Meetkunde-onderwijs in achttiende-eeuws Nederland

D. Beckers
Wetenschap en Samenleving, Katholieke Universiteit Nijmegen

Inleiding

Sinds het wiskunde A en B-programma aan de middelbare scholen is ingevoerd, is het laatste restje 'meetkunde oude stijl' uit ons onderwijs verdwenen. Hoofdkenmerk van deze 'meetkunde oude stijl' was het redeneren; lange tijd was dit dè manier om meetkunde op school te bedrijven. De coördinaat-assen zijn pas in de vorige eeuw de klaslokalen binnengeslopen.
In de achttiende eeuw behoorde meetkunde niet tot het standaardpakket dat aan de middelbare school werd gedoceerd. Wiskunde (waaronder ook meetkunde) werd in 1815 een verplicht vak aan de Latijnse scholen. Meetkunde-onderwijs vond in de achttiende eeuw plaats aan twee soorten van instituten: aan de universiteit en aan ingenieursscholen voor de zeevaart of het landmeten. Deze laatste opleidingen waren aan de universiteit verbonden in de vorm van cursussen *Duytsche mathematicque* (in tegenstelling tot de Latijnse colleges). Het was niet abnormaal dat studenten deze Nederlandse meetkundelessen volgden als aanvulling op de Latijnse colleges, die zij zo beter konden begrijpen[1]. Tegen het einde van de achttiende eeuw werden hier en daar ook universitaire colleges meetkunde in het Nederlands gegeven[2].

Meetkunde

Meetkunde betekende in de achttiende eeuw de meetkunde van Euclides. Dat hield onder andere in dat er geen assenstelsel aan te pas kwam. De meetkunde met coördinaten zoals die tegenwoordig wordt onderwezen, heette in de achttiende eeuw de theorie van de *meetkundige plaatsen* of *analytische meetkunde* en behoorde tot de hogere wiskunde. Iedereen die aan de universiteit studeerde, doorliep eerst een propaedeuse waarin ook een testimonium moest worden gehaald voor meetkunde. Daarbij ging het om de eerste zes boeken van Euclides.
De Euclidische meetkunde was axiomatisch van opbouw: op basis van een aantal definities en axioma's werden stellingen geformuleerd. Deze stellingen werden vervolgens bewezen door middel van redeneringen en meetkundige constructies. Getallen kwamen er niet aan te pas. Hoewel het vijfde boek van Euclides de basis van de *cijferkunst* bevatte, zal men er tevergeefs naar getallen zoeken: getallen werden voorgesteld door (de lengte van) lijnstukken.
Een heel opvallend kenmerk van de achttiende-eeuwse meetkunde was dat zij heel dicht bij de praktijk stond. De meetkunde was axiomatisch opgebouwd, maar het woord 'axioma' had een geheel andere betekenis. De meeste achttiende-eeuwse wiskundigen vertaalden 'axioma' met 'algemene grondwaarheid'. De axioma's waren dus geen aannames, maar vertegenwoordigden waarheden die algemeen geaccepteerd waren. Sommige auteurs van meetkundeboeken namen daadwerkelijk de moeite om uit te leggen waarom de axioma's waar moesten zijn[3].

Euclides

Vrijwel alle achttiende-eeuwse meetkundeboeken waren gebaseerd op Euclides. Universitaire docenten gebruikten een Latijnse vertaling. Aan de ingenieursscholen werd een bewerking van de boeken van Euclides gebruikt. Vaak was in zo'n bewerking de structuur van de boeken van Euclides helemaal verdwenen. Dat werd opgevangen door bij iedere stelling te vermelden welke de overeenkomstige propositie in het werk van Euclides was.
De Elementen werd als een bijzonder belangrijk werk beschouwd: het was de basis tot de kennis van de wiskunde. De meetkundeboeken voor het ingenieursonderwijs leken niet echt op het werk van Euclides, maar vrijwel iedere auteur zocht toch aansluiting bij de Griekse wiskundige. Ook toepassingen – waarom het in boeken voor ingenieurs toch vooral ging – werden theoretisch onderbouwd door een verwijzing naar een propositie van Euclides.
Het belang van de boeken van Euclides werd in de achttiende eeuw langzaam ondergraven. Rond 1700 beschouwde men *De Elementen* als het fundament van de wiskunde. Zodoende stond meetkunde op de eerste plaats in ieder curriculum. In de praktijk leerde men weliswaar eerst rekenen[4], maar ook het fundament van de cijferkunst lag – vond men – in het werk van Euclides besloten.

