Analyse in profiel

Ideeën en ervaringen uit het PROFI-project

P. Drijvers / M. Kindt
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Inleiding

Ongetwijfeld heeft u op een of andere manier kennis genomen van de voorstellen voor de profilering van de tweede fase van het voortgezet onderwijs, die in de nabije toekomst (volgens plan in 1998) ingevoerd zal worden. Dat betekent allereerst het einde van de vrije pakketkeuze: elke leerling zal één van de vier profielen (Cultuur en Maatschappij, Economie en Maatschappij, Natuur en Gezondheid, Natuur en Techniek) moeten kiezen. Tevens is het de bedoeling dat het zelfstandig leren in het onderwijs een vooraanstaande plaats zal krijgen.
Voor wiskunde betekent deze profilering meer dan een herverkaveling van de huidige vakinhouden over de verschillende profielen. Er bestaat immers al jaren onvrede over met name wiskunde B van het VWO, en de invoering van de nieuwe structuur van de tweede fase vormt een natuurlijk moment om dit curriculum te herzien. De Vakontwikkelgroep Wiskunde heeft haar taak dan ook in deze zin opgevat en heeft onlangs leerplannen gepresenteerd die met name voor de exacte profielen van het VWO vernieuwend te noemen zijn (Vakontwikkelgroep Wiskunde, 1995).
Vanwege het ingrijpende karakter van de veranderingen lijkt het onverantwoord om een nieuw programma in te voeren zonder dat daaraan experimenten zijn voorafgegaan. Vandaar dat het Ministerie een project heeft toegewezen aan het Freudenthal instituut, dat de haalbaarheid van de nieuwe programma's voor de exacte profielen van het VWO moet onderzoeken en dat tevens een 'voorbeeldige' uitwerking van deze programma's moet opleveren. Het projectteam[1] zal zich laten adviseren door twee resonansgroepen[2]. In dit artikel stellen we dit zogenaamde PROFI-project eerst aan de lezer voor. Vervolgens gaan we nader in op de ontwikkeling van de analyse-lijn, zoals die het projectteam voor ogen staat. Het eerste lespakket uit deze leergang, getiteld 'Oppervlakte en Raaklijn', wordt kort beschreven. Daarna volgen enkele impressies uit klassen van de experimenteerscholen.
In een volgende publikatie – want het team is van plan met regelmaat over het PROFI-project te berichten – zal het begin van de meetkunde-lijn worden belicht.

Het PROFI-project

Zoals gezegd is de taak van het PROFI-project om middels experimenten na te gaan in hoeverre de programma's voor wiskunde in de profielen N&G en N&T van het VWO haalbaar zijn. Daarbij zal experimenteel lesmateriaal worden ontwikkeld, dat net zoals bijvoorbeeld bij het HEWET-project een concrete invulling geeft van de beoogde programma's. Auteurs van methoden kunnen daar dan hun voordeel meedoen. Behalve lesmateriaal zal het projectteam ook trajectenboeken ontwikkelen, waarin de programma's voor alle HAVO- en VWO-profielen meer gedetailleerd zullen worden beschreven en afgebakend.
Aangezien de Vakontwikkelgroep voorstelt om de grafische rekenmachine in de nieuwe programma's verplicht te stellen, is besloten om de experimenten te laten plaatsvinden op de twee scholen waar al sinds geruime tijd met deze machine geëxperimenteerd wordt. Dat deze scholen, het Cals College in Nieuwegein en het Liemers College in Zevenaar, inmiddels al een regeling met de inspectie hadden getroffen met betrekking tot afwijkende centrale examens, kwam natuurlijk goed van pas; te meer daar het Ministerie van Onderwijs buitengewoon laat was met de definitieve beschikking.

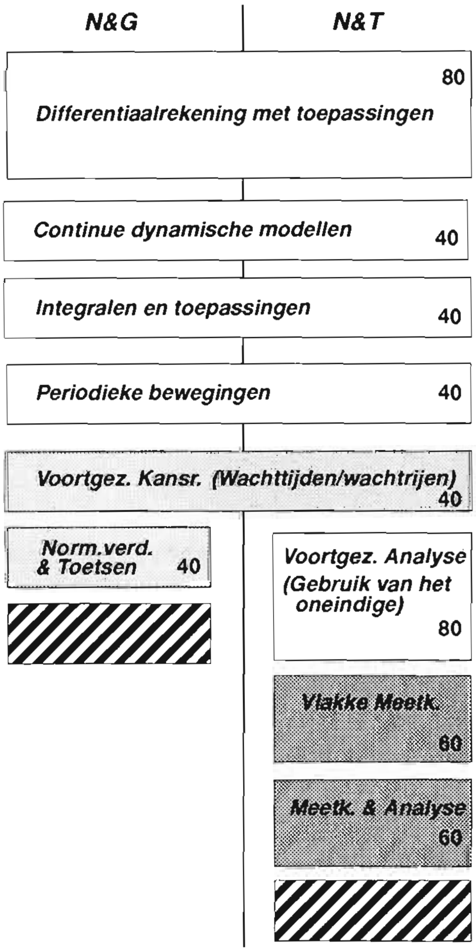
Hoe ziet het experiment er nu uit? Om te beginnen hebben alle leerlingen van VWO 5 wiskunde B de permanente beschikking over een grafische rekenmachine, de Ti-82. Het gebruikelijke lesboek wordt vervangen door PROFI-materiaal. De lessen worden regelmatig geobserveerd en deze observaties vormen de basis voor aanpassingen van het materiaal en voor de reflectie op de inhoud van het curriculum. Een handicap hierbij is dat de beide scholen volgens de 'oude' structuur werken, dus niet met profielen en niet met het studiehuis. Dat betekent onder meer dat het aantal lesuren niet toereikend is om het volledige N&T-programma te doorlopen.
De experimenten leiden tot een experimenteel eindexamen in 1997. Overigens zullen er, los van de profielen, in 1996 al examens op de proefscholen afgenomen worden die aangepast zijn aan het gebruik van de grafische rekenmachine.

Analyse in de exacte profielen

Een randvoorwaarde bij het opstellen van de programma's voor de profielen was dat het wiskundeprogramma voor N&G een zo groot mogelijke overlap diende te hebben met het programma N&T. Voor het eerstgenoemde profiel waren 'statistiek' en 'praktische analyse' sterke kandidaten. Voor de tweede richting zouden er volgens vele deskundigen, meer dan tot nu toe bij wiskunde B, accenten moeten worden gelegd op laten we maar zeggen de innerlijke waarde van de wiskunde. Recht doen aan beide profielen was een bijna onmogelijke opgave waaruit de vakontwikkelgroep zich heeft gered door:

- een grote portie kansrekening (100 studielasturen) op te nemen in het *gemeenschappelijk deel* (in de praktijk zal dat wel klas 4 VWO worden); voor de N&G-richting komt er voor de 'stochastiek' in het profiel zelf nog 80 uur bij en voor N&T 40 uur
- de 'basis-analyse' (200 uur) een toegepast karakter te geven en op te nemen in beide profielen
- de helft van het aantal uren voor N&T (= 240) te bestemmen voor activiteiten waarbij *redeneren en bewijzen* wat meer nadruk zullen krijgen; in dit deel zullen de doelen zoals verwoord door de voormalige studiecommissie voor wiskunde B tot hun recht kunnen komen (Rapport, 1994).

Zo ziet de exacte-profielkaart VWO er dan uit:



De gestreepte (zebra-)blokken van 40 uur staan voor keuze-onderwerpen. De vakontwikkelgroep heeft een bonte lijst mogelijkheden genoemd, waaronder voor N&G bijvoorbeeld: 'genetica', 'links en rechts in de natuur', 'echografie' en bij N&T 'codering', 'de wetten van Kepler' en 'complexe getallen'.

We beperken ons in dit artikel nu verder tot het profiel N&T. Hoewel het programma behoorlijk breed lijkt, is de analyse met 280 van de 480 uur prominent aanwezig. Zeker als men bedenkt dat er in het tweede meetkundeblok en in het blok 'wachttijden' veel gebruik zal worden gemaakt van de analyse. Inmiddels blijkt ook dat er zelfs dwarsverbanden zijn tussen de vlakke meetkunde van afstanden, gebiedsindelingen, conflictlijnen en dergelijke en de analyse. Lijkt dat niet prachtig: de analyse als de aorta van het programma met allerlei vertakkingen en bloedvaten in de andere leerstofgebieden en in de andere profielvakken, met name natuurkunde? Zeker, maar dan zal die analyse toch minder receptmatig moeten worden gebracht dan we nu gewend zijn in wiskunde B. De leerling zal zo moeten worden opgeleid dat hij of zij de geleerde technieken kan gebruiken in nieuwe en onverwachte situaties. Het toepassen van allerlei kunstjes met als voornaamste drijfveer dat het zo moet van leraar of leerboek heeft nauwelijks zin. In dit verband is het misschien aardig een uitspraak te vermelden uit een oud mechanica-leerboek van Hugh D. Young (Young, 1970):

> (...) Het is waar dat vergelijkingen dikwijls een bondige samenvatting van een aantal resultaten leveren, maar ze zijn geen vervanging van een grondig inzicht in de betreffende begrippen en grootheden. Het is ook geenszins verstandig om de nadruk te leggen op het uit het hoofd leren van formules. Heeft men zich de fundamentele begrippen werkelijk eigen gemaakt, dan onthoudt men de vergelijkingen automatisch en zonder er moeite voor hoeven te doen. Precies zo, is het veel beter om bij het oplossen van vraagstukken uit te gaan van het eigen inzicht in de beginselen van de situatie, dan zonder meer een aantal getallen in te vullen in een vergelijking met de geschikte fysische grootheden (...)

Met een paar wijzigingen kun je dit citaat zo van toepassing verklaren op ons 'onvolprezen' wiskunde B-onderwijs. Wat het uit het hoofd leren van formules betreft: de vakontwikkelgroep stelt voor om een formulekaart op het examen bij de hand te hebben; gek eigenlijk dat zoiets al niet veel eerder is ingevoerd.

Dit, gevoegd bij het voornemen om iedere leerling uit te rusten met een grafische zakrekenmachine, maakt duidelijk dat op reproduktie van kennis en algoritmen nauwelijks prijs wordt gesteld. Waarop wordt dan wèl gemikt? Wordt wiskunde niet veel moeilijker? Dat zijn de (legitieme) vragen waarop we in de komende projectperiode redelijke antwoorden hopen te vinden.

Oppervlakte en raaklijn

We geven nu eerst een kort overzicht van het experimentele programma wiskunde B zoals dat ons voor ogen staat op de twee experimenteerscholen. Er werd al opgemerkt dat de nieuwe leerstof voorlopig de enige experimentele factor is. Daarbij is er de handicap dat de leerlingen nog een 'oud' vierde-klasprogramma hebben gehad. Dat betekent onder andere dat wij in het begin een stukje 'discrete analyse' hebben moeten inbouwen, en ook dat het werken met de grafische zakrekenmachine (hier de TI-82) moest worden aangeleerd.

Voor dit vijfde leerjaar staat (in chronologische volgorde) deze serie pakketjes (titels nog voorlopig) op het programma:
- Oppervlakte & raaklijn (Analyse)
- Afstanden, grenzen, gebiedsindelingen (Meetkunde)
- Differentiaalrekening (Analyse)
- Optimaliseren (Analyse en Meetkunde)
- Conflictlijnen (Meetkunde)
- Integraalrekening (Analyse)
- Periodieke bewegingen (Analyse).

In klas 6 staan op onze verlanglijst pakketjes over:
- Oneindigheid (inductie, recursie, convergentie)
- Continue dynamische modellen
- Meetkunde en analyse (2 stuks)
- Wachttijden
- Machtreeksen.

Het is echter onwaarschijnlijk dat het gehele programma van de Vakontwikkelgroep in deze eerste proefronde gehaald zal worden. Het totaal aantal uren voor wiskunde in het profiel N&T is duidelijk meer dan voor de huidige wiskunde B. Om toch reeds in dit stadium met alle onderwerpen ervaring op te doen, zouden een paar onderwerpen bij de examinering beperkt kunnen blijven tot het schoolonderzoek; dat geeft dan de mogelijkheid om op de ene school bijvoorbeeld 'wachttijden' en op de andere 'machtreeksen' te behandelen.

De eerste twee pakketjes van de lijst voor klas 5 zijn inmiddels aan bod geweest. In dit artikel beperken we ons nu verder tot het eerste pakket. Zoals de titel 'Oppppervlakte en raaklijn' al zo'n beetje zegt, geeft dit pakket een brede, meetkundig getinte inleiding in de analyse. Er wordt geanticipeerd op de integraalrekening en een begin gemaakt met de differentiaalrekening. De kinematica, met zijn *svt*-cultuur, is duidelijk aanwezig en er is aandacht voor historische aspecten (Archimedes, Galileï, Gauss), meer dan het vermelden van een paar feiten over de levensloop van deze geniale heren. Een extra ingrediënt is het regelmatig gebruik van de grafische rekenmachine.

Het boekje opent met een hoofdstuk over de formule:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Een formule die in de toekomst tot de verplichte stof van het 'algemene deel' zal behoren. Deze formule voor de som van een meetkundige rij speelt verderop een leuke rol: je kunt er op fraaie wijze de afgeleide van $y = x^n$ mee vinden. Wist u trouwens dat je bovenstaande formule voor $r = 2, 3, 4, \ldots$ langs combinatorische weg kunt bewijzen?

Aan de hand van deze 'machtige sommen' wordt het sigma-teken geïntroduceerd. Het gebruik van deze symboliek bleek onverwachte voetjes in de aarde te hebben. Leerlingen schrokken ervan en alleen al daarom is het de moeite waard aan dit stukje wiskundetaal heel zorgvuldig aandacht te besteden.

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

De formule klopt uiteraard niet voor $r = 1$.
In dat geval komt er:

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n$$

en dit bleek lastig te zijn.
Nog moeilijker is:

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

Een volgend stukje discrete analyse is het rekenen met differenties en de bijbehorende Δ-symboliek.

Daarna wordt er een verband gelegd tussen differenties en partiële sommen, zoals dat officieel heet: een discreet voorproefje op het differentiëren en integreren. En net als bij de continue analyse is een differentieformule veel gemakkelijker dan een somformule. Gelukkig leidt een formule van het eerste type tot een van het tweede type.

Zo leert

$$\underset{x=n}{\overset{n+1}{\Delta}} r^x = r^{n+1} - r^n = (r - 1)r^n$$

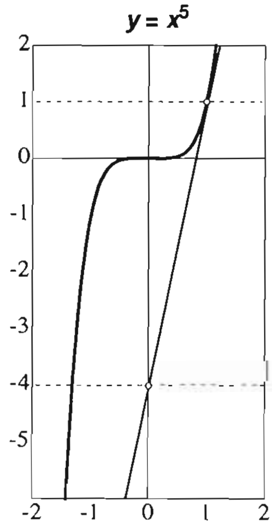
ons met een klein beetje moeite opnieuw de somformule van de meetkundige rij te begrijpen.

Sommen van rekenkundige rijen en van de rij van kwadraten komen ter sprake en die laatste speelt een rol bij het op Archimedische wijze bepalen van de oppervlakte onder de grafiek van $y = x^2$. In feite geeft dit een eerste kennismaking met onder- en bovensommen. Overigens gebruikte Archimedes bij de bepaling van de oppervlakte van een paraboolsegment juist de somformule voor de meetkundige rij, maar dit terzijde.

Het verband met de kinematica wordt in een hoofdstukje met de titel 'Van snelheid naar afstand: vallen en opstaan' belicht. Dat de oppervlakte onder een *v,t*-diagram kan worden opgevat als de afgelegde weg is iets, waar men in de natuurkundeboeken soms wat lichtvaardig mee

omgaat (Streefland, 1981). Via onder- of bovensommen en een intuïtief limietproces kan veel worden duidelijk gemaakt.
Het omgekeerde probleem 'hoe lees ik in een s,t-diagram momentane snelheden af?' leidt op natuurlijke wijze tot het begrip raaklijn. Ook hiervan wordt de meetkundige kant belicht en ook hiervoor gaan we terug naar de Oudheid. Griekse wiskundigen van zo'n 300 voor Chr. wordt wel de volgende definitie toegeschreven:
de raaklijn in een punt P van een kromme lijn is een lijn zodanig dat er in de ruimte tussen de kromme lijn en de raaklijn geen andere lijn meer past.

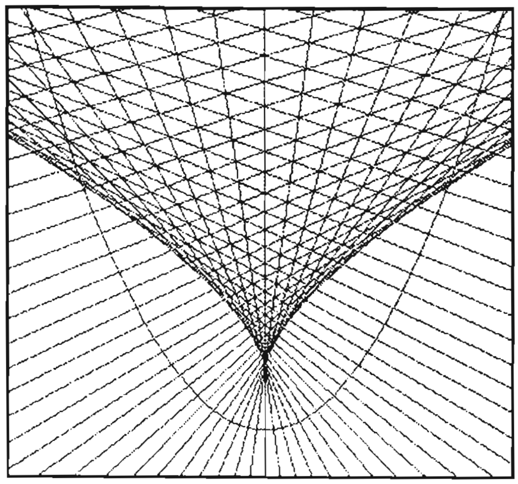
Dat geeft stof tot nadenken en maakt duidelijk waarom er bijvoorbeeld in de top van een Gotisch venster niet gesproken kan worden van dé raaklijn. Een leuke praktische manier om op redelijk nauwkeurige wijze een raaklijn aan een gegeven kromme te tekenen, is te vinden in Roels (Roels, 1994).
Zet een spiegeltje loodrecht op het vlak van tekening en draai het om een punt van de kromme totdat je de kromme vloeiend ziet doorlopen in de spiegel. Trek een lijn langs de spiegelrand (dat is dan een normaal van de kromme) en de loodlijn hierop in het betreffende punt is de raaklijn.
Uitvoerig wordt stilgestaan bij wat in de tekst *de raaklijneigenschap van de kromme* $y = x^n$ genoemd wordt, een eigenschap die zegt dat de raaklijn in een willekeurig punt (zolang dat maar niet de oorsprong is) aan de kromme de *y-as* snijdt in een punt dat $n - 1$ keer zo ver afligt van de *x*-as als het punt zelf.



Zo krijgt de bekende formule;

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=p} = np^{n-1}$$

wat meer reliëf.
Het boekje eindigt met een hoofdstuk over de normalen van onder andere de parabool $y = x^2$ en dat geeft dit mooie plaatje:



Impressies uit de klas

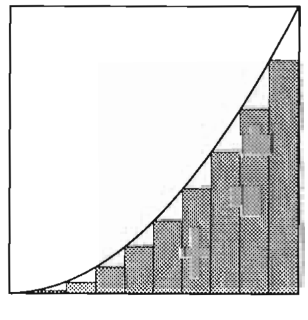
De volgende opgaven geven een indruk van de manier waarop een en ander in de les verwezenlijkt is. In hoofdstuk 3 'Verschil in groei' staat de volgende opgave:

10. Bestudeer de differentietabel van $y = x^3$.
De regelmaat in het groeipatroon is hier iets moeilijker waar te nemen.
a. Toch valt er iets te ontdekken. Wat?
b. Toon met algebra aan dat geldt:

$$\overset{k+1}{\underset{k}{\Delta}} x^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

In hoofdstuk 5 'Kwadratuur' wordt hierop teruggekomen. De probleemstelling luidt in het kort:

Hieronder staat de grafiek van $y = 0.1x^2$ *op het tekenvenster met afmetingen [0,10] bij [0,10]. Het gebied ingesloten door de grafiek en de x-as noemen we A. De vraag is, hoe groot de oppervlakte van A ongeveer is in verhouding tot de oppervlakte 100 van het hele vierkant.*



Vervolgens wordt de oppervlakte van A benaderd met onder- en bovensommen. Dat leidt tot de vraag, hoe je de som van kwadraten zou kunnen berekenen. Door terug te vallen op hoofdstuk 3 ontstaat de volgende formule, gevolgd door twee opgaven:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}\cdot(n+1)^3$$

7. *Van de drie sigmavormen in het linkerlid zijn de tweede en de derde eenvoudig uit te drukken in n.*
   a. *Ga na dat de tweede som gelijk is aan* $\frac{1}{2}n(n+1)$ *en de derde aan* $\frac{1}{3}n(n+1)$.
   b. *Hieruit kun je nu een formule voor* $\sum_{k=0}^{n} k^2$ *afleiden. Welke formule krijg je?*
   c. *Archimedes gebruikte deze formule:*

   $$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \tfrac{1}{3}(2n+1)(1+2+\dots+n)$$

   Controleer of dit op hetzelfde neerkomt.

8. *Ga na met de formule van Archimedes dat de ondersom en de bovensom van A bij een strookbreedte van 0.1 respectievelijk gelijk zijn aan 32.835 en 33.835.*

Hoe verloopt zoiets nu in de experimenteerklassen? Het project verkeert natuurlijk nog in een pril stadium. De leerlingen en hun docenten moeten aan verschillende zaken tegelijk wennen: het gebruik van de grafische rekenmachine, nieuwe vakinhouden en een andere stijl van presentatie van die inhoud. Dat leidt af en toe tot wat gemopper van de kant van de leerlingen, maar gelukkig is dat van korte duur.

Leerling: Wij zijn maar proefkonijnen!
Observator: En hoe is dat?
Leerling: Ik vind het wel vaag allemaal, ik weet niet wat ik moet doen.
Ander: Ja, soms heb ik een tijdje gerekend en dan weet ik niet meer wat ik heb uitgerekend.
Observator: Je bent nu een paar weken met dit pakketje bezig. Gaat het in de loop van de tijd beter?
Leerling: Ja, dat eigenlijk wel.

Laten we eens kijken hoe de leerlingen met bovenstaande opgaven aan het werk zijn geweest.

Bij opgave 10 vinden de leerlingen vraag a. maar onduidelijk. De docent heeft met de overhead-versie van de grafische rekenmachine een tabel gemaakt. De functie Y_1 is gedefinieerd door $Y_1(X) = X\hat{}3$, en voor Y_2 geldt: $Y_2(X) = Y_1(X+1) - Y_1(X)$. De tabel ziet er zo uit:

X	Y1	Y2
0	0	1
1	1	7
2	8	19
3	27	37
4	64	61
5	125	91
6	216	127

Y2=Y1(X+1)−Y1(X)

De leerlingen valt niets op. Dan krijgt iemand een idee: 'Kijk eens naar de verschillen van Y_2!'. Dat geeft de volgende tabel, en die vormt de sleutel tot het patroon.

X	Y2	Y3
0	1	6
1	7	12
2	19	18
3	37	24
4	61	30
5	91	36
6	127	42

Y3=Y2(X+1)−Y2(X)

De mogelijkheid van de Ti-82 om tabellen te maken, blijkt in het algemeen vaak van pas te komen.

Een week later zijn de leerlingen bij opgave 7. De onderdelen a. en b. leveren moeilijkheden op die we nu buiten beschouwing laten. Bij c. vraagt de docent hoeveel leerlingen dit onderdeel zelf konden. Dat zijn er maar enkelen. De docent gebruikt het resultaat van onderdeel b. en schrijft op het bord:

$$\tfrac{1}{3}(n+1)^3 - \tfrac{1}{2}n(n+1) - \tfrac{1}{3}(n+1) = \tfrac{1}{3}(2n+1)(1+2+\dots+n)$$

Docent: Dit is geen vergelijking, de vraag is of het voor alle *n* klopt.
Hij zet een vraagteken door het =-teken.
Docent: Wie weet de eerste stap?
Leerling: Vul een getal voor *n* in.
Docent: Welk?
Leerling: 10.
Docent: En dan klopt 't, en voor $n = 100$?
Leerling: Dan ook!
Docent: Ja, maar dat is niet vanzelfsprekend, bijvoorbeeld $x^2=100$ klopt wel voor 10, maar niet voor 100.
Leerling: Als je de ene formule bij de andere invult...
Ander: $1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$.
Dat doet de docent. Aan de rechterkant staat nu:

$$\tfrac{1}{3}(2n+1)\tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Docent: En nu?
Leerling: Wegstrepen, $n(n+1)/2$.
Docent: Nee, dat kan niet.
Leerling: Of naar de andere kant.
Ander: Buiten haakjes halen.
Ander: Aftrekken, dan moet er 0 uitkomen.
De docent doet het laatste.
Leerling: Buiten haakjes!
Docent: Wat?
Leerling: $n+1$
Docent: Let goed op. Het is niet zo gemakkelijk als ik dacht.
Leerling: ... maar samen komen we er wel uit.
Ander: ... maar op het proefwerk moet ik het alleen doen.
De docent brengt $(n+1)$ buiten haakjes.
Docent: De vraag is of er 0 uitkomt.

Hij werkt binnen de haken alles uit, streept weg, en er blijft niets meer over.

Leerling: Best geinig als je er zelf uitkomt.

Ander: Best wel strak!

Aardig in dit klassegesprek is de aandacht voor het verschil tussen een vergelijking en een gelijkheid, waar de docent in het begin op wijst. Verder is opvallend dat de leerlingen met veel belangstelling meedenken. Ze vinden het moeilijk, maar dat lijkt hen ook uit te dagen.

Tenslotte worden de bevindingen in opgave 8 toegepast. De docent bespreekt de opgave met de klas op de volgende manier. Eerst wordt afgeleid dat de ondersom gelijk is aan

$$\frac{1}{10000}\sum_{k=0}^{99} k^2.$$

Docent: Moet die bovengrens geen 100 zijn?

Leerling: Nee, je bent bij 0 begonnen.

Dan wordt de formule toegepast. Dit geeft de uitdrukking

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdot 10^{-4},$$

waarbij het invullen van $n = 99$ de ondersom geeft en $n = 100$ de bovensom. De uitkomsten zijn 32.835 en 33.835. Als dat gebeurd is, merkt de observator op dat die twee getallen wel veel op elkaar lijken: er is maar één cijfer verschillend. Na enig nadenken blijkt dat logisch te zijn: het verschil tussen de ondersom en de bovensom is immers gelijk aan de oppervlakte van het laatste balkje van de bovensom, en die is $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot 10^2$, en dat is 1.

Deze observatie geeft een beeld van de manier waarop de samenhang tussen reeksen en oppervlakte vorm krijgt. Tevens ziet u hoe het voorbeeld aanleiding is voor het ingaan op de fout die bij het benaderen is gemaakt.

Besluit

Zoals gezegd, het was behoorlijk wennen voor alle betrokkenen, ook die van het ontwikkelteam. Natuurlijk zal zo'n eerste leerlingentekst op tal van punten sterk kunnen worden verbeterd en zullen zekere aanloopproblemen kunnen worden gereduceerd. Anderzijds moet zo'n tekst ook weer niet te glad worden en de problemen verdoezelen. En voor de toekomst moet het dan ook nog een beetje 'self-made-proof' worden. Kortom, we zijn er nog lang niet.

Wat als een echte cultuuromslag werd ervaren door de leerlingen, is dat ze voortdurend stevig moesten nadenken. De meesten blijken hier gelukkig wel toe bereid en er wordt vaak geconcentreerder gewerkt dan we gewend waren bij de 'oude' wiskunde B, waarbij maar al te vaak werd overgeschakeld op de automatische piloot. En als er dan eentje zucht: ''t is moeilijk, maar 't is wel echt wiskunde', dan geeft dat toch hoop.

Het werk met de grafische rekenmachine gaat van een leien dakje in deze groepen. Ons idee om nu eens niet een op de machine gericht practicum vooraf te geven, maar de instructies te integreren in de nieuwe leerstof, blijkt goed te voldoen. Wat wel zorgen baart, is het gebrek aan algebraïsch zelfvertrouwen. Dat een leerling niet automatisch $(k+1)^3$ kan ontwikkelen, is op zichzelf niet erg. Maar hij moet wel hebben geleerd hoe zich hier uit te redden, wetend dat hij $(k+1)$ maal $(k+1)$ maal $(k+1)$ moet uitvoeren, en daar niet van terugschrikken. Ook ontbreekt flexibiliteit op dit punt: dat je in dit geval het beste af bent met 'onder-elkaar-vermenigvuldigen' lijkt niet bekend. En nu praat ik maar even niet over het vooraf 'zien' dat de uitkomst van de derde-graad in k moet zijn, dat je je antwoord kunt controleren door slimme getallen in te vullen, dat die controle afdoende is als je dat voor vier 'onafhankelijke' gevallen hebt gedaan, enzovoort. Ook zou de grafische rekenmachine hier een rol kunnen spelen (grafische controle). Dit soort attitudes, daar zal zeker ook in het algemene deel aan moeten worden gewerkt. Over vijf jaar heeft iedere leerling wellicht een computeralgebrapakket bij de hand, maar dan nóg of misschien beter: maar juist dán!

Noten

[1] Het PROFI-team bestaat uit Michiel Doorman, Paul Drijvers, Aad Goddijn, Dédé de Haan, André Holleman, Martin Kindt (projectleider), Wolfgang Reuter en Heleen Verhage.

[2] De resonansgroep voor de wiskunde VWO N&T bestaat uit: J. v.d. Craats, W. Kleijne, M.P. Kollenveld, J. van Lint (voorzitter), J.A. van Maanen, D. Siersma, J.H.A. de Smit, R. Tijdeman en A. Verweij.
De resonansgroep voor de trajectenboeken HAVO en VWO bestaat uit: R. Bloem, J.J. Breeman, W. Kleijne, D. Kok, C. Lagerwaard, M. Sjamaar (voorzitter), A. van Streun, S.L. de Valk, N.C. Verhoef, A. Witte en P. van der Zwaart.

Literatuur

Vakontwikkelgroep Wiskunde: *Examenprogramma's HAVO en VWO Wiskunde, tweede concept.* oktober 1995.

Rapport studiecommissie Wiskunde B. oktober 1994

Young, H.D. (1970). *Mechanica en Thermodynamica.* Prisma Technica, Spectrum, Utrecht.

Streefland, L. (1981). Zoals eenvoudig valt in te zien... *Nieuwe Wiskrant, 1* (proefnummer), pp. 3-7.

Roels, J. (1994). Spiegeltje, spiegeltje op papier, geef de raaklijn nu vlug hier. *Uitwiskeling, 10* (2), pp. 21-24.