Toen *x* nog een grote onbekende was

Voordracht gehouden op de NWD

M. Kool
Hogeschool Domstad, Utrecht

In de zestiende-eeuwse Nederlanden ging het merendeel van onze landgenoten zonder algebra door het leven. Toch werden destijds door degenen die zich hadden geoefend in 'die edel conste arithmetica' wel degelijk ingewikkelde vraagstukjes opgelost. x was voor hen nog een grote onbekende, maar men beschikte wel over allerlei handige rekentechnieken en rekenregels.

Waar zouden wij zijn zonder x? Wij zijn gewend aan en geoefend in het gebruik van variabelen en vergelijkingen. Als ons gevraagd wordt de waarde van een onbekende te berekenen, proberen we vaak niet eens het vraagstuk zonder algebra op te lossen.

De paardenkoop

Tijdens de Nationale Wiskundedagen 1995 deed ik een klein testje. Ik legde de ongeveer honderd toehoorders van mijn voordracht het volgende vraagstuk voor:

> Twee ghesellen Willem ende Wouter coopen een peert voor 60 guldenen ende niemandt van huerbeeden en cant betalen. Daeromme seide Willem tot Wouter: "leent my 3/4 van uwen ghelde ende ic salt tpeert betalen." "Neen", seide Wouter tot Willem, "gheeft my maer 2/3 van uwen ghelde ende ic salt tpeert selue betalen." De vraghe es nv hoeveel ghelts elck besondert mede te merctwaert brochte.

Zoals te verwachten was, stelde vrijwel iedereen in de zaal keurig een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden op en binnen de kortste keren werd gevonden dat Willem 30 gulden en Wouter 40 gulden bezat. Zo zijn we opgevoed en zo werkt het prima.

Het vraagstuk van de twee vrienden die een paard willen kopen is afkomstig uit de arithmetica van Christianus van Varenbraken, geschreven in 1532. Dit rekenboekje is één van de dertig Nederlandstalige rekenboeken en rekenhandschriften die zijn overgeleverd uit de zestiende eeuw. In deze werken wordt de leerling het cijferend rekenen met Hindoe-Arabische getallen geleerd. In het eerste gedeelte wordt uitgelegd hoe men moet optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Het tweede gedeelte bevat de zogenaamde rekenregels waarmee allerlei vraagstukken opgelost kunnen worden. De belangrijkste regel die wordt behandeld is de 'Regel van drieën'. Deze regel wordt gebruikt om bij drie gegeven getallen het vierde evenredige getal te berekenen. Peter van Halle legt in zijn arithmetica van 1568 de regel van drieën uit aan de hand van het volgende voorbeeld:

> 9 naysters maecten op eenen dach 15 paer hemden. Hoeveel soudender 6 naysters maeken?

De drie gegeven getallen worden in de juiste volgorde op een rij gezet: 9 --- 15 --- 6. De laatste twee getallen worden vermenigvuldigd met elkaar en vervolgens wordt het produkt gedeeld door het eerste getal:

$$\frac{15 \times 6}{9} = 10$$

Wij zouden dit 'kruiselings vermenigvuldigen' noemen.

De verdeling van een erfenis

Met deze regel van drieën worden in de zestiende-eeuwse rekenboeken zeer veel vraagstukken opgelost. Vaak gaat het om eenvoudige verhoudingsvraagstukken, maar gaandeweg komen er ook ingewikkelder opgaven voor. Meestal gaat het om praktische vraagstukken uit de praktijk van de zestiende-eeuwse koopman: berekeningen over het kopen en verkopen van goederen, het wisselen van geld, rentetarieven, enzovoort. Soms worden er echter ook nogal onrealistische vraagstukken behandeld. Een mooi en zeer onwaarschijnlijk voorbeeld is de kwestie van de erfenisverdeling in de arithmetica van Bernard Stockmans uit 1595:

Eenen overleden Man achter-ghelaten hebbende eene bevruchte vrouwe met 3175 guldens heeft sijn Testament ghemaeckt dat so Godt haer Moeder liete worden van eenen Sone dien soude 3 mael soo veel hebben als de Moeder: maer Soo t'kindt een Dochter ware dat en soude maer hebben half soo veel als de Moeder. Soo ontfangt sy ter tijdt haerder baringhe eenen Sone met een Dochter ende een Hermaphroditus, dat is half Man half Vrouwe. Hoeveel sal elck dan hebben op dat des Mans verbondt onverbroken blijve?

