De wortels van de algebra

Voordracht gehouden op de NWD – Bronnen en oefenmateriaal

J.P. Hogendijk
Vakgroep Wiskunde, Universiteit Utrecht

Samenvatting

Dit artikel bevat bronnenmateriaal en vertalingen van gedeelten van twee Babylonische kleitabletten uit de periode 2000-1500 voor Christus, met algebraïsche problemen. De eerste tekst geeft een stelsel van twee vergelijkingen met een oplosmethode. Wij kunnen hierin onze wortelformule voor de kwadratische vergelijking herkennen. Het tweede tablet (dat wil zeggen het gedeelte daarvan wat hier vertaald is) bevat een serie moeilijke oefenopgaven.
Daarna vertalen we een klein deel van het leerboek over algebra van al-Khwārizmī (ca. 830 na Chr.). Deze geeft niet alleen een oplosmethode voor de diverse typen kwadratische vergelijkingen, maar ook een plaatje om de oplosmethode te motiveren. (Omdat er alleen met positieve coëfficienten gewerkt werd, onderscheidde hij verschillende typen, zoals $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, enzovoorts.)
In de vertalingen is gestreefd naar letterlijkheid, om de lezer een idee te geven van de sfeer van de Babylonische en Arabische algebra. We gebruiken daarom geen moderne notaties zoals x, y, ax^2 en dergelijke die pas in of na de Renaissance ontwikkeld zijn.
Bij het materiaal worden moderne interpretaties gegeven, en ook oefeningen ter verdere verwerking.

Inleiding

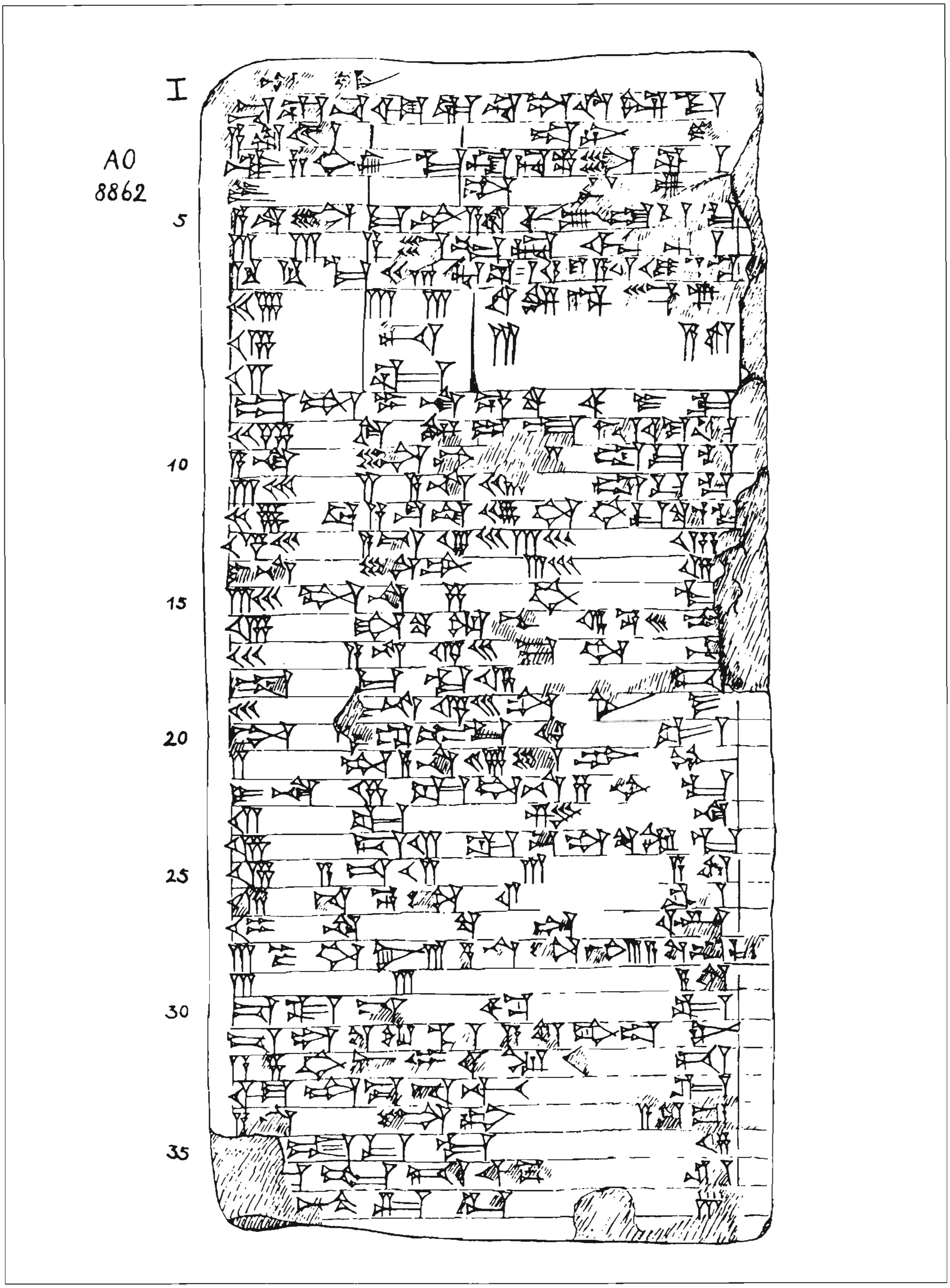
In de periode voor 2000 voor Christus ontwikkelde zich in het tweestromenland (Irak) een hoogontwikkelde wiskunde. De twee belangrijkste resultaten hiervan waren het sexagesimale positiesysteem voor het noteren van (positieve) gehele getallen en breuken, en de oplossing van de kwadratische vergelijking.
Vanaf het midden van de negentiende eeuw (na Chr.) zijn honderdduizenden kleitabletten uit deze periode opgegraven in Irak en aangrenzende gebieden. Een klein aantal van deze tabletten is wiskundig van aard. In de jaren 1920-1930 zijn deze tabletten ontcijferd. De volgende vertalingen zijn gebaseerd op de Duitse vertalingen in het werk *Mathematische Keilschrift-Texte* van O. Neugebauer (*MKT*). We geven hier een korte inleiding over de Babylonische sexagesimale notatie, omdat de lezer daarmee zelf de getallen op de tabletten kan terugvinden en hiermee het contact met de bronnen kan vergroten.
Voor het noteren van de getallen 1 tot en met 59 gebruikten de Babylonische schrijvers twee tekens, te weten een verticale spijker (hier aangegeven met het symbool |) met waarde 1, en een winkelhaak (hier aangegeven met <) met waarde 10. Zo werd 23 genoteerd als << |||. Bij meer dan 3 spijkers werden de spijkers boven elkaar gezet en meer dan 3 winkelhaken werden gegroepeerd. Aan de hand van de gereproduceerde tabletten in dit artikel kan de lezer zelf nagaan hoe dit werd gedaan.

Opgave 1
Om verwarring tussen regelnummers en getallen in de tablet te vermijden, geven we de regelnummers klein en boven de regel.
Vind in de tablet op de volgende pagina in het brede gedeelte tussen de regels ^{7} en ^{8} de volgende getallen in spijkerschrift: 27, 15, 12.
Lees de getallen aan het begin (de linkerkant) van regels no. ^{12}, ^{16}, ^{17}, ^{23}, ^{24}, ^{25}.

Voor grotere getallen werd een positiesysteem gebruikt. Voorbeeld: het getal $743 = 12 \times 60 + 23$ werd door de Babyloniëërs geschreven als het getal voor 12, soms gevolgd door een kleine spatie, en het getal voor 23 (dus < || << |||). Het getal $76943 = 21 \times 60^2 + 22 \times 60 + 23$ werd geschreven als << | << || << |||.

Opgave 2
Lees nu de getallen op het tablet aan de linkerkant van regels ^{6} (de spatie is vrij breed), ^{11}, ^{13}.

Helaas was er in de Oudbabylonische tijd geen teken voor de nul (dit werd pas duizend jaar later, circa 500 voor Chr. door de Babylonische astronomen ingevoerd). Daarom is in spijkerschrift $60 = 1 \times 60 + 0 \times 1$ op zichzelf niet te onderscheiden van 1, en ook niet van $3600 = 60^2$. Alleen uit de context kan blijken wat precies wordt bedoeld!



Tekening van het Babylonisch kleitablet no. AO 8862. Dit tablet wordt bewaard in het Louvre in Parijs.

Hetzelfde systeem werd voor breuken gebruikt. Bijvoorbeeld: $\frac{1}{2}$ (= $\frac{30}{60}$) werd genoteerd als <<< (het teken voor 30).
$\frac{1}{8}$ wordt genoteerd als ||||||| <<< (want $\frac{1}{8} = \frac{7}{60} + \frac{30}{3600}$).

Breuken zoals $\frac{1}{19}$ gaan niet op deze manier, men zei dan 'het negentiende (deel)'. Er is geen scheidingsteken tussen het gehele deel en het breukdeel. Dus zou het getal <<< ook 30 kunnen betekenen. De context maakt vaak duidelijk wat bedoeld wordt. Zo staat in regel no. 16 van het tablet: < ||||| heeft <<< als kwadraatwortel. Deze twee getallen kun je daarom niet als 15 en 30 lezen, maar wel als $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$. In vertalingen gebruiken we een notatie die aansluit bij het spijkerschrift, maar waarbij de onduidelijkheid (door het ontbreken van de 0 en het scheidingsteken) wordt weggenomen. We gebruiken daarbij een komma om de verschillende sexagesimalen te scheiden, een puntkomma als scheidingsteken tussen geheel deel en breukdeel en we schrijven wel nullen.
Voorbeelden: 3601 wordt 1,0,1. $\frac{1}{8}$ wordt 0;7,30. Nota bene: de nullen, komma's en puntkomma's staan dus niet in de tekst.

