Zelf algebra maken

L. Streefland
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Inleiding

Er wordt wat afgeschreven over algebra vandaag de dag. Zo zijn in de *Nieuwe Wiskrant* verschillende artikelen over algebra verschenen van de hand van medewerkers van het Amerikaanse Mathematics in Context project (Abels, 1994 en Van Reeuwijk/Wijers, 1994).
Bij de ontwikkeling van verschillende units binnen de leerlijn voor algebra van dit project was ik zijdelings betrokken. Bovendien houdt de vraag via welke onderwerpen in het reken-wiskunde programma voor de basisschool de deur open gezet kan worden naar de (aanvankelijke) algebra mij al langer bezig. Ik vind ook dat het een taak van het Freudenthal instituut is om dit uit te werken en te onderzoeken. Beide omstandigheden brachten mij ertoe in de marge van het eerder genoemde project zelf eens iets uit te gaan proberen.
Inmiddels hebben er twee kleine experimenten plaatsgevonden op een basisschool in Bussum, één in groep 8 en één in groep 6. Van het eerste experiment wil ik hier verslag doen.

Kader voor het onderzoek

De leerkracht van de groep, Rob Gertsen, en ik besloten te proberen uit de kinderen te halen wat erin zat. Onze keuze viel op: 'Van hoeveelheden vergelijken naar vergelijkingen'. We hadden echter geen onderwijsprogramma. Dat was de consequentie van onze keuze 'uit halen wat erin zit'. De kinderen zouden zelf het materiaal maken. Daarop zouden de lessen steeds drijven. Algebra maken door de leerlingen zèlf, dat was ons devies en niet algebra overdragen om hooguit nagemaakt te kunnen worden.
Geïnspireerd door het Mathematics in Context materiaal en aangemoedigd door de ervaringen ermee, durfden we de uitdaging wel aan. Bovendien speelde vooraf een aantal vragen door ons hoofd, waarvan de beantwoording er voor zorgde dat we niet met lege handen stonden, ook al hadden we dan geen uitgewerkte leergang.
Waarom zou je eigenlijk mikken op vergelijkingen? Waarvoor dienen ze? En vooral: Waar komen ze vandaan? Hoe ontstaan ze? Waar berusten ze op? Wat kunnen kinderen bijdragen aan hun hernieuwde ontstaan? Heeft één vergelijking ook betekenis? Hoe ontstaat die? Is er een probleem in een context dat aanleiding geeft tot het bouwen aan een stukje algebra van onderop?

Op grond van het overdenken van de antwoorden op deze vragen, kwamen we uit op de volgende kwestie.
De sigarenwinkeliers, die ook snoep in vele soorten en maten verkopen, ontdekken een gat in de markt, namelijk: Het maken van zakjes snoep, met één, twee of drie soorten erin. Deze zakjes zijn heel geschikt om uit te delen aan het einde van een verjaardagspartijtje.
De kinderen werden snoepverkoper, stelden zakjes snoep samen met één, twee of drie soorten snoep, bepaalden de prijzen ervan, bedachten passende manieren om de zakjes te noteren en ook om aan te geven wat er nodig zou zijn voor een partijtje met bijvoorbeeld acht kinderen, of vijf, of iets dergelijks.
We waren benieuwd.

Korte impressie van het experiment

De deelnemende groep 8 bestond uit 19 kinderen. Als geheel was de groep van beneden gemiddeld niveau, gelet op de eindtoets resultaten.
De eerste twee bijeenkomsten met deze groep waren heel produktief. De kinderen – in hun rol van winkelier – hadden een lijst met snoepsoorten en prijzen tot hun beschikking. Die gebruikten ze bij het samenstellen en noteren van zakjes snoep met één, twee of drie soorten en de prijzen ervan, en ook veelvouden van die zakjes met hun prijzen werden genoteerd.
Figuur 1 laat een bloemlezing van dit werk van de kinderen zien.

