op het gebied van wiskunde en onderzoeksvaardigheden in kaart zijn gebracht, de basis voor de diplomering.

Onderzoeksopdrachten

Het bouwen van de toren vormt de opmaat om in de klas onderzoeksopdrachten als werkvorm te introduceren, gebaseerd op 'investigations' en het vermogen van tot zelfstandig leren te vergroten. Zo'n onderzoeksopdracht heeft een vaste structuur, namelijk:

1. *Introductie van een probleem*

De leerlingen krijgen een probleem voor zich. Meestal op schrift gesteld, met een duidelijke vraagstelling en voorzien van aanwijzingen voor de verslaglegging. Ook krijgen ze een logboek waarin de diverse leeractiviteiten bijgehouden worden. De opdracht wordt doorgelezen en er is gelegenheid tot vragen stellen over de procedure, de werkvorm, gebruik van hulpmiddelen en dergelijke (dus niet over de inhoud van het probleem).

2. *Korte werksessie*

De leerlingen krijgen ongeveer vijftien minuten de gelegenheid om zich te oriënteren op het probleem. Daarbij worden alle vragen die het probleem oproept, evenals eerste aanzetten tot oplossingen, genoteerd op een 'white board' dat elke groep tot z'n beschikking heeft.

3. *Korte uitwisseling*

De groepen wisselen onderling ideeën uit aan de hand

van de opmerkingen op de 'white boards'. Zowel de aanpak van het probleem zelf, als de planning van de activiteiten komen daarbij aan bod. Leerlingen die zelf nog geen idee hadden hoe te beginnen, kunnen hierdoor op een spoor komen. De docent krijgt een indruk over de richting waarin de leerlingen denken. De borden hangen in de klas gedurende de periode dat aan de onderzoeksopdracht gewerkt wordt.

4. *Lange werksessie*

De leerlingen gaan, individueel of in groepen, aan het werk met het probleem, waarbij ze in een logboek bijhouden welke activiteiten ze verrichten, welke hulpvragen ze hebben en welke aanwijzingen ze vervolgens krijgen. Afhankelijk van de opdracht maken ze een individueel verslag of een groepsverslag.

5. *Presentatie*

De verschillende oplossingen van het probleem worden aan elkaar gepresenteerd, waarbij niet alleen de oplossing van het probleem zelf aan bod komt, maar ook de wijze waarop het probleem is aangepakt.

Kwadratische vergelijkingen

In aansluiting op de les met de toren krijgen de leerlingen onderzoeksopdrachten rond kwadratische vergelijkingen. Niet alleen met de bedoeling om oude kennis rond dit onderwerp op te halen, maar tevens om ze te stimuleren hun eigen wiskundige creativiteit en inzicht te gebruiken en hun zelfvertrouwen ten aanzien van probleemoplossen te vergroten.

Elk van de zes groepen krijgt een van de opdrachten (zie figuur 1) met de bedoeling het probleem op te lossen en zo ver mogelijk uit te breiden, zonder daarbij gebruik te maken van boeken. Ze moeten zoveel mogelijk opschrijven wat ze doen en weten. Daarom moeten ook aanpakken die nergens toe blijken te leiden, onderdeel vormen van de verslaglegging. Van elke groep kopiëer ik na afloop een verslag voor de rest van de klas. Op die manier neemt iedereen kennis van de problemen en oplossingen van de ander.

Voor een volgende les worden die problemen en oplossingen bestudeerd en kunnen de leerlingen elkaar vragen stellen.

Ervaringen

Gedurende twee lesuren hebben de leerlingen geanimeerd aan de problemen gewerkt. Verbaasd bemerken ze dat dezelfde ervaringen boven komen bij het werken aan een wiskunde probleem als een paar dagen eerder bij het bouwen van de toren. Eerst maar eens iets proberen, vragen bij medeleerlingen, vastlopen, opnieuw beginnen, een plan maken, taken verdelen, overtuigd raken van een goede werkwijze, tenslotte trots zijn op een eigen eindprodukt.

1. $Ax^2 + Bx + C = 0$

In het verleden heb je zo'n vergelijking hopelijk wel eens gezien. Voor A , B en C mag je getallen invullen. Zoek met elkaar zoveel mogelijk dingen uit die met deze vergelijking te maken hebben. Geef niet alleen voorbeelden, maar leg uit waarom je juist die voorbeelden neemt.

2. Parabolen

Onderzoek wat je weet van parabolen. Schrijf je kennis overzichtelijk op en maak nette tekeningen.

3. 'Getal plus z'n kwadraat = 12'

Los het probleem op. Zoek meerdere manieren om het probleem op te lossen en schrijf die overzichtelijk op. Onderzoek daarna wat er gebeurt als je 12 door een ander getal vervangt.