Opgave 3
Op het tablet staat aan het eind van regel 13 een getal dat als 3,30;15 kan worden geïnterpreteerd (het produkt van 14;30 aan het begin van die regel met zichzelf). Zoek dit en laat zien waar het scheidingsteken moet staan.

De tekst van het tablet

Het afgebeelde tablet is een rechthoekig blok met vier beschreven kanten, waarvan er één hier gereproduceerd en vertaald is, op basis van de Duitse vertaling in Neugebauer's *MKT*, p. 113. Het is tablet no. AO 8862 uit het Louvre in Parijs. De tekening is van Neugebauer, ontleend aan *MKT* deel 2-3. Het tablet bevat de oplossing van een 'kwadratische vergelijking'.
Eén regel in de tekst op het tablet komt overeen met één regel vertaling. De regelnummers in de vertaling zijn klein gezet. Passages in haken {} zijn onleesbaar op de tablet, maar door Neugebauer gereconstrueerd.

Vertaling van het tablet
1 Lengte, breedte. Lengte en breedte heb ik vermenigvuldigd en zo
2 de oppervlakte gemaakt,
3 wat de lengte over de breedte
4 uitsteekt
5 heb ik bij de oppervlakte opgeteld en
6 (er komt) 3,3. Verder, lengte en breedte
7 opgeteld (is) 27. Wat zijn de lengte en de breedte?

27	3,3	de sommen	
15	lengte	3	oppervlakte
12	breedte		

8 Jij bij je methode
9 27, de som van lengte en breedte
10 optellen, er komt
11 3,30. Nu 2 bij 27 optellen, x + y = 27.
12 (er komt) 29. De helft van 29 afbreken
13 14;30 maal 14;30 (is) 3,30;15
14 Van 3,30;15
15 aftrekken 3,30
16 0;15 is het verschil. 0;15 heeft 0;30 als kwadraat {wortel}
17 nu 0;30 bij de eerste 14;30
18 optellen, er komt 15 als lengte.
19 0;30 van de tweede 14;30
20 aftrekken, er komt 14 als breedte.
21 2 die je bij 27 opgeteld hebt
22 van 14, de breedte, aftrekken,
23 12 is de uiteindelijke breedte.
24 15, de lengte en 12, de breedte heb ik vermenigvuldigd.
25 15 maal 12 is 3,0 de oppervlakte.
26 15 lengte over 12 breedte,
27 wat steekt het uit?
28 het steekt 3 uit.
29 Deze 3 bij 3,0 de oppervlakte optellen,
30 3,3 is het resultaat.

Interpretatie van deze tekst
We schrijven x voor de lengte, y voor de breedte. De oppervlakte is dan xy. De tekst beschrijft het stelsel vergelijkingen

$$xy + (x - y) = (3,3 = 3 \times 60 + 3 =)\ 183, \quad x + y = 27.$$

De oplossing is gebaseerd op het idee $x + y = 27$ op te tellen bij $xy + (x - y) = 183$, dit leidt tot een nieuw stelsel

$$xy + 2x = (3,30 =)\ 210, \quad x + y = 27.$$

Als we een nieuwe variabele $y' = y + 2$ invoeren, krijgen we

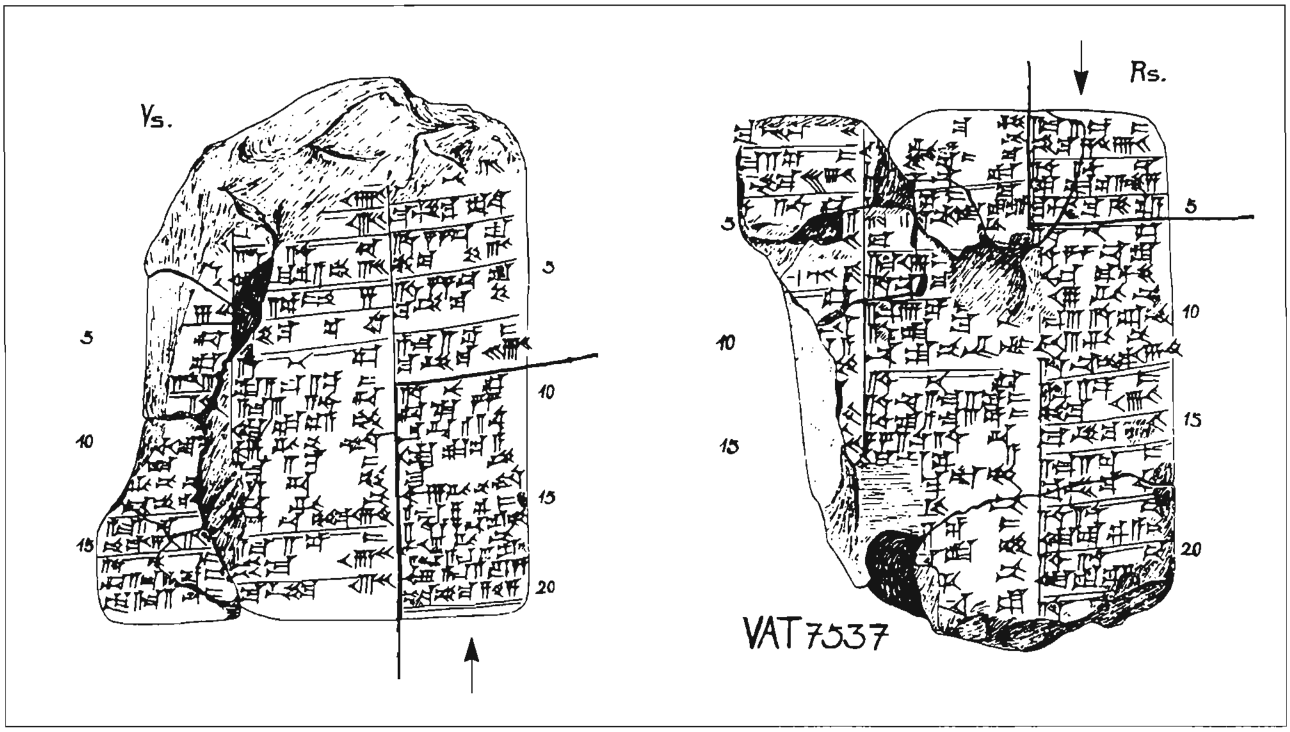
$$xy' = 210, \quad x + y' = 2 + 27 = 29.$$

Dit stelsel

$$xy' = 210, \quad x + y' = 29$$

werd met een standaardmethode opgelost (zie de tekst, regels 12-20). Hieruit kreeg men een lengte $x = 15$, en een breedte $y' = 14$. Als oplossing van het oorspronkelijke probleem krijgen we $y = y' - 2 = 12$.
Tot slot wordt de oplossing gecontroleerd (regels 24-30).

Opgave 4
Laat zien met welke stappen de tekst het stelsel $x + y' = p$, $xy' = q$ oplost. (We schrijven p en q in plaats van 29 en 210.) Ga na dat de methode equivalent is met de wortelformule voor de kwadratische vergelijking die we krijgen door één van de onbekenden (bijvoorbeeld x) te elimineren. (Er zijn bij de wortelformule twee wortels; de tweede wortel is y.)



Tekening van het tablet no. 7537. Dit tablet wordt bewaard in het Vaticaan.

Een tablet met oefenopgaven

We vertalen nu gedeelten van twee kolommetjes van een tablet, dat slechts zeven centimeter lang is. Op deze kleine ruimte werden zeer ingewikkelde problemen gesteld. De tablet wordt bewaard in het Vaticaan onder nummer 7537. We vertalen alleen de aangeduide gedeelten van de voorkant (Vorseite) en de achterkant (Rückseite). De tekening is ontleend aan Neugebauer, *MKT*, deel 2-3, Tafel 48; voor een foto zie Tafel 23.

Vertaling
De vertaling van de tablet, op basis van Neugebauer (*MKT*, deel 1, pp. 470-471; het gedeelte D-E) luidt:

(Voorkant (Vs.), de rechter kolom, regel 9-20)

9 Het oppervlak (is) 1 (eše).
10 Lengte (en) breedte opgeteld
11 De helft ... < plus datgene wat de lengte >
12 over de breedte uitsteekt
13 afgetrokken.
14 Het 7-e deel daarvan gekwadrateerd
15 Met 4 heb je vermenigvuldigd
16 Het oppervlak (d.i. kwadraat) van de som van lengte, breedte (hierbij) opgeteld,
17 Het 13-e deel daarvan (genomen)
18 De lengte heb je met 3 vermenigvuldigd
19 en met 2 de breedte, (dit bij elkaar) opgeteld
20 gekwadrateerd, en (samen is dit) 4,45,0.

(Achterzijde (Rs.), rechter kolom)

1 Met 2 heb je vermenigvuldigd
2 opgeteld, en het is 4,48,20.
3 Het oppervlak van wat de lengte
4 over de breedte uitsteekt, opgeteld is 5,0
5 Afgetrokken en dan steekt het er 1,40 boven uit.

Interpretatie
Voorzijde, kolom 3, regels 9-20: De eenheid waarin de lengtes en breedtes gerekend worden is de el (circa 50 cm). 1 eše = 600 vierkante el.
Regel 9: Schrijf de lengte x, de breedte y. Deze twee grootheden voldoen aan twee vergelijkingen, waarvan de eerste steeds dezelfde is, namelijk $xy = 1$ eše = 600.

De tweede vergelijking is in Regel 10 - 20:

$$(3x+2y)^2 + \tfrac{1}{13}\left(4\left(\tfrac{1}{7}\left((x+y) - 1\tfrac{1}{2}(x-y)\right)\right)^2 + (x+y)^2\right)$$

= 4,45,0 (= 17100)

Opgave 5
Los dit stelsel vergelijkingen op.

In regel 1-2 hebben we de volgende variant:

$$(3x+2y)^2 + 2\cdot\tfrac{1}{13}\left(4\left(\tfrac{1}{7}\left((x+y) - 1\tfrac{1}{2}(x-y)\right)\right)^2 + (x+y)^2\right)$$

= 4,48,20 (= 17300)

Opgave 6
Los ook dit stelsel vergelijkingen op. Wat valt op?

In regel 3-4 hebben we

$$(x-y)^2 + \tfrac{1}{13}(4(\tfrac{1}{7}((x+y) - 1\tfrac{1}{2}(x-y)))^2 + (x+y)^2)$$

$= 5{,}0\ (= 300)$

en in regel 5

$$\tfrac{1}{13}(4(\tfrac{1}{7}((x+y) - 1\tfrac{1}{2}(x-y)))^2 + (x+y)^2) - (x-y)^2$$

$= 1{,}40\ (= 100)$

Opgave 7
Raad de oplossingen van deze vergelijkingen en verifieer het antwoord.

(Dit was natuurlijk van te voren bekend. Het is daarom waarschijnlijk dat de opgaven bedoeld zijn als oefenopgaven, om de oplosmethodes in te oefenen.)
De tekst gaat nu verder met een nieuwe opgave:

6 Het oppervlak is 1 (eše).
7 De oppervlakte (d.i. het kwadraat) van de som (van) lengte (en) breedte
8 Hiervan een oppervlakte van 1 (eše) afgetrokken
9 Het 19-e (deel hiervan nemen)
10 Met 3 de oppervlakte (d.i. het kwadraat van de) breedte vermenigvuldigd en opgeteld
11 Het 13-e deel daarvan (d.w.z. van dit totaal)
12 de oppervlakte (d.w.z. het kwadraat) van de lengte toegevoegd, en er komt 16,40 uit.

Opgave 8
In deze tekst wordt weer een stelsel vergelijkingen gegeven dat lijkt op het bovenstaande. Welk stelsel is dit precies? (1 eše = 600; 16,40 = 1000). Los het stelsel op. Wat valt er op?

Net zoals hiervoor is deze nieuwe opgave het begin van een serie opgaven. Steeds moet een stelsel vergelijkingen worden opgelost waarvan de eerste vergelijking $xy = 600$ is en de tweede een variatie op de vergelijking in de regels 6-12. De eerste van deze variaties is:

13 Met 2 heb je vermenigvuldigd,
14 opgeteld, en er komt 18,20 uit.

Opgave 9
Welke is precies de tweede vergelijking die hier bedoeld wordt?

In de volgende regel is een sexagesimaal (dat wil zeggen een getal tussen de 1 en de 59) onleesbaar (aangegeven met [...]):

15 Afgetrokken, en er komt [...], 20 uit.

Opgave 10
Welke sexagesimaal zou dit geweest zijn?

Opgave 11
Interpreteer nu ook de volgende regels en vul de ontbrekende sexagesimaal aan:

16 Met 2 heb je vermenigvuldigd
17 Afgetrokken, en er komt 11, [...] uit.

Al-Khwārizmī's leerboek over Algebra

De oorspronkelijke titel van dit boek is Kitāb fī'l-jabr wa'-muqābala, *Verhandeling over restauratie en confrontatie.*
Muḥammad ibn Mūsā Al-Khwārizmī was afkomstig uit de stad Khwārizm (tegenwoordig Khiwa, ten zuiden van het Aral-meer) en werkte in Bagdad tijdens de regering van kalief al-Ma^cmūn (813-833). Dit was de periode waarin kennis uit diverse culturen door de jonge cultuur van de Islam werd geassimileerd en waarin het Arabisch zich ontwikkelde tot taal van de wetenschap. Al-Khwārizmī stelt zich in zijn boek ten doel bestaande kennis over algebra te systematiseren. Zijn boek is echt een leerboek, met uitgebreide rekenvoorbeelden (waarvan we hier wegens ruimtegebrek maar een heel klein beetje zullen behandelen). De vergelijkingen zijn minder ingewikkeld dan die in het tweede Babylonische kleitablet dat in dit artikel vertaald is. Uit de Babylonische oudheid is ons geen enkele leertekst over algebra bekend.
Het boek van Al-Khwārizmī is in een paar middeleeuws Arabische handschriften bewaard gebleven. Het is in de twaalfde eeuw in het Latijn vertaald en heeft grote invloed gehad op de algebra in Europa. De onderstaande fragmenten zijn vertaald op basis van de editie uit 1831 van Rosen (zie de bibliografie). Verklarende opmerkingen bij de tekst staan in de voetnoten, en tussen de fragmenten in vierkante haken [ ].

Fragmenten uit het leerboek van Al-Khwārizmī
...De liefde voor cultuur en de wens om met mensen van cultuur[1] in contact te komen... hebben mij ertoe aangezet een kort boek te schrijven over het rekenen met 'restauratie en confrontatie', dat subtiele en prachtige rekenmethoden bevat, die de mensen nodig hebben[2] in het erfrecht, bij erfenissen, het verdelen van dingen, rechtszaken, in de handel, en bij alle transacties die te maken hebben met het opmeten van landerijen, het graven van kanalen, en meetkunde, en andere takken en branches. Dit bied ik (de lezer) aan met een goede bedoeling, en in de hoop dat de mensen van cultuur mij als beloning de gunst willen verlenen voor mij de zegeningen van God de Allerhoogste af te smeken... [Rosen, Ar. p. 2, vert. p. 3-4]

...Ik heb gevonden dat de getallen die nodig zijn in het re-

kenen met 'restauratie [al-jabr] en confrontatie [al-muqābala]' van drie typen zijn, namelijk wortels, kapitalen en losse getallen, die niet gerelateerd zijn aan wortels en kapitalen. Een wortel is alles wat met zichzelf vermenigvuldigd wordt, dit kan één zijn, of een groter getal, of een kleinere breuk (modern: x). Een kapitaal is dat wat ontstaat door vermenigvuldiging van een wortel met zichzelf [modern: x^2]. Een los getal is elk getal dat aangeduid wordt zonder verband met wortel of kapitaal.
Deze drie typen kunnen gelijk zijn aan elkaar, zoals wanneer je zegt: kapitalen zijn gelijk aan wortels; of wortels zijn gelijk aan een getal; of kapitalen zijn gelijk aan een getal. [Rosen, Ar. p.3, vert. p.5-6]

... [hij behandelt eerst deze drie eenvoudige gevallen, modern: $ax^2 = bx$, $bx = c$, $ax^2 = c$.]

Ik heb gevonden dat deze drie typen, namelijk wortels, kapitalen en getallen, gecombineerd kunnen worden, zodat er drie gecombineerde soorten ontstaan, namelijk: kapitalen en (= plus) wortels zijn gelijk aan een getal[3], of kapitalen en een getal zijn gelijk aan wortels[4], of wortels en een getal zijn gelijk aan kapitalen.[5] [Rosen, Ar. p.5, vert. p.8]

... [al-Khwārizmī wijdt nu aan elk van deze drie typen een 'hoofdstuk'. We vertalen één van deze hoofdstukken.]

Kapitalen plus getal is gelijk aan wortels, dit is wanneer je zegt één kapitaal plus een aantal van één en twintig dirham is gelijk aan tien van zijn wortels.[6] Dit betekent: wat is het kapitaal zodat als je er één en twintig dirham aan toevoegt, de uitkomst tien wortels van dit kapitaal is?
De methode hiervoor is dat je de (dat wil zeggen het aantal) wortels halveert, dat is vijf, dan vermenigvuldig je dat met zichzelf, dat is vijf en twintig. Trek daar de één en twintig van af, waarvan je gezegd hebt dat ze bij het kapitaal moesten, er blijft vier over. Neem de wortel daarvan, dat is twee. Trek deze van de helft van de (dat wil zeggen het aantal) wortels af, er blijft drie over. Dat is de wortel van het kapitaal wat je wilt, dus het kapitaal is negen. Of als je wilt, tel de wortel bij de helft van (het aantal) wortels op, dat is zeven, en dat is de wortel van het kapitaal dat je wilt, dus het kapitaal is negen en veertig.

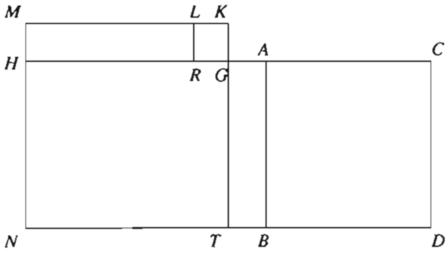
Opgave 12
Ga na dat deze methode met onze wortelformule overeenkomt.

Als je een vraag van dit type tegenkomt, probeer dan eerst of het gaat met optellen, als dat niet zo is[7], gaat het met aftrekken altijd. Dit hoofdstuk werkt met optellen én aftrekken allebei, en dat is niet zo bij de andere twee hoofdstukken[8] waarin je de (dat wil zeggen het aantal) wortels moet halveren.

Weet dat als je in dit hoofdstuk de wortels halveert en dit met zichzelf vermenigvuldigt en het resultaat is minder dan de dirhams die bij het kapitaal worden opgeteld, dan is het probleem onmogelijk.[9] Als het resultaat gelijk is aan het aantal dirhams, dan is de wortel van het kapitaal gelijk aan de helft van de wortels, zonder aftrekking en optelling. Alles waar twee kapitalen of meer of minder in voorkomen[10], moet je terugvoeren naar één kapitaal zoals ik je in het eerste hoofdstuk heb uitgelegd. [Rosen Ar. pp. 7-8, vert. pp. 11-12]
...
Voor elk van deze drie hoofdstukken[11] heb ik een figuur gemaakt waarmee de reden voor het halveren van de wortels duidelijk wordt gemaakt. [Rosen, Ar. p. 8, vert. p. 13]
...
Wat betreft één kapitaal en één en twintig dirham is gelijk aan tien van zijn wortels: we maken het kapitaal een vierkant met onbekende zijde, namelijk vierkant AD.[12]

Dan voegen we er een parallelogram aan toe,[13] met breedte gelijk aan één van de zijden van het oppervlak AD, namelijk zijde HN, en het oppervlak zelf is HB. Dan wordt de lengte van de twee oppervlakken samen zijde CH. We weten dat de lengte ervan tien is, want de zijde van elk vierkant vermenigvuldigd met één is de wortel van dat oppervlak,[14] en met twee (vermenigvuldigd) is het twee maal de wortel van dat oppervlak.[15] Dus wanneer gezegd is: kapitaal plus één en twintig is gelijk aan tien wortels ervan, dan weten we dat de lengte van zijde HC tien is, omdat zijde CD de wortel van het kapitaal is. Toen hebben we zijde CH in twee helften verdeeld in punt G. Dan is duidelijk dat lijn CG gelijk is aan lijn GH, en het is duidelijk dat lijn GT gelijk is aan lijn CD. Toen hebben we in het verlengde van lijn GT een stuk toegevoegd gelijk aan het overschot van CG over GT, zodat het oppervlak een vierkant wordt. Dus is lijn TK gelijk geworden aan lijn KM, en er is een vierkant oppervlak ontstaan met gelijke zijden en hoeken, namelijk oppervlak MT.
Het was ons duidelijk dat lijn TK vijf is, en de zijden (van het vierkant) zijn daaraan gelijk, dus het oppervlak (van het vierkant) is vijf en twintig. Dat is het resultaat van de vermenigvuldiging van de helft van de wortels met zichzelf, en dat is vijf keer vijf, dat is vijf en twintig.
Maar het was ons al duidelijk dat vlak HB de één en twintig is die we bij het kapitaal hebben opgeteld. Dus hebben we van het oppervlak HB met lijn TK, die één van de zijden van oppervlak MT is, (iets afgehaald), met rest oppervlak TA.
Daarna hebben van lijn KM lijn KL afgenomen, gelijk aan lijn GK. Dan is duidelijk dat lijn TG gelijk is aan lijn ML. Van lijn MK is lijn LK afgehaald, en die is gelijk aan lijn KG. Dus oppervlak MR is gelijk aan oppervlak TA. Dus is duidelijk dat oppervlak HT met oppervlak MR daaraan toegevoegd gelijk is aan oppervlak HB, en dat is één en twintig. Maar oppervlak MT was vijf en twintig. Dus wanneer we van oppervlak MT oppervlak HT en oppervlak MR afhalen, die samen één en twintig zijn, rest ons

een klein oppervlak RK, en dat is het verschil tussen vijf en twintig en één en twintig, dat is vier, en de wortel ervan is lijn RG, die is gelijk aan lijn GA, en dat is twee. Als je die twee van lijn GC, die de helft van het aantal wortels is, aftrekt, blijft lijn AC over, en dat is drie, en dat is de wortel van het eerste kapitaal.
Als je hem aan lijn CG, die de helft van het aantal wortels is, toevoegt, wordt dat zeven, en dat is lijn RC, en dat is de wortel van het grootste van deze kapitalen zodat als je er één en twintig aan toevoegt, dat gelijk wordt aan tien wortels ervan. Dit is de figuur ervan, en dat is wat wij wilden bewijzen. [Rosen, Ar. p. 11-13, vert. p. 16-18]



Opgave 13
Motiveer de formule voor de kleinste wortel x van de vergelijking $x^2 + q = px$ aan de hand van de figuur van al-Khwārizmī ($q = 21$, $p = 10$, $x = AC$). Breid de figuur daarna uit tot een figuur die ook de formule voor de grootste wortel x motiveert. Dit kan bijvoorbeeld door RL naar beide kanten te verlengen en een vierkant te maken met zijden CR, langs zijde RL, en langs het verlengde van DC, en $x = RC$ te stellen.

[Al-Khwārizmī beschrijft daarna voorbeelden en het reduceren van een willekeurige kwadratische vergelijking (waarin negatieve termen mogen voorkomen) tot één van zijn zes standaardvormen met alleen positieve coëfficiënten. Het wegwerken van negatieve termen (als in de omvorming van $x^2 - 4 = 7x$ tot $x^2 = 7x + 4$) noemt hij 'restauratie' (al-jabr, spreek uit: al-dzjabr, in sommige delen van de Arabische wereld uitgesproken als al-gabr). Hiervan is de naam 'algebra' afgeleid.]

Noten

[1] Arabisch: adab
[2] Al-Khwārizmī's leerboek bevat ook hoofdstukken over erfrecht en landmeten, maar hierbij zijn op zijn hoogst lineaire vergelijkingen nodig.
[3] modern: $ax^2 + bx = c$
[4] modern: $ax^2 + c = bx$
[5] modern: $bx + c = ax^2$
[6] $x^2 + 21 = 10x$
[7] Dit is een raadselachtige passage. Misschien was al-Khwārizmī hier niet zo vertrouwd mee, hij geeft namelijk ook geen plaatje voor het geval 'met optellen'. Zie de opgave aan het eind.
[8] Dat wil zeggen: $ax^2 + bx = c$ en $ax^2 = bx + c$.
[9] Dat wil zeggen als $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < c$ dan heeft $x^2 + c = bx$ geen oplossing.
[10] Dat wil zeggen als in de vergelijking $ax^2 + c = bx$ $a \neq 1$.
[11] Dat wil zeggen voor $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$.
[12] In de Griekse en Arabische meetkunde wordt een vierhoek vaak aangegeven met twee diagonaal tegenover elkaar liggende punten, als geen verwarring mogelijk is.
[13] Al-Khwārizmī vergeet hier te vermelden dat dit parallellogram oppervlakte 21 heeft.
[14] Dat wil zeggen het vierkant.
[15] Dat wil zeggen het vierkant.

Literatuur

Opmerkingen staan tussen vierkante haken. De meeste van de genoemde boeken zijn te vinden in de bibliotheek van het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht.

Geschiedenis van de algebra
Scholz, E., Hrsg. (1990). *Geschichte der Algebra. Eine Einführung.* Mannheim-Wien-Zürich, B.I. Wissenschaftsverlag.
Waerden, B.L. van der (1985). *A history of algebra from Al-Khwārizmī to Emmy Noether.* New York etc., Springer.

Babylonische algebra
Neugebauer, O. (1935). MKT = *Mathematische Keilschrift-Texte. Deel 1, Deel 2-3.* Berlijn, Springer. [Bronnen]
Neugebauer, O. & A. Sachs (1945). *Mathematical cuneiform texts.* New Haven, Connecticut, American Oriental Society. [Meer bronnen, onder andere het beroemde Plimpton 322 tablet.]
Waerden, B. L. van der (1950). *Ontwakende wetenschap. Babylonische, Egyptische en Griekse wiskunde.* Groningen, Noordhoff. Historische bibliotheek voor de exacte wetenschappen deel VII. Vertaald in het Engels: B.L. van der Waerden (1961). *Science Awakening I.* New York, Oxford University Press. [Zeer goed toegankelijk. Er is ook een *Erwachende Wissenschaft c.q. Science Awakening deel II,* over geschiedenis van de sterenkunde in de oudheid.]
Neugebauer, O. (1957 of herdruk). *The exact sciences in antiquity.* Providence R.I. , Brown University Press. [paperback, heel goed als inleiding in de bronnen.] [Ook als Dover pocket te koop, circa *f.* 20,-]
Høyrup, Jens (1994). *In measure, number and weight. Studies in mathematics and culture.* Albany, State University of New York Press. ISBN 0-7914-1822-7. [Essay 3 hiervan gaat over de rol van de algebra in de Babylonische cultuur en voor het zelfbeeld van de Babylonische schrijvers.]

Arabische algebra

Berggren, J.L. (1986). *Episodes in the history of mathematics of medieval Islam.* New York etc., Springer Verlag. [Elementair. Met oefeningetjes.]

Juschkewitch, A.P. (1964). *Geschichte der Mathematik im Mittelalter.* Leipzig, Teubner. [Nog steeds het beste overzicht.]

Rebstock, Ulrich (1992). *Rechnen im islamischen Orient. Die literarischen Spuren der praktischen Rechenkunst.* Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft. ISBN 3-534-11317-9.

Rosen, Frederic (ed. and tr.) (1986). *The Algebra of Mohammed ben Musa.* Hildesheim, Olms. Herdruk van de oorspronkelijke uitgave (London 1831).