Zakje 3: 2 Soliesa =,50
1 Spekkie =,10+
f0,60

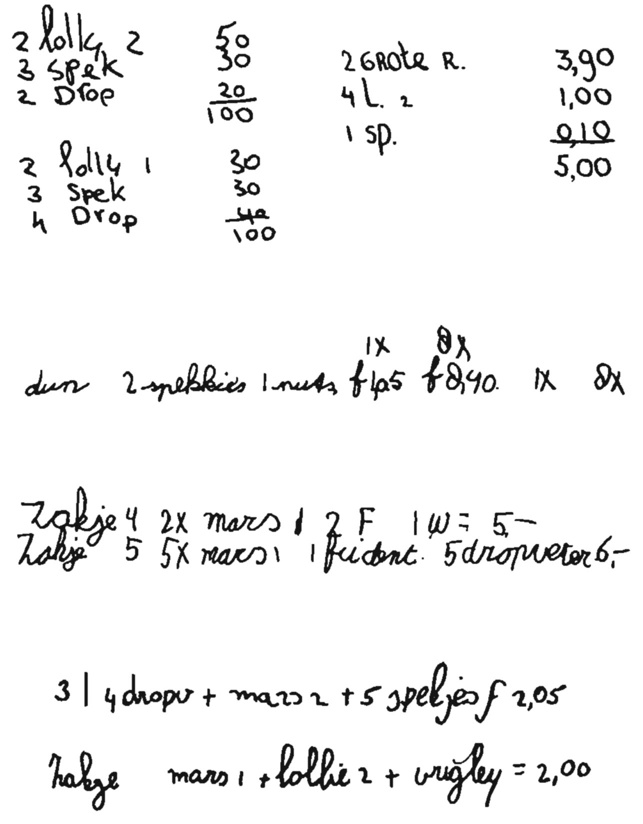


fig. 1 De eerste produktie van snoepzakjes

In dit werk tekent zich al een leerweg af. Er zit namelijk een omslag in van kolomsgewijze notatie naar een notatie in vergelijkingen. Ook zijn er, al is het nog heel bescheiden, de eerste schuchtere pogingen om afkortingen toe te passen in de beschrijvingen van de zakjes.

Het beschrijven en berekenen van de prijs van een veelvoud van zo'n zakje betekent, algebraïsch gezegd, het opereren op een vergelijking, een heel natuurlijke gang van zaken binnen deze context. In de onderzoeksliteratuur echter, waarin men overigens dikwijls nog uitgaat van de traditionele inhoud van het algebra-onderwijs, blijkt zoiets een lastig te nemen hindernis voor leerlingen te zijn. En nu we het toch over algebra hebben...
Wie op haar of zijn feestje trakteert, zal rekening moeten houden met het beschikbare budget. Valt een zakje te duur of te goedkoop uit, dan volgt het uitwisselen van duurdere en goedkopere snoepsoorten over en weer. Algebraïsch gezien betekent dit *opereren* binnen een vergelijking.

Terug naar het experiment. De kinderen kregen hun eigen werk uit de bloemlezing van figuur 1 weer voorgelegd. Het herkennen van het eigen werk daarin was natuurlijk heel belangrijk, maar ook minder persoonlijke kwesties kwamen aan bod, zoals het opmerken van verkortingen, het opmerken van verlies aan informatie, namelijk in de vergelijkingen zijn de prijzen van de verschillende snoepsoorten verdwenen, terwijl die in de kolomnotatie nog wel aanwezig zijn of weer eenvoudig teruggerekend kunnen worden.
Vanzelfsprekend werd er ook geprobeerd om de kolommen in vergelijkingen om te zetten, als in de gegeven bloemlezing. De kinderen konden dan zelf nog eens ervaren hoe, al doende, *bekende* snoepprijzen tot *onbekende* snoepprijzen werden. Ook werden ze aangemoedigd nog eens over de manier van opschrijven na te denken en daarin nog wat verder te gaan op de weg van verkorte notaties. Een werkblad met notaties in kolomvorm uit de eerste produktieles werd daartoe uitgedeeld. Daaruit zouden snoepzakjes, genoteerd in de gedaante van vergelijkingen, moeten worden voortgebracht. (De term 'vergelijking' was inmiddels gevallen.)
Vanzelfsprekend leverde dit werk een schat aan vergelijkingen op (figuur 2). Ook daar kwam weer een werkblad uit voort. Liefst vijftien vergelijkingen tegelijk kregen de kinderen onder ogen, of beter, vijftien snoepzakken, op gevarieerde manier in de vorm van vergelijkingen beschreven. Eerst werd de lijst vrij onderzocht.

1. 4 ☺ = 0,40
2. { 1 zakje autodrop + 2 gevulde koek = 2,25
   1 autodrop + 6 spekkies = 1,85
3. 6 l_2 = 1,50
4. { 4 zuurballen = 50 c
   4 fruitballen = 50 c
5. 1 l_1 + 2 gr r = 4,05
6. 3 dv + 2 m_1 + 2s = 2,20
7. 4 dropv + mars2 + 5 spekjes = 2,05
8. 2 lol 1 + 1 gr. reep = 2,25
9. 2 spekkies + 1 nuts = *f* 1,05
10. 2 grote repen = 3,90
11. 1 autodrop + 1 gev.k = 1,75
12. 8 dropv + 2 mars2 + 8 sp = 3,90
13. 1 sp + 2 n = 1,80
14. 2 autod + 2 sp = 2,70
15. 3 dv + 1 m_1 + 2s = 1,35

fig. 2 Bloemlezing van vergelijkingen

De kinderen begonnen spontaan verschillende regels onderling te vergelijken om achter de verschillende snoepprijzen te komen. Veel prijzen wisten ze trouwens al. Later zou daar verandering in komen.
Vanwege dit spontane vergelijken gaven we de kinderen de opdracht de vergelijkingen in groepjes in te delen en ook te vermelden waarom bepaalde vergelijkingen volgens hen bij elkaar hoorden. Dit is wat er gebeurde.

Impressie uit de klas

Welke vergelijkingen horen bij elkaar? Waarom? Daar ging het om. Enkele criteria die door de kinderen werden genoemd waren:

- dezelfde soorten snoep
- de kleine getallen in de vergelijkingen, zijn die hetzelfde of verschillend? Of, kunnen ze in elkaar omgerekend worden?

Bijvoorbeeld:

regel 7 $4d + m_2 + 5s = 2{,}05$

regel 12 $8d + 2m_2 + 8s = 3{,}90$

NB. d = dropveter, m_2 = mars 2 en s = spekkie.

Als je nu twee zakjes van regel 7 neemt, dus

$8d + 2m_2 + 10s = 4{,}10$

dan kun je het verschil met regel 12 uitrekenen. Dat is $2s = 0{,}20$, dus een spekkie kost 10 cent.

De leerkracht oppert: Moet het verschil eigenlijk niet

$0d + 0m_2 + 2s = 0{,}20$

zijn? Dat kan wel zijn, meent de groep, maar $0d + 0m_2$ is toch niks, dus dat kun je net zo goed weglaten.

De gevonden prijs voor een spekkie wordt nu in de regels 7 en 12 ingevuld, dus bijvoorbeeld

$4d + m_2 + 0{,}50 = 2{,}05.$

'Eigenlijk is dat een nieuw snoepzakje', menen enkele kinderen. 'Maar je stopt toch geen geld in een snoepzakje!' Dat wordt er dus uitgehaald, maar dan zakt de prijs ook met dat bedrag:

$4d + m_2 = 1{,}55$

en dat is hetzelfde als regel 7 zonder spekkies.

Hoe nu verder? Dat kan niet. Dan zouden we nog een zakje met dezelfde soorten moeten hebben, maar met andere aantallen.

Tijdens deze activiteit wordt duidelijk dat de kinderen het als vanzelfsprekend ervaren dat je met één soort snoep maar één vergelijking nodig hebt om de prijs te weten te komen, voor twee soorten snoep twee (verschillende) vergelijkingen en dat voor drie soorten snoep drie vergelijkingen nodig zijn. Met 'verschillende' bedoelen ze dan ongelijk en ook niet gelijk te maken.

'Hoe nu verder?' zo vragen we opnieuw. De kinderen pikken

regel 6: $3d + 2m_1 + 2s = 2{,}20$ en

regel 15: $3d + 1m_1 + 2s = 1{,}35$

van het werkblad (figuur 2) eruit.

Zo redeneren ze: Je weet de prijs van een spekkie. Dat kan dus ingevuld worden. Dan krijg je twee verschillende vergelijkingen om mee verder te gaan. Maar... als je de zakjes goed vergelijkt, zie je dat in het ene $1m_1$ meer zit en het verschil in prijs is 0,85, dus $1m_1 = 0{,}85$. s weten we al, dus kunnen we nu d vinden. Nu kunnen we terug naar de regels 7 en 12 om de prijs van m_2, die we nog niet weten, uit te zoeken. Enzovoort.

Tot zover deze impressie uit de klas.

Commentaar

Na drie lessen van minder dan een uur konden de leerlingen de prijzen van lollies en repen terugvinden uit

$$\begin{cases} 1l + 2r = 4{,}05 \\ 2l + 1r = 2{,}25, \end{cases}$$

dat wil zeggen dat zij in staat waren deze uitdrukkingen voor twee zakjes snoep te vergelijken, of beter, vergelijkbaar te maken om van daaruit de afzonderlijke prijzen te bepalen.

Kiezen we nu het standpunt van de algebra, dan gebeurde in de les het volgende, en wel op een heel natuurlijke manier:

- substitueren
- noodzakelijke voorwaarden bepalen voor een volledig stelsel vergelijkingen
- het omzetten van vergelijkingen in daarmee gelijkwaardige in dienst van het gemakkelijker vergelijkbaar maken (opereren op en binnen een vergelijking)
- het herkennen van equivalente vergelijkingen
- het hergroeperen van termen door impliciete toepassing van het balansmodel voor vergelijkingen.

Het lettergebruik betekent, vanzelfsprekend, nog niet echt het omgaan met onbekenden in algebraïsche zin. Er is echter wel een stapje op die weg gezet. In de eerste lessen zijn de gebruikte letters *verwijzers naar objecten* (de soorten snoep). Deze ondergaan tijdens het samenstellen van de snoepzakjes op papier echter al een verandering: het worden *verwijzers naar de prijzen* van de snoepsoorten.

In deze zin gedragen de letters zich als in betrekkingen als $2a + 3a = 5a$, waarbij de – overigens vaak gekritiseerde – betekenis 'twee appels plus drie appels' op de achtergrond meespeelt, zij het dat het in dit geval gaat om het vaststellen van de prijs van de 'vijf appels'. Op de kritiek dat men bij het produkt van $2a$ en $3a$ in deze context vastloopt, ga ik verder niet in. (Ook breuken zijn niet op alle grootheden of objecten van toepassing en toch maakt niemand bezwaar tegen het breukrekenen als zodanig.)

Belangrijker is, dat de letters *tijdens* de produkties van de kinderen al een betekenisverandering ondergaan, namelijk van object (snoepsoort) naar getal (de prijs). Dit sluit precies aan bij de historische ontwikkeling. Zo vermeldt Vredenduin (1991) een voorbeeld uit 'Wiskunde in negen boeken' (China, tweede eeuw v. Chr.), waarin met een soort voorloper van de matrixmethode een stelsel vergelijkingen met drie onbekenden 'geveegd' wordt, waarvan één vergelijking ontleend is aan de ruilhandel. De onbekenden, overigens nog zonder lettergebruik, zijn daarin *zuivere objecten* en voor het overige verwijzen de objecten (buffels enzovoort) naar hun (markt-)prijzen. Het enige verschil met wat er in het leerproces van de kinderen gebeurt is, dat letters in de plaats komen van de met hun volledige naam genoemde objecten. In dit opzicht weerspiegelt de gang van zaken in de klas dus de historische ontwikkeling.

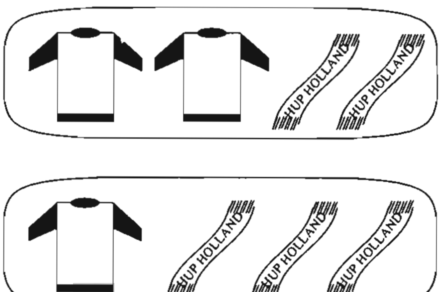
In de internationale literatuur gaan stemmen op om de algebra van de constante waarden voor de onbekenden – en daarin is hier sprake – maar over te slaan. Ik ben daar niet vóór omdat de voorgestelde sprong naar het gebruik van letters als volwaardige variabelen in functies een sprong in het diepe is, die, historisch gezien, helemaal niet te rechtvaardigen valt.

Anderen delen die mening (onder andere Jahnke, 1994) ook al omdat het variabele begrip meer een notie is van meta-wiskunde dan van wiskunde.
De betekenisveranderingen die de letters ondergaan, dienen tijdens het onderwijsleerproces zorgvuldig te worden geobserveerd en bewust gemaakt. Op die manier ontwikkelt zich het wiskundige denkniveau van de kinderen. Deze bewustmaking kan vaak heel eenvoudig met de vraag 'Wat bedoel je met...?' nadat de kinderen eerst iets geproduceerd hebben. Zo berekenen zij de totaalprijs van de bedachte snoepzakjes en schreven een =-teken in hun regels. De betekenis was volgens de kinderen tweeledig: '=' betekent 'kosten zoveel', maar ook gewoon '=' uit een rekensom.

Vervolg

Nog twee lessen restten, omdat de zomervakantie en het definitief verlaten van de school in aantocht waren. We mikten op het consolideren van wat er tot dusverre geleerd was. De kinderen maakten hun *geheime* prijslijsten, stelden vergelijkingen voor zakjes snoep op en daagden hun klasgenoten uit hun geheime lijsten te achterhalen. De bedoeling was ook de kinderen een beetje aan het begrip *variabele* te laten ruiken. Immers, met zoveel verschillende lijsten met allerlei variërende prijzen, waren zij toch in staat de geheimen ervan te ontraadselen. Wat de kinderen kozen, deed er niet toe. Hun methoden werkten voor alle, geheime prijzen!
Ondanks het korte experiment besloten we een toets te geven. Een item van het Mathematics in Context project werd wat aan de actualiteit van toen aangepast (figuur 3).

Toets
Wereldkampioenschap voetbal 1994
De supporters kunnen kiezen: petten, sjaals, T-shirts, stickers....



f 75,-

f 62,50

> Welke prijzen voor T-shirts en sjaals heeft de winkelier op zijn lijst?

fig. 3 Toetsvraag

Hier volgt een bloemlezing van de oplossingsstrategieën die de kinderen toepasten (figuur 4).

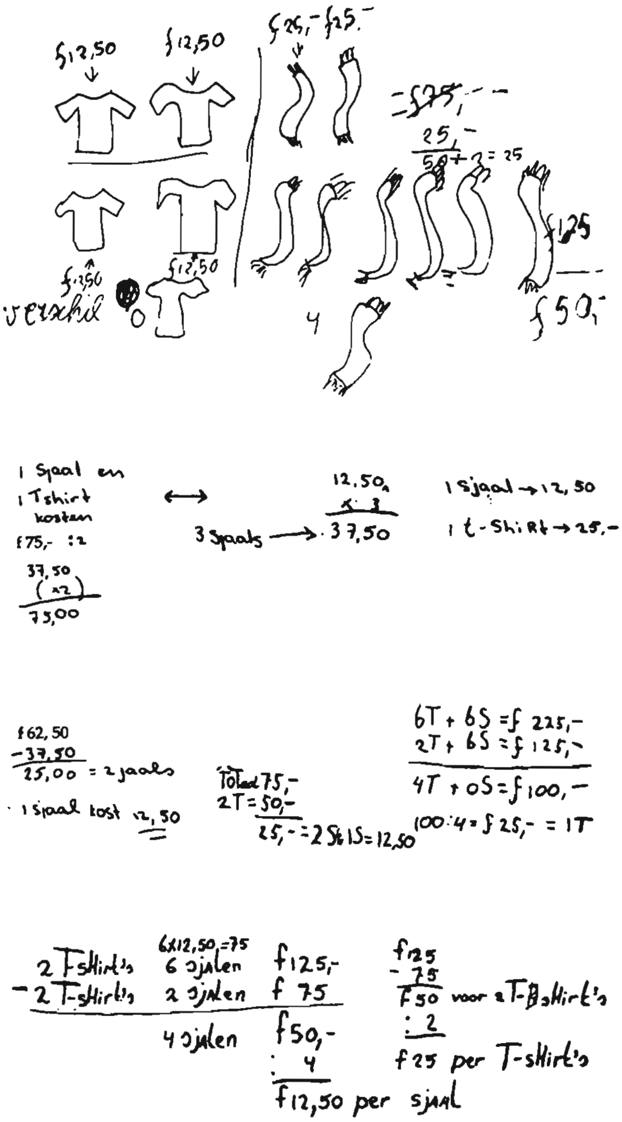


fig. 4 Leerlingenwerk toetsvraag

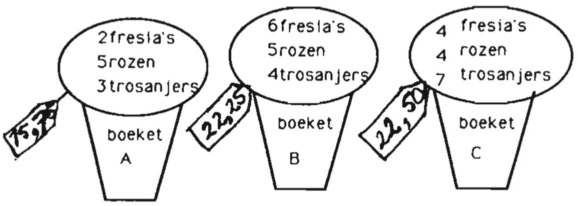
Ik geef nu een overzicht van de gevolgde oplossingsmethoden door de groep.

Strategie	aantal leerlingen
een stelsel vergelijkingen opstellen en op en binnen deze vergelijkingen bewerkingen uitvoeren, in dienst van het vergelijken, bijvoorbeeld de helft van de eerste vergelijking invullen in de tweede	14
overeenkomstige strategie als boven, maar zonder dat vergelijkingen werden opgesteld	2
idem, maar met getekende 'vergelijkingen'	2
het (onjuist) schatten van de prijzen	1

De tweede vraag ging over een bloemist, die drie verschillende boeketten met dezelfde drie soorten bloemen en van een verschillende prijs, in de aanbieding had. 'Wat zou zijn geheime prijslijst zijn?', zo luidde de vraag. Figuur 5 geeft een voorbeeld van leerlingenwerk.

Bij de bloemist
Bloemist Willemse van 'Flora' heeft een geheim prijslijstje.

In zijn etalage staan de volgende boeketten:



Bedenk vergelijkingen voor deze boeketten en probeer achter het prijslijstje van bloemist Willemsen te komen.