Wanneer in deze periode van weerstand niet goed op dergelijke signalen gereageerd wordt, kan het aanvankelijk met veel enthousiasme gestarte samenwerken in een groepje verworden tot een groepje van vier leerlingen die bij elkaar zitten en verder individueel aan het werk zijn, maar vooral veel kletsen. Dan is het van belang dat je als docent goed weet welke bedoelingen je eigenlijk met deze werkvorm hebt, waarom je het 'anders' wilt en waar de grenzen liggen van wat je nog acceptabel vindt. Wanneer het samenwerken in groepjes van het begin af aan voortdurend ook geëvalueerd en met de klas besproken wordt, is het gemakkelijker deze periode te doorstaan. Vragen die in een klassikale bespreking gesteld moeten worden, zijn dan bijvoorbeeld:

- Wat heeft het samenwerken opgeleverd?
- Waar zitten de knelpunten en hoe kunnen we die overwinnen?
- Is het prettiger om in groepjes aan opdrachten te werken?
- Vind je dat het samenwerken na verloop van tijd beter gaat?

Het gevaar van het niet adequaat reageren op deze weerstand is dat je het opgeeft. Je hebt dan nog niet veel kunnen zien van de positieve leereffecten en de tijdwinst nog niet kunnen boeken, want het samenwerken in groepjes levert pas wat op als het een langere periode gepraktizeerd wordt.

Met dank aan Harold Lammertink, student aan de Hogeschool van Utrecht, die in het kader van zijn afstudeeropdracht onderzocht heeft hoe het invoeren van samenwerkend leren in de klas functioneert binnen de wiskundesectie van een grote scholengemeenschap.

Literatuur

Dekker R. (1991). *Wiskunde leren in kleine heterogene groepen.* Academisch Boeken Centrum, De Lier.

Freudenthal H. (1973) *Mathematics as an educational task.* Reidel, Dordrecht.

Perrenet, J.Chr. (1995). *Leren probleemoplossen in het wiskundeonderwijs: samen of alleen.* Diss. Universiteit van Amsterdam.

Kerkhofs, W.J., A. van Gool en T. van den Bogaart eds. (1985). *Met het oog op... : de leerkracht in de praktijk van het werken met kleine heterogene groepen.* SLO, Enschede.

Wiskunde met PIT

De klapper *Wiskunde met PIT* bevat werkbladen voor leerlingen bij diverse computerprogramma's voor wiskundeonderwijs in de basisvorming. De werkbladen zijn gemaakt in het kader van PIT (*Project Informatie Technologie*). PIT is een samenwerkingsproject tussen het APS, PRINT en het Freudenthal instituut.
Twee jaar lang kwamen wiskundedocenten van de deelnemende scholen regelmatig bij elkaar in verschillende themagroepen. De thema's waren 'Algebra en Statistiek', 'Meetkunde', 'Toetsen' en 'GWA' (Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten).
Er zijn werkbladen gemaakt bij een groot aantal programma's, gegroepeerd rond de thema's:

- Grafieken: VU-grafiek basisvorming
- Meetkunde: Alcor, Doorzien, ECC-Ruimtemeetkunde, Reliëf, Geometrucs
- GWA: Reisplanner ALH en NS
- Statistiek: VU-Stat
- Spreadsheets: WP Works Junior en Koppie-Koppie

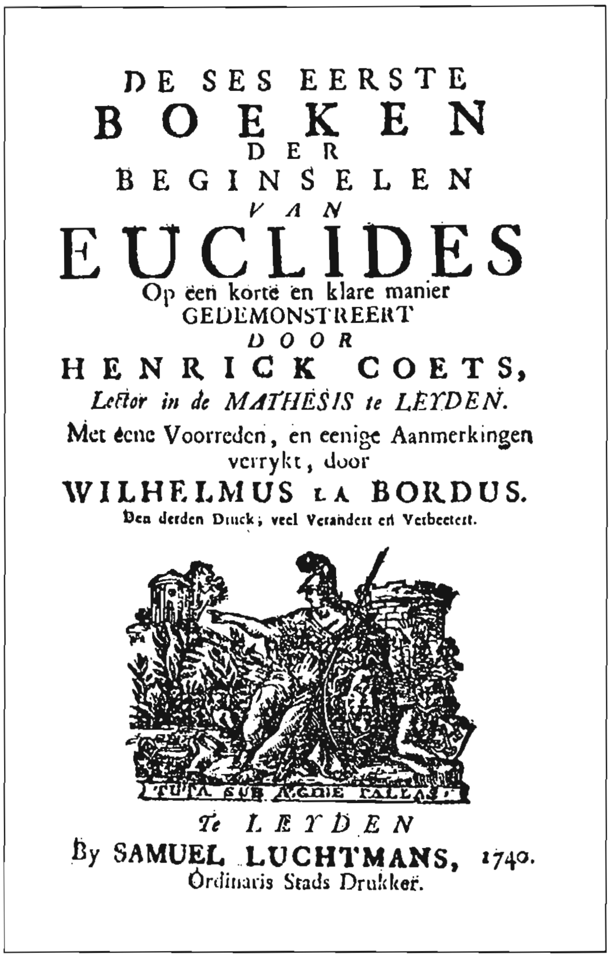
De klapper staat ook op het World Wide Web. Het adres is: http://www.fi.ruu.nl/PITboek/pitboek_1.html
'Wiskunde met PIT' is schriftelijk te bestellen bij het Freudenthal instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht. Bestelnummer: 135, prijs: *f* 35,- . ISBN 90 70786 01 X