Bij de oplossing van dit vraagstuk wordt de regel van drieën meerdere malen gebruikt. De dochter is de laagste in het rijtje erfgenamen. Zou zij bijvoorbeeld 2 gulden krijgen, dan krijgt de moeder 4 gulden, de zoon 12 gulden en de hermafrodiet 7 gulden. Daarmee zou 25 gulden verdeeld zijn. Er moet echter 3175 gulden verdeeld worden en daarbij komt de regel van drieën goed van pas. Het bedrag van de dochter wordt bijvoorbeeld als volgt berekend:

$$25 \text{ --- } 3175 \text{ --- } 2 \quad \frac{3175 \times 2}{25} = 254 \text{ gulden}$$

Voor elk van de erfgenamen volgt een vergelijkbare berekening.

Het vraagstuk van de erfenisverdeling heeft een lange traditie. Varianten van dit probleem komen al in zeer oude bronnen voor. Zo heeft onder andere ook de veertiende-eeuwse Italiaan Paolo Dagomari het in zijn arithmetica opgenomen. Hij voorzag het vraagstuk van een fraaie illustratie.

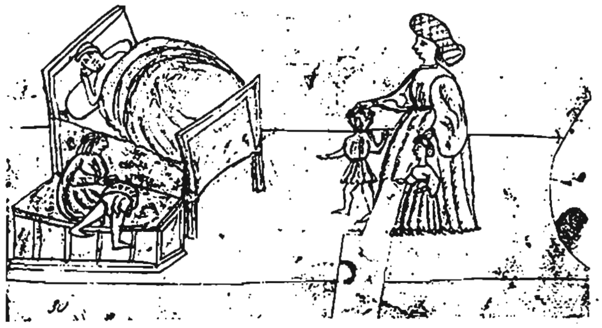

fig. 1 Illustratie bij een vraagstuk over erfenisverdeling uit de veertiende-eeuwse Italiaanse arithmetica van Paolo Dagomari.

Bij het oplossen van het erfenisvraagstuk zou u waarschijnlijk geen gebruik maken van variabelen en vergelijkingen. Toch zijn er in de zestiende-eeuwse arithmetica's vele vraagstukken waarbij u dat vermoedelijk wel zou doen, terwijl uw zestiende-eeuwse collega's deze moesten oplossen zonder dat zij de beschikking hadden over algebratechnieken. Hoe deed men dat destijds?

Nogmaals de paardenkoop

Laten we even terug gaan naar het vraagstuk over de paardenkoop uit het begin. Willem en Wouter willen een paard van zestig gulden kopen. Willem zegt dat zijn kapitaal aangevuld met $\frac{3}{4}$ van Wouters bezit daarvoor toereikend zou zijn. En Wouter beweert dat hij het paard zou kunnen kopen als Willem hem even $\frac{2}{3}$ van zijn spaargeld leent. In figuur 2 is te zien hoe men dit vraagstuk in 1532 oploste. Doordat men geen gebruik maakte van rekensymbolen is deze oplossing vrijwel onleesbaar voor ons, twintigste-eeuwers die gewend zijn aan het gebruik van symbolen als +, –, =, enzovoort. Overigens haalt de auteur in zijn oplossing de namen van Willem en Wouter door elkaar.

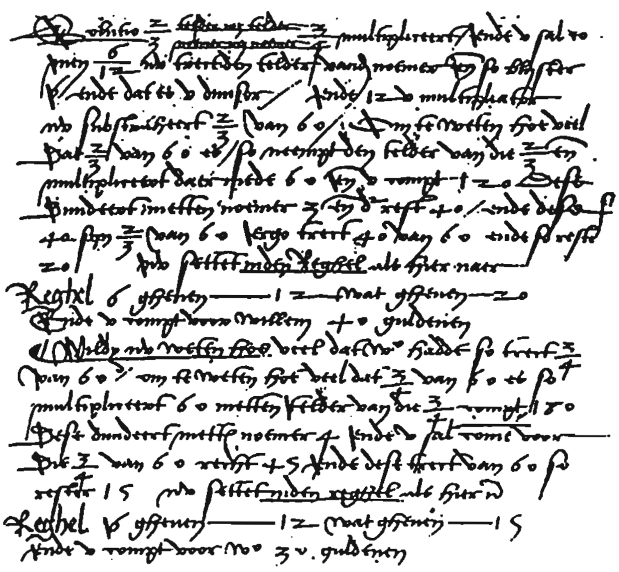

fig. 2 Oplossing (Solutio) van het vraagstuk over de paardenkoop uit de arithmetica van Christianus van Varenbraken (1532).

In moderne rekentaal komt de zestiende-eeuwse oplossing hierop neer:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$$

$12 - 6 = 6$

12 wordt de vermenigvuldiger en 6 wordt de deler.

$\frac{2}{3}$ van $60 = 40$

$60 - 40 = 20$

6 --- 12 --- 20 (de regel van drieën)

$\frac{12 \times 20}{6} = 40$ guldens bezit Wouter.

Dit lijkt op het eerste gezicht nog steeds gegoochel met getallen, maar dat wordt anders als we het vergelijken met onze moderne oplosmethode, het stelsel van vergelijkingen:

Wo is het kapitaal van Wouter en *Wi* dat van Willem.

$$Wo + \frac{2}{3}\, Wi = 60$$
$$Wi + \frac{3}{4}\, Wo = 60$$

$$Wo + \frac{2}{3}\, Wi = 60$$
$$\frac{3}{4}\, Wo + Wi = 60 \qquad \times \frac{2}{3}$$

$$\frac{12}{12}\, Wo + \frac{2}{3}\, Wi = 60$$
$$\frac{6}{12}\, Wo + \frac{2}{3}\, Wi = 40 \quad -$$
$$\frac{6}{12}\, Wo = 20$$

Eigenlijk berekenen wij ook

$$12 - 6 = 6 \text{ en } 60 - \frac{2}{3} \times 60 = 20$$

en wij nemen eveneens 12 als vermenigvuldiger en 6 als deler:

$$Wo = \frac{12 \times 20}{6} = 40$$

De zestiende-eeuwse oplosmethode komt zeer dicht bij de onze, alleen werd er destijds geen gebruik gemaakt van vergelijkingen.

Het is nog maar de vraag of Christianus van Varenbraken, de auteur van de zestiende-eeuwse arithmetica, zelf helemaal precies begreep waar hij mee bezig was en doorzag waarom zijn rekentrucjes klopten.

De appelboomgaard

> een vrijster oft iongedochter comt in een Boomgaert om Appelen te plucken oft te rapen ende haer ghenoegen hebbende so wilde sy wederom naer huys keeren maer int wtgaen so ontmoette haer een vande wachters (der welcker datter dry waren) ende moeste de helft aenden eersten wachter geuen van allen den appelen die sy hadde dwelc sy seer geerne dede dit siende de wachter gaffer haer 13 appelen wederom ende voorts gaende ontmoette haer den anderen die nammer haer 9 maer comende tot den derden gaf sy hem de helft vande appelen die sy noch behouden hadde maer hy aensiende haer goetheyt ende beleeftheyt soo gaf hy haer 8 appelen wederom Thuys comende so hadde sy noch 22 appelen behouden de vrage is hoeveel appelen dat sy ten eersten hadde doen sy wt den Boomgaert ginc ende den eersten wachter ontmoete.

De regel van drieën speelde niet bij alle zestiende-eeuwse vraagstukken een rol. In dit vraagstuk over de appelboomgaard uit de arithmetica van Bernard Stokmans (1595) gaat het bijvoorbeeld om een geheel andere oplosmethode.

Bernard Stockmans begint te rekenen met de 22 appels die de jongedochter thuisbrengt en werkt terug tot hij op het aantal appels uitkomt dat ze in de boomgaard verzameld heeft. Dat blijken er dan 48 te zijn.

Toen het vraagstuk van de appelboomgaard samen met een moderne vertaling ervan voorgelegd werd aan een aantal brugklassers, kozen velen van hen spontaan voor dezelfde oploswijze als Bernard Stockmans precies vier eeuwen geleden had gedaan. De meeste brugklassers kwamen op het goede antwoord.

Toen hetzelfde probleem aan een 3 MAVO-klas werd gepresenteerd, bleken, opvallend genoeg, veel minder leerlingen in staat het antwoord op de vraag te vinden. Dat kwam waarschijnlijk omdat bijna alle leerlingen uit de 3 MAVO-klas probeerden het vraagstuk op te lossen met vergelijkingen. Daarbij raakten de meeste leerlingen al snel in de problemen. Ze kwamen niet meer op het idee om terug te gaan rekenen. Blijkbaar was dat het gevolg van jarenlang intensief oefenen met vergelijkingen en variabelen. Het is jammer dat het flexibel rekenen met eigen ideeën en inzichten gedurende de middelbare school langzaamaan verloren gaat door het eindeloze oefenen met algebraïsche rekentechnieken.

Hoe voorkom je zoiets? Het antwoord op deze vraag ligt voor de hand: Confronteer leerlingen ook met andere oplosmethoden, laat ze regelmatig zelf eigen oplosstrategieën bedenken of laat ze nadenken over alternatieve rekentechnieken van anderen. De leerlingen zullen zo in ieder geval ontdekken dat het rekenen met variabelen en vergelijkingen niet de enige oplosmethode is. Daarmee vergroten ze hun wiskundig inzicht en worden ze hopelijk wat flexibeler in de aanpak van problemen.

Wie zijn leerlingen af en toe confronteert met een alternatieve oplosmethode van vier eeuwen geleden vangt nog meer vliegen in één klap. Deze leerlingen krijgen immers de kans hun historisch bewustzijn te ontwikkelen. Ze zullen ontdekken dat de wiskunde niet zomaar op een dag kant en klaar uit de lucht is komen vallen. Zij zullen ervaren dat wiskunde zich in de loop der tijden ontwikkeld heeft en nog steeds in ontwikkeling is, dat mensen door de eeuwen heen steeds tegen wiskundige vragen zijn aangelopen en geprobeerd hebben daarop een antwoord te vinden met de middelen die ze op dat moment tot hun beschikking hadden.

De leraar die af en toe een historisch vraagstukje in zijn wiskundeles verwerkt, levert een belangrijke bijdrage aan het cultuurhistorisch inzicht van zijn leerlingen.

Schip met zeilen

Tot besluit volgt hier een vraagstuk uit de Italiaanse arithmetica van Filippo Calandri uit 1491.

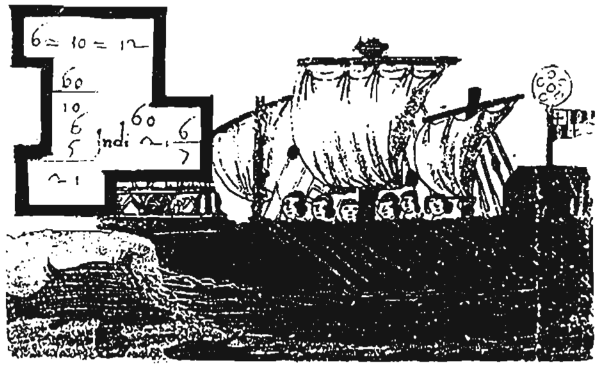

fig. 3 Vraagstuk over het schip met de drie zeilen uit de Italiaanse arithmetica van Filippo Calandri (1491).

Figuur 3 toont in een kader de vijftiende-eeuwse oplosmethode. Kunt u zien hoe hier gerekend wordt? Als het u niet lukt de Italiaanse oplossing te doorgronden, kunt u wellicht de hulp van uw leerlingen inroepen!

> Er is een schip met drie zeilen dat een grote reis moet maken. Als alleen het eerste zeil gehesen wordt, zal de reis 6 dagen duren. Vaart het schip met uitsluitend het tweede zeil, dan zal de reis 10 dagen in beslag nemen. En met behulp van slechts het derde zeil, duurt de tocht 12 dagen. Hoe lang zal het schip over deze reis doen als al-ledrie de zeilen gehesen zijn?

Marjolein Kool
Jonkheer Ramweg 28B
3998 JR Schalkwijk
tel. 03409-1201

(*Advertentie*)