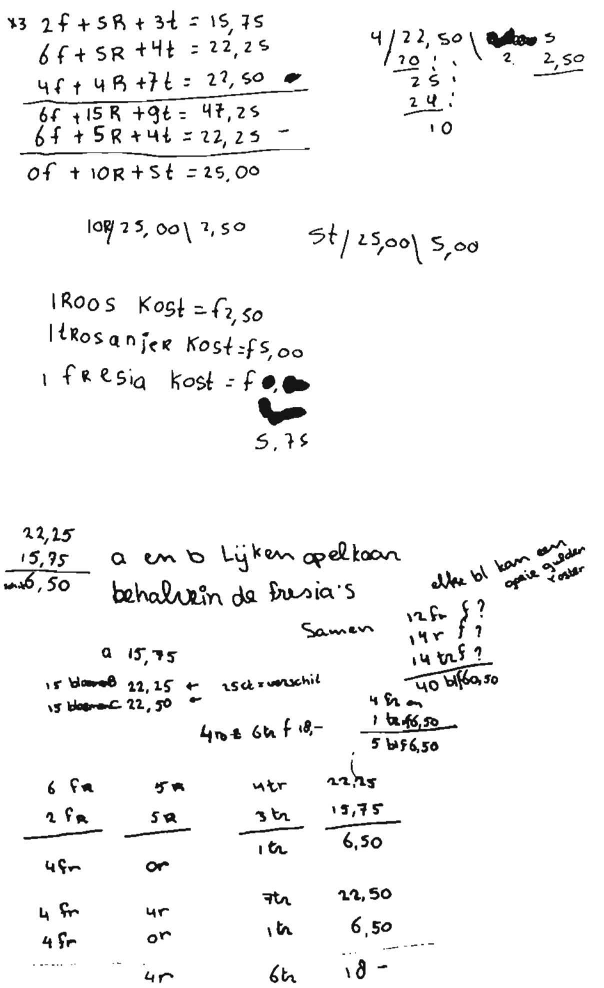


fig. 5

Wat de bespreking ervan aangaat, beperk ik me tot enkele globale kenmerken.
Niemand maakte dit vraagstuk (helemaal) goed, maar opnieuw was het resultaat veelbelovend. Waarom? Wel, opnieuw stelden veertien (dezelfde!) kinderen vergelijkingen op, laten we deze voor het gemak even A, B en C noemen en ze zetten deze om in ermee gelijkwaardige vergelijkingen om de prijslijst van de bloemist te achterhalen. Er kwamen allerlei lineaire combinaties van de vergelijkingen voor in hun werk om één van de bloemensoorten te kunnen afzonderen, soms zelfs al behoorlijk ingewikkeld, zoals 3A – B, 3C – 2B, B – A, C – (B – A), 6(B – A) – {C – (B – A)} enzovoort. De combinaties berustten vanzelfsprekend op de gekozen coëfficienten.

Was de zomervakantie geen spelbreker geweest, dan zou, na een terugblik op de toets, de volgende opdracht geluid hebben:

Maak een handleiding waarin je eigen methode van aanpak staat. Beschrijf die. Waar let je op? Wat doe je eerst? Enzovoort.

Want daarop was tot dusverre nog niet gereflecteerd en met een hele collectie handleidingen zou dit eerste stukje vergelijkingenwerk al wat bewuster en meer gestroomlijnd kunnen worden.

Conclusie

Algebra kan geleerd worden door te leren algebraïseren. In het beschreven experimentje werd een eerste stap gezet. Het onderwijsleerproces dreef op de eigen produkties van de kinderen en de manier waarop hun leraren, Rob Gertsen en ik, daaruit onderwijs produceerden.
Ik ben overigens realist genoeg om niet te vroeg te juichen. Het voorgaande toont een eerste stap op het niveau van de basisschool, op grond van geldrekenen. Maar meer ook niet!
Bovendien leeft de algebra niet bij snoepgoed alleen. Maar... desondanks...

Literatuur

Abels, M. (1994). Kijk en vergelijk. *Nieuwe Wiskrant 13*(3), p. 13-18.

Jahnke, H.N. (1994). The historical dimension of mathematical understanding – Objectifying the Subjective. In: *Proceedings of the PME XVIII, Vol. 1.* Lisbon, Portugal, pp. 139-156.

Reeuwijk, M. van & M. Wijers (1994). Formules en variabelen in Context. *Nieuwe Wiskrant 13*(3), p. 4-7.

Streefland, L. (1995[a]). *Developing instructional activities in which algebra may arise naturally. Paper presented at AERA 1995, San Francisco.*

Streefland, L. (1995[b]). *Making sweet algebra and making algebra sweet. Paper presented at PME, Recife, Brazil, 1995.*

Vredenduin, P.G.J. (1991). *De geschiedenis van positief en negatief.* Wolters-Noordhoff, Groningen.