4. Rechthoek in een vierkant

Vierkant van 10 bij 10. Daarbinnen een gekleurde rechthoek. Onderzoek hoe de rechthoek in het vierkant gezet moet worden zodat 48% van het vierkant

gekleurd is.

Laat duidelijk zien hoe je het probleem oplost door alle stappen op te schrijven.

5. Rechte lijnen vermenigvuldigen

Onderzoek wat er gebeurt als je twee rechte lijnen met elkaar vermenigvuldigt. Neem om te beginnen $y = x + 3$ en $y = x - 2$. Beschrijf wat er gebeurt, en schrijf ook op wat je vermoedens zijn. Kun je het resultaat verklaren? Breid daarna uit door andere vergelijkingen van rechte lijnen te nemen. Bij deze opdracht moet je de grafische rekenmachine gebruiken.

Instructie voor de verslaglegging

Werk gerust eerst in het klad, maar als je iets gevonden hebt wat van belang is, schrijf dat dan netjes apart op en voorzie het van commentaar. Bijvoorbeeld: 'Nu ga ik dit of dat proberen', of 'Deze methode loopt op niets uit, ik ga iets anders proberen'. Daarmee is aangegeven dat juist ook foute methodes op papier mogen komen.

Het is een groepsopdracht, dat wil zeggen dat je van de kennis van elkaar gebruik moet maken. Je moet wel voor jezelf een verslag maken van dit onderzoek, maar schrijf alleen datgene op wat je werkelijk begrijpt.

fig. 1 Onderzoekopdrachten rond kwadratische vergelijkingen

De formulering van het probleem blijkt van grote invloed op het enthousiasme en de inzet van de leerlingen. De problemen 1 en 2 blijken bij nader inzien minder geschikt te zijn, omdat ze onvoldoende uitdaging bieden. De leerlingen weten dat ze het eerder gehad hebben, maar niet alle kennis hebben ze meer paraat. Dit leidt tot het overschrijven uit andere boeken en aantekeningen en dat is weinig zinvol en doet geen beroep op de onderzoeksvaardigheden van de leerlingen.

De overige opdrachten zijn wel uitdagend voor de leerlingen. De opdracht van het vierkant is een van de (lastige) opdrachten uit het eerste hoofdstuk van *Moderne Wiskunde*. De leerlingen worden in de methode stapsgewijs naar een oplossing geleid waarbij de zijden van het vierkant verdeeld worden in stukken met lengte x en $(10 - x)$, om vervolgens een uitdrukking voor de oppervlakte van de rechthoek te vinden.

Het onderzoek van Marianne (figuur 2) laat echter zien hoe zij eerst verschillende waarden voor de zijden van de rechthoek neemt en daar een vierkant omheen past. De constatering dat dat veel werk is leidt tot een oplossing met x enzovoort.

Na de positieve ervaringen met het onderzoek rond kwadratische vergelijkingen wordt de overstap naar het boek gemaakt, waarbij de leerlingen in grote mate dezelfde actieve, onderzoekende houding laten zien.

Onderzoekopdracht 4
Marianne 4N.

We hebben eerst gewoon een paar getallen geprobeert:

2	124
3	16
4	12
5	36
6	0

Dit was veel te veel werk.
 $48 = 6 \times 8$ kwam bijna uit:
 $\sqrt{32} + \sqrt{16} = 9,899 \dots$

Toen zijn we met x enz. gaan werken:

We gaan het gedeelte om de rechthoek uittrekken die moet 52 cm^2 zijn want $100 - 48 = 52$.

$$52 = (10-x) \times (10-x)$$

$$52 = x^2 + x^2 - 20x + 100$$

$$52 = 2x^2 - 20x + 100$$

$$26 = x^2 - 10x + 50$$

$$0 = x^2 - 10x + 24$$

$$(x-6)(x-4) = 0$$

$$x = 6 + x = 4$$

$$x + (10-x) = 10$$

$$4 + (10-4) = 10$$

RH2 6 36
RH2 6 36
L2 $\sqrt{32}$ 32

RH2 4 16
RH2 4 16
L2 $\sqrt{32}$ 32

Controle: $\sqrt{16} \times \sqrt{32} = 48$

fig. 2 Werk van Marianne

Naast het werken uit het boek komen onderzoeksoopdrachten met grote regelmaat terug. Ze worden met name toegepast:

- ter oriëntatie op een wiskundeonderwerp nog voor dat het desbetreffende hoofdstuk uit het boek is gemaakt
- om lastige, tijdrovende opdrachten uit het boek (zonder de daarbij horende geleide vraagstelling) door de leerlingen te laten onderzoeken
- ter verwerking van het geleerde aan het eind van een hoofdstuk en om dwarsverbanden tussen diverse onderwerpen van wiskunde B aan te geven.

Toetsing

Na verloop van tijd is bij de leerlingen en mij de behoefte ontstaan om de onderzoeksvaardigheden en de zelfstandigheid op een of andere wijze te waarderen. Dit leidt tot de volgende vorm van toetsing. De leerlingen krijgen ongeveer twee weken voor een toetsmoment een onderzoeksoopdracht om uit te werken en naar eigen inzicht uit te breiden. Ook nu zijn er tussentijds momenten vastgelegd waarbij de leerlingen de voortgang van hun onderzoek aan elkaar rapporteren. De toets zelf bestaat uit hetzelfde probleem van het onderzoek, alleen voorzien van vragen. De leerlingen die hun onderzoek goed voorbereid hebben, kunnen deze vragen gemakkelijk beantwoorden. Degenen die dat niet gedaan hebben, komen veelal in tijdnood. Het onderzoek van de leerlingen ter voorbereiding van de toets vormt een deel van de eindwaardering, om daarmee ook uitbreidingen van het onderzoek in richtingen waarnaar in de toets niet gevraagd is, te kunnen waarderen.

Zelfstandig leren

Gaandeweg het project dringt zich steeds meer de vraag op in hoeverre de beschreven werkvorm bijdraagt tot het vergroten van het zelfstandig leervermogen van de leerlingen in de zin van het leerhuis. Om zicht hierop te krijgen heb ik gebruik gemaakt van ideeën die Simons en Kluvers beschrijven over leerfuncties die een zelfstandig lerende leerling vervult en veranderende docentrollen die daar een gevolg van zijn (*Mesomagazine*, 1994). Daarin wordt zelfstandig leren gedefinieerd als de mate waarin een leerling zijn eigen docent kan zijn. Ofwel de mate waarin de leerling in staat is een aantal leerfuncties te vervullen die doorgaans door de docent worden uitgevoerd. Voorbeelden van leerfuncties die een zelfstandig lerende leerling uitvoert kunnen zijn:

- het zelf voorbereiden (planning maken, zelf aan de gang gaan, eerder geleerde relevante informatie opdiepen)
- het zelfstandig uitvoeren van leeractiviteiten (leerstof analyseren, relaties leggen tussen begrippen)
- regulatieprocessen zelf uitvoeren (het eigen leren in de gaten houden, op blokkades en problemen die zich

voordoen reageren, leerprocessen evalueren)

- feed-back zoeken en zichzelf beoordelen (goede resultaten aan zichzelf toeschrijven)
- motivatie- en concentratietechnieken gebruiken bij het leren.

De rol van de docent verandert doordat de docent niet alleen verantwoordelijk is voor overdracht van vakkennis, maar ook de volgende functies vervult:

- als voorbeeld, dus degene die aangeeft hoe je in zijn/haar vakgebied het beste kunt leren
- als metacognitieve gids, die de leerlingen bewust maakt van hun denk- en leerstrategieën en moet zorgen dat zij hun leren actiever gaan sturen
- als externe monitor, die de leeractiviteiten van de leerlingen in de gaten houdt en stuurt
- als de zich geleidelijk terugtrekkende docent, die de leerling een grotere verantwoordelijkheid toevertrouwt ten aanzien van het leren
- als bevorderaar van positieve zelfevaluatie door het afstemmen van de activiteiten op de mogelijkheden van de leerlingen.

Veranderingen in de klas

De hierboven beschreven lessen zijn erop gericht de leerlingen zelf actiever te betrekken bij het leren van wiskunde. Door deze start, waarbij leerlingen uitgedaagd worden actief hun eigen kennis te gebruiken, krijgen de leerlingen een bepaalde kijk op hoe je wiskunde B 'doet'. De trend is daarmee gezet voor een actieve, betrokken leerhouding.

Daarna komt de aandacht meer te liggen bij het gebruiken van de onderzoeksoopdracht als werkvorm ter vergroting van het zelfstandig leren. Bij het werken aan een onderzoeksoopdracht worden de leerlingen hier expliciet mee geconfronteerd. In de praktijk is er ook een effect merkbaar bij het werken uit het boek. Er vindt een duidelijke verschuiving plaats in de hoeveelheid tijd besteed aan klassikale momenten en in de inhoud daarvan, alsmede in de inhoud van de individuele begeleiding van de leerlingen in de klas.

Bij het werken uit het boek worden ongeveer één à twee lessuren per hoofdstuk gebruikt voor klassikale instructie over de wiskundige inhoud en om de planning van het werk te bespreken. Verder beantwoord ik, als een hoofdstuk is doorgewerkt, vragen die de leerlingen in hun logboek genoteerd hebben en worden puntjes op de i gezet ten aanzien van bijvoorbeeld wiskundige notaties. De overige tijd zijn de leerlingen zelfstandig aan het werk en ga ik individueel in op vragen van leerlingen.

Ook de inhoud van de individuele gesprekken met leerlingen hebben een duidelijke verschuiving ondergaan. Behalve dat vragen over de stof zelf te beantwoorden zijn, komt het veel vaker voor dat een vraag van een leerling aanleiding is om ze op het spoor te zetten om na te denken over het eigen leergedrag. Een vraag over een op-

gave 'hoe moet...' leidt tot vragen van mijn kant zoals: 'wat precies ben je aan het doen?', 'waarom doe je het?' en 'hoe denk je dat het je verder zal helpen?'

Bij onderzoekopdrachten is het stellen van dit soort vragen vanzelfsprekend, omdat de leerlingen bij het oplossen van het open probleem een eigen denkspoor volgen, en de docent daar eerst deelgenoot van gemaakt moet worden. Maar ook bij het werken aan de meer gesloten vragen uit het leerboek vormen deze vragen de kern van de bespreking. Ook voor de leerlingen ligt het accent nu minder dan voorheen op het hebben van een correct antwoord.

Bevindingen tot dusver

Mijn inspanningen om met behulp van onderzoekopdrachten te werken aan het vergroten van het zelfstandig leren van leerlingen zijn nog in volle gang. De bevindingen tot dusver zijn dan ook niet meer dan een tussenstand.

Enkele voorlopige conclusies zijn:

- De andere start van het schooljaar heeft in belangrijke mate bijgedragen tot een beeldvorming bij leerlingen dat wiskunde B 'doen' betekent dat je als leerling uit moet gaan van je eigen inzicht en creativiteit, en dat dat als zodanig ook gewaardeerd wordt.
- Onderzoekopdrachten stellen het probleemoplossen

expliciet aan de orde. Doordat de leerlingen regelmatig ervaren dat hun eigen oplossingsstrategieën daar in gewaardeerd worden, neemt het zelfvertrouwen in eigen kunnen toe.

- Hierdoor ontstaat een actieve leerhouding van leerlingen die uitstraling heeft naar het werken uit het boek.
- Doordat de leerlingen zichzelf meer in staat achten om probleemoplossend bezig te zijn, ontstaat er voor de docent ruimte om veel meer aandacht te besteden aan aspecten met betrekking tot zelfstandig leren. Logboeken vormen daarbij een hulpmiddel om leerlingen te laten reflecteren op hun eigen leergedrag. De rol van de docent verschuift van instructeur van leerstof meer in de richting van begeleider van leerprocessen.
- Bij deze werkvorm worden de leerlingen gestimuleerd om met elkaar te werken en van elkaar te leren. Dit onderstreept het belang van de groep als leeromgeving bij zelfstandig leren.

Kortom, een werkvorm als hier beschreven biedt de gelegenheid om expliciet aandacht te besteden aan zogenaamde metacognitieve aspecten van het leren, tegelijkertijd met de wiskundige activiteit van probleemoplossen. Dit alles in een voor leerlingen uitdagende, maar vanzelfsprekende context.

(Advertentie)

Faculteiten Hogeschool van Utrecht	<h1>Master's Degree M.A. (open)</h1>
Communicatie en Journalistiek	
Economie en Management	
Educatieve Opleidingen	
Gezondheidszorg	
Natuur en Techniek	Heeft u een tweedegraads bevoegdheid Engels en wilt u in deeltijd doorstuderen? Naast de reguliere driejarige eerstegraads cursus Engels biedt de Faculteit Educatieve Opleidingen van de Hogeschool van Utrecht (voorheen Hogeschool Midden Nederland) in het cursusjaar 1995 - 1996, opnieuw, in samenwerking met de University of Greenwich een
Sociaal Agogische Opleidingen	<h2>Gecombineerde eerstegraads / Master of Arts (Language Education)</h2>
	Studenten die al een eerstegraads bevoegdheid bezitten, kunnen in twee jaar een M.A. behalen. Alle colleges worden in Utrecht gegeven, behalve een periode van 1 week en van 2 weken in Engeland, die zoveel mogelijk samenvallen met de Nederlandse schoolvakanties.
	Voor meer schriftelijke en/of telefonische informatie kunt u terecht bij de Hogeschool van Utrecht, Faculteit Educatieve Opleidingen Mw. Sandra Collins-Fyfe M.A., Postbus 14007, 3508 SB Utrecht, tel. 030-547326, fax. 030-543272.
	 the UNIVERSITY of GREENWICH
	 Hogeschool van Utrecht <small>Hogeschool voor Economie en Management, Hogeschool Midden Nederland en Hogeschool Utrecht vanaf 1995 samen de Hogeschool van Utrecht</small>