Speuren op het Spoor

Hoe kun je in de trein iedereen laten zitten met gebruik van zo weinig mogelijk materieel? Dit wiskundige probleem is in opdracht van de NS onderzocht op het CWI (Centrum voor Wiskunde en Informatica) in Amsterdam. Het CWI is het onderzoeksinstituut van de Stichting Mathematisch Centrum (SMC). In het kader van haar 50-jarig jubileum schrijft de SMC een wedstrijd uit, waarin wordt gevraagd een relatief eenvoudige versie van dit probleem op te lossen, namelijk de optimale inzet van treinstellen op de intercity-lijn Amsterdam-Vlissingen.

De hoofdprijs bedraagt *f* 2 500. Eenzelfde bedrag is beschikbaar voor de beste inzending onder scholieren. De deadline voor inzending is 15 juli 1996.

Een folder met de volledige omschrijving van het probleem en het in te zenden wedstrijdformulier is te krijgen op het volgende adres:
CWI
Jubileumwedstrijd
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam
Tel. 020 - 592 9333
http://www.cwi.nl/Jubileum/Speuren


DE SES EERSTE
BOEKEN
DER
BEGINSELEN
VAN
EUCLIDES
Op een korte en klare manier
GEDEMONSTREERT
DOOR
HENRICK COETS,
Lector in de MATHESIS te LEYDEN.
Met eene Voorreden, en eenige Aanmerkingen
verrykt, door
WILHELMUS LA BORDUS.
Den derden Druck; veel Verandert en Verbeetert.

TUTA SUB AEGIDE PALLAS.

Te LEYDEN
By SAMUEL LUCHTMANS, 1740.
Ordinaris Stads Drukker.

fig. 1 Titelpagina van Hendrik Coets 'De ses eerste boeken der beginselen van Euclides'.

In de loop van de achttiende eeuw sijpelden algebraïsche uitdrukkingen door in de meetkundeboeken. Eerst in de boeken voor het onderwijs aan ingenieurs, later ook voorzichtig in universitaire leerboeken[5]. De algebra werd hier en daar zelfs gebruikt om – aanvankelijk als meetkundig beschouwde – stellingen te bewijzen. Aan het begin van de negentiende eeuw werd de volgorde omgedraaid: eerst werd rekenen onderwezen, dan algebra en tot slot meetkunde[6].

Tegenstelling

Er bestond een grote tegenstelling tussen het meetkundeonderwijs aan de universiteit en dat aan de ingenieursopleidingen. Aan de universiteit werd de meetkunde beoefend in het Latijn door middel van de voordracht van stellingen en bewijzen. In het ingenieursonderwijs gebruikte men een Nederlandstalige handleiding waarin vooral veel opgaven en voorbeelden voorkwamen. Bewijzen en redeneringen waren zeer zeldzaam: meestal werd volstaan met een voorbeeld. Soms werd een plaatje afgebeeld dat gebaseerd was op het Euclidische bewijs. Men volstond echter met een getallenvoorbeeld dat de waarheid van het gestelde aantoonde, maar bovenal de leerling liet zien hoe hij deze stelling in de praktijk kon gebruiken.

Een paar voorbeelden. Stelt u zich een gelijkbenige driehoek voor met de hoek tussen de gelijke lijnstukken als de tophoek. De hoeken op de basis van zo'n gelijkbenige driehoek zijn gelijk. Het bewijs van deze stelling zoals men dat in een achttiende-eeuws meetkundeