De onderwijsbaarheid van wiskunde B

K. Hoogland
RU Leiden

Inleiding

De recente examens wiskunde B voor HAVO en VWO hebben heel wat stof doen opwaaien. Brieven van scholen, brieven van ouders, items in jeugd- en grote mensenjournaals, columns, en wat dies meer zij. Er zou sprake zijn van een blunder, een misser. E.J. Bomhof pleitte in een column in de NRC zelfs voor doorbreking van het monopolie van de CEVO: 'Laat de CEVO maar concurreren met nog één of twee andere instellingen die ook het recht krijgen om beschrijvingen van vakken te maken en passende opgaven voor de examens op te stellen. (....) Daarmee zou staatssecretaris Netelenbos serieus reageren op de ernstige misstappen bij het wiskunde-examen (...)'. In deze column overigens geen woord over de inhoud van de examens. Louter een reactie op de slechte resultaten van de leerlingen. En die resultaten waren inderdaad niet best. Zonder cesuurwijziging werd zowel voor het VWO wiskunde B-examen als voor het HAVO wiskunde B-examen 5,0 gemiddeld gescoord.
Overigens zijn dit soort resultaten bij wiskunde B niet uniek. Ook in 1990 scoorden de leerlingen vergelijkbare resultaten en afgezien van een artikel van Jan Muthert in Euclides met de titel: 'Wiskunde B-examens 1990; nieuwe trend of CEVO-miskleun?' was de ophef daarover aanzienlijk minder dan dit jaar. Zouden docenten mondiger worden?

Oorzaken

Voor slechte resultaten op een examen kunnen verschillende redenen zijn.
Het zou kunnen dat de leerlingen opeens veel slechter zijn. Dat blijkt echter niet uit de resultaten bij de examens van de andere vakken. Ook zijn de keuzepercentages niet schrikbarend aan het schuiven. Het keuzepercentage wiskunde B op het VWO ligt al enige jaren rond de 50%, op de HAVO is dit circa 30% en langzaam dalend.
Misschien kunnen de docenten opeens dit vak niet meer goed onderwijzen. Dat argument wordt afdoende ontkracht door de enquête die destijds is uitgevoerd door de Studiecommissie Wiskunde B VWO. Daaruit blijkt dat de docenten die wiskunde B geven zeer ervaren en hoog opgeleid zijn.
Een andere reden kan zijn dat teveel leerlingen wiskunde B kiezen. Dit werd door een bestuurslid van de Vereniging in het eindexamenjournaal nog zo beeldend omschreven als: 'Teveel fietsers op de snelweg'. Het is ongetwijfeld waar dat de gemiddelde resultaten zullen stijgen als de keuzepercentages drastisch lager worden. Maar stel nu eens dat het percentage wiskunde B-kiezers op de HAVO zou dalen tot 20% met in het kielzog de percentages voor de overige exacte vakken. Dat zou betekenen dat in dit welvaartsland waarin onder andere technologie een belangrijk rol speelt, slechts één op de vijf HAVO-leerlingen een B-gerichte opleiding krijgt. Dat lijkt me geen serieuze optie.
Zou er dan misschien iets aan de hand zijn met de programma's en de examens daarbij? Ik denk het wel.
Bij het examen wiskunde B op het VWO speelt overigens een heel andere problematiek dan bij het examen wiskunde B op het HAVO. Over die problemen gaat de rest van dit artikel.

De examenprogramma's

Het wiskundeonderwijs is aan het veranderen. Dat zal niemand ontgaan zijn. Over de hele breedte van het wiskundeonderwijs zijn een aantal tendensen zichtbaar. Er is steeds meer aandacht voor toepassingen, voor redeneren en bewijzen, voor probleemoplossen, voor dwarsverbanden tussen de onderwerpen, voor een meer analytische dan algebraïsche benadering van de problemen en voor een toenemende rol van de computer en de grafische rekenmachine.
Het VWO wiskunde B-programma is echter nog behoorlijk abstract en algebraïsch gericht. Bovendien blijkt uit de enquête van de Studiecommissie Wiskunde B VWO dat 75% van de docenten het programma als overladen beschouwt. Gezien de omvang en de abstractie is het in hoog tempo doorwerken van de onderwerpen aan de hand van standaardvraagstukken in de praktijk vaak het enige haalbare. Op de jaarlijkse examenbesprekingen klinkt steeds de roep om meer standaardvraagstukken.

Opgave 1

De functie f met domein $\mathbb{R}$ is gegeven door:

$f : x \to 4 - x^2$

Punt A ligt zo op de y-as, dat de raaklijnen door A aan de grafiek van f onderling loodrecht zijn.

6p 1 □ Bereken de y-coördinaat van A.

De oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = p$ is gelijk aan $4\sqrt{3}$.

7p 2 □ Bereken p.

Van een functie g is gegeven:

- $g(x) = f(x)$ voor $x \leq 1$
- de grafiek van g is symmetrisch ten opzichte van het punt $(1, 3)$.

5p 3 □ Druk $g(x)$ uit in x voor $x \geqq 1$. Motiveer je antwoord.

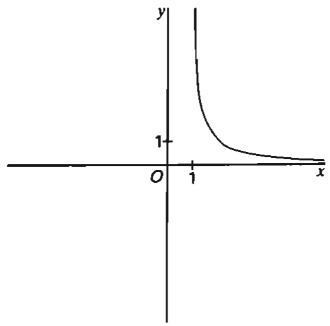
Opgave 2

De kromme K, voor een gedeelte getekend in figuur 1, is gegeven door:

$x = \frac{1}{\sin t}$ en $y = \tan t$,

waarbij $t \in \langle 0, 2\pi \rangle \setminus \{\frac{1}{2}\pi, \pi, 1\frac{1}{2}\pi\}$.

figuur 1



De asymptoten van K zijn evenwijdig aan de coördinaatassen.

5p 4 □ Stel vergelijkingen op van de asymptoten van K. Geef een toelichting.

5p 5 □ Teken K. Licht je werkwijze toe.

De raaklijnen aan K in de punten van K met y-coördinaat 1 en in de punten van K met y-coördinaat -1, sluiten een vierhoek in.

9p 6 □ Bereken de oppervlakte van deze vierhoek.

De differentiaalvergelijking D is gegeven door:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy}{x^2 - 1}$$

4p 7 □ Bewijs dat in elk punt van K aan D voldaan wordt.

Een functie f met domein $\langle -1, 1 \rangle$ is een oplossing van D.

$f(0) = -1$.

6p 8 □ Stel een functievoorschrift op van f.

Opgave 3

De functie f met domein $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ is gegeven door:

$f : x \to \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

7p 9 □ Onderzoek $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$ en $\lim_{x \uparrow 0} f'(x)$

7p 10 □ Onderzoek f verder en teken de grafiek van f, waarbij als eenheid op de x-as en op de y-as 2 cm genomen moet worden.

6p 11 □ Bereken voor welke $a < 0$ geldt:

$$\int_a^0 f(x)\, dx = f(a)$$

Opgave 4

Een schaalmodel van een gebouw bestaat uit een balk $ABCD.EFGH$ en een koepel; zie figuur 2.

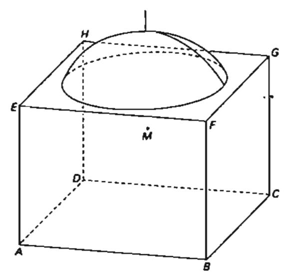
$AB = BC = 8$ en $AE = 6$.

Bol β raakt alle opstaande zijvlakken en het grondvlak $ABCD$.

Het middelpunt van β is M.

Het gedeelte van β dat buiten de balk ligt, is de koepel.

figuur 2



4p 12 □ Bereken de oppervlakte van het vlakke gedeelte van het dak $EFGH$.

Op het hoogste punt van de koepel staat verticaal een mast met bovenin een lamp.

Vanuit *elk* punt van het vlakke gedeelte van het dak $EFGH$ is de lamp zichtbaar.

7p 13 □ Bereken de minimale hoogte van de mast.

Er wordt een assenstelsel aangenomen met M als oorsprong, de x-as evenwijdig aan AD, de y-as evenwijdig aan AB en de z-as evenwijdig aan AE.

De lijn DM snijdt het vlak BEG in het punt S.

5p 14 □ Bereken de coördinaten van S.

De inhoud van de koepel kan berekend worden door een gedeelte van een cirkel te wentelen om de z-as.

7p 15 □ Bereken de inhoud van de koepel.

Deze kreet moet niet misverstaan worden. Ik geloof er niets van dat eerstegraadsdocenten een grote voorkeur hebben voor standaardvraagstukken. Er is wel het gevoel dat het programma daartoe dwingt. De toetsing van het programma in het examen neigt er af en toe naar de genoemde tendensen in het wiskundeonderwijs te honoreren. Er verschijnen opgaven die van de leerlingen verlangen dat ze in zekere mate creatief omgaan met hun wiskundekennis. De combinatie van een algebraïsch en overladen programma met een examen dat creativiteit verlangt, kan het programma makkelijk over de rand van de onderwijsbaarheid doen heen vallen. Bij het bespreken van de opgaven zal ik dat proberen aan te geven.
Het HAVO wiskunde B-programma heeft veel meer in zich dat er aandacht is voor dwarsverbanden en toepassingen. Hoewel slechts een kleine groep leerlingen dit programma volgt, lijkt het redelijk onderwijsbaar te zijn. Het is bij een dergelijk programma blijkbaar lastig een goede afbakening te vinden van de onderwerpen. Bij een gekozen toepassing of context kunnen de vragen het programma al snel overstijgen. Het ziet er naar uit dat dit jaar zoiets gebeurd is. Ook dit zal ik aan de hand van de examenvragen nader toelichten.

VWO wiskunde B 1995-I

Het volledige eindexamen VWO wiskunde B staat op de pagina hiernaast.

Opgave 1
Vraag 1 lijkt een redelijk eenvoudige binnenkomer maar is tevens het beste voorbeeld van hoe op algoritmen getrainde leerlingen de mist in kunnen gaan. Uit de gegevens van de versnelde correctie blijkt dat 35% van de leerlingen op deze vraag zes punten scoort. Maar heel opvallend is dat 40% van de leerlingen hier nul of één punt scoort. Daar tussenin zit vrijwel niets. Treurig eigenlijk. Natuurlijk moeten leerlingen uit 6 VWO in staat zijn zo'n opgave op te lossen. Maar hier wordt door de vereiste snelheid en het feit dat de leerlingen een standaardvraag verwachten blijkbaar blind naar het meest toepasselijke algoritme gegrepen:

$$g'(x) = \frac{-1}{f'(x)}$$

het algoritme dat hoort bij het loodrecht snijden van grafieken. Helaas levert

$$g'(x) = \frac{-1}{g'(x)}$$

hier niet het gewenste resultaat op. Bij vraag 2 zijn de integratiegrenzen en het rekenwerk lastig. Vraag 3 is standaard. De leerlingen zullen echter wel al een flinke tijd bezig zijn.
Belangrijk is, te bedenken dat door zo'n eerste vraag het gemiddelde direct met circa 0,2 daalt. Je verwacht voor een eerste vraag dat de leerlingen zo'n vier van de zes punten scoren. Het zijn er gemiddeld slechts twee. Nog drie van zulke 'geintjes' en Leiden is in last, zoals we hebben gemerkt.

Opgave 2
Voor VWO-leerlingen zijn krommen niet makkelijk, is goniometrie niet makkelijk en zijn differentiaalvergelijkingen niet makkelijk. Opgave 2 combineert deze drie elementen. Leerlingen die wel goed weten hoe ze met krommen en differentiaalvergelijkingen moeten omgaan, zouden nog wel eens vast kunnen lopen op het rekenwerk met de goniometrische vormen. Vraag 7 bewijst eens te meer dat manipuleren met goniometrische vormen bijna niet algoritmisch is aan te leren. Er wordt gemiddeld maar 1,5 punt gescoord van de vier.

Opgave 3
Bij deze opgave is een ongebruikelijke interpretatie van het leerplan gekozen. Tot nu toe waren limieten vooral bedoeld als hulpmiddel. In dit examen worden voor het eerst expliciet limieten afgevraagd. Maar bij deze opgave is vooral vraag 11 de boosdoener. Deze vraag heeft een zeer hoog 'je ziet het' of 'je ziet het niet' gehalte. 62% van de leerlingen scoort hier nul punten. Onkunde? Ontmoedigd zijn? Of gezien het programma een net te technische en specialistische vraag? Zegt u het maar.

Opgave 4
Vraag 13: Meetkundige figuren zijn óf abstract óf realistisch. Hier is sprake van een mislukt schijnrealisme. Een leerling die zich in de realistische situatie inleeft, zal denken dat hij op het dak staat en derhalve de gevraagde zichtbaarheid anders interpreteren dan de examenmakers. Die vinden dat je oog op het vlakke gedeelte moet liggen. Bedoeld wordt natuurlijk dat op het hele vlakke gedeelte geen schaduw valt.
Vraag 14: Tot nu toe was in alle examens het assenstelsel een *mogelijk*, door leerlingen te kiezen, hulpmiddel om meetkundige problemen op te lossen. Sommige leerlingen, docenten en schoolboeken hanteren zeer vaak het assenstelsel en de vectorrekening. Andere docenten, leerlingen en schoolboeken hanteren liever een andere benadering met verhoudingen en uitgelichte vlakken. Deze laatste leerlingen zijn bij deze opgave onnodig in het nadeel. Daarmee is deze opgave een voorbeeld van een interpretatie van het examenprogramma die afwijkt van de tot nu toe gangbare interpretaties. Dit probleem werkt dan ook door in vraag 15. Van de 19 punten die voor de vragen 13, 14 en 15 te halen zijn, worden er slechts gemiddeld 6,3 gescoord.

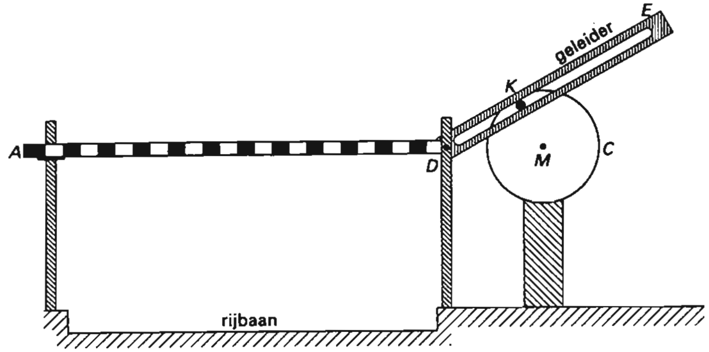
Conclusie

Per opgave verliezen de leerlingen ongeveer twee scorepunten teveel: door een onverwachte startvraag, door de combinatie van onderwerpen binnen een opgave, door een iets ongebruikelijke interpretatie van het leerplan

Opgave 4 Slagboom

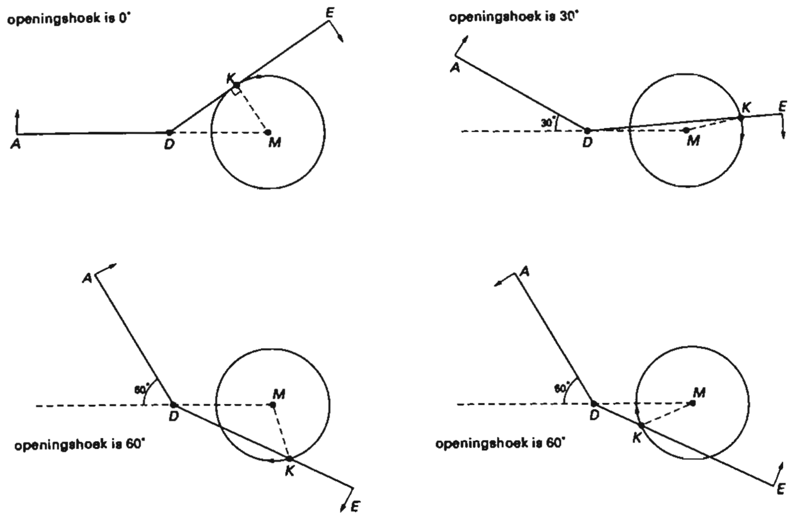
De uitgang van een parkeergarage wordt afgesloten door een slagboom. Deze bestaat uit een rood-wit gekleurde balk AD, waaraan onder een vaste hoek ADE een geleider DE is gemonteerd. Deze geleider is een beugel met een gleuf. Zie figuur 4.

figuur 4



Als de cirkelschijf C draait, beweegt een metalen knop K die op de cirkelschijf gemonteerd is, heen en weer door die gleuf.
Tegelijkertijd trekt knop K in zijn baan om M de beugel DE omlaag, zodat de rood-witte balk AD om het draaipunt D open draait. Bij doordraaien van cirkelschijf C trekt K vanaf een gegeven moment de beugel DE weer omhoog, zodat AD weer dicht gaat. Zie ook de afbeeldingen in figuur 5. In deze opgave worden balk en beugel opgevat als lijnstukken.

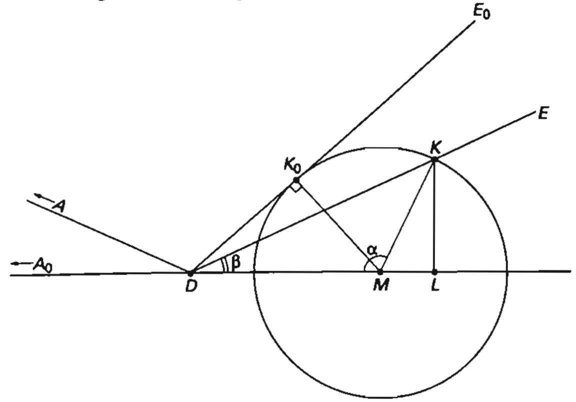
figuur 5



Middelpunt M en draaipunt D liggen even hoog.
Gegeven is verder: $DM = 30$ cm en $KM = 20$ cm.

4p **14** □ Bereken in graden nauwkeurig de hoek ADE.

figuur 6



In de ruststand (met horizontale slagboom) bevindt K zich in de positie K_0 (zie figuur 6). Bij een willekeurige positie van K noemen we $\angle DMK = \alpha$ en $\angle MDK = \beta$. De projectie van K op de lijn DM noemen we L.

4p **15** □ Teken in de figuur op de bijlage de positie van DE en K in het geval dat de slagboom zo ver mogelijk open is. Licht je werkwijze toe.

4p **16** □ Bereken de maximale openingshoek van de slagboom in graden nauwkeurig.

4p **17** □ Toon aan dat zowel voor $0 < \alpha < 90°$ als voor $90° < \alpha < 180°$ geldt:
$DL = 30 - 20\cos\alpha$.

Voor het verband tussen de hoeken α en β geldt:

$$\tan\beta = \frac{2\sin\alpha}{3 - 2\cos\alpha}.$$

4p **18** □ Leid deze formule af. Je mag je hierbij beperken tot het geval $90° < \alpha < 180°$.

Het rechterlid van de formule voor $\tan\beta$ noemen we $f(\alpha)$, waarbij α uitgedrukt wordt in radialen en $0 \leqq \alpha < 2\pi$.
De maximale waarde van β hoort bij de maximale waarde van $\tan\beta$ en dus bij de maximale waarde van $f(\alpha)$. Deze waarde zal corresponderen met de ruststand van de slagboom ($K = K_0$).

8p **19** □ Bereken met behulp van de afgeleide $f'(\alpha)$ de maximale waarde van
$f(\alpha) = \dfrac{2\sin\alpha}{3 - 2\cos\alpha}$ en laat zien dat het antwoord inderdaad behoort bij de ruststand van de slagboom.

Einde

(twee maal) en door tijdgebrek. Was het gemiddelde dit jaar 5,8 geweest in plaats van 5,0 dan was er geen enkele ophef te bespeuren geweest over het VWO wiskunde B-examen van dit jaar. Het blijkt dat bij zo'n overladen en abstract programma de marges van het afvragen zeer nauw luisteren. Eigenlijk is de enige remedie hiertegen het serieus verminderen van het aantal onderwerpen. In *Uitleg* van 28 juni 1995 valt te lezen dat er vooralsnog is besloten vanaf het examen 1996 de differentiaalvergelijkingen en de partiële integratie niet meer in het examen te toetsen. Of deze maatregel voldoende zal blijken om de overladenheid tegen te gaan, zodat leerlingen ook nog tijd hebben voor een meer probleemoplossende houding, valt te betwijfelen.

HAVO Wiskunde B 1995-I

In 1992 werd op het HAVO voor het eerst wiskunde B geëxamineerd. De instromende leerlingen zijn allen nog opgeleid met een onderbouwprogramma (1-2-3 HAVO) of een eindexamen (4 MAVO) dat de sfeer ademt van het oude examen wiskunde. Na ophogingen met 0,7 in 1992 en 0,3 in 1993 leek de examencultuur redelijk uit te kristalliseren in het examen 1994: gemiddeld 5,8 en geen cesuurwijziging.

En nu in 1995 opeens tegenvallende resultaten. De lage scores op dit examen zijn voornamelijk te wijten aan één opgave, die over de slagboom (zie hiernaast).

Bij deze opgave zijn 28 scorepunten opgehangen aan één lastige context. Hier is vooral ook sprake van een psychologische stapeling. De essentie van het mechaniek is noch conform het intuïtieve idee van de werking van een slagboom noch conform de praktische werking van een slagboom. Als het mechaniek is begrepen, zijn de vragen 14, 15 en 16 redelijk te doen. De opgave had hier afgelopen kunnen zijn. De volgende vragen voegen inhoudelijk niets meer toe. De leerlingen scoren bij deze laatste drie vragen gemiddeld 2,4 van de te behalen zestien punten.

Uit het examenprogramma is alleen met enige moeite te concluderen dat het differentiëren van gebroken goniometrische functies tot het programma behoort. In de huidige boeken komt dit type functie niet of zéér sporadisch voor. In de geest van het leerplan ligt de nadruk op de goniometrische modellen $y = a + b \sin c(x + d)$, zoals ze in de examens 1992 en 1993 voorkomen. Als de goniometrische quotiëntfuncties, zoals in deze opgave, ook nog geoefend moeten worden in de toekomst (en dan logischerwijs misschien ook nog gebroken logaritmische functies en gebroken exponentiële functies), dan is het HAVO Wiskunde B-programma niet meer onderwijsbaar.

Conclusie

Een context met drie vragen die op of over het randje van het examenprogramma liggen, kunnen al snel het gemiddelde fors doen dalen. Toch laat dit examen zien dat een meer analytische wiskunde waarin wordt gewerkt met toepassingen en dwarsverbanden, redelijk te onderwijzen is als de toepassingen tenminste goed afgebakend zouden zijn en de groep leerlingen relatief klein is. Overigens is voor HAVO wiskunde B wel besloten de 'ijskast' voorlopig te handhaven.

Ten slotte

Op dit moment circuleren de voorstellen van de vakontwikkelgroep Wiskunde voor de programma's in de Tweede Fase. Kijkend naar de huidige examens zijn de volgende aanbevelingen het overdenken waard:

- zorg er voor dat het programma niet overladen is. Leerlingen moeten de tijd hebben te werken aan meer creatieve opgaven, waarin probleemoplossend vermogen en dwarsverbanden tussen de onderwerpen aan de orde komen
- zorg dat de mogelijke dwarsverbanden en interpretaties van het examenprogramma goed afgebakend zijn, zodat leerlingen niet opeens met onmogelijke opgaven geconfronteerd worden
- zorg voor een HAVO-B programma dat voor meer leerlingen dan nu een zinvolle voorbereiding is op allerlei vervolgopleidingen die B-achtig zijn en niet alleen op een HTO, waar veelal nog een algebraïsche en algoritmische visie op wiskunde wordt gehanteerd.

Het is toch te hopen dat zo'n 35% tot 40% van de HAVO-leerlingen terecht komt in één van de profielen Natuur&Gezondheid en Natuur&Techniek.

Literatuur

Rapport Studiecommissie Wiskunde B VWO. Freudenthal instituut, Utrecht, 1994. ISBN 90 74684 02 5
Verkrijgbaar bij Freudenthal instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, best. nr. 26, prijs: *f* 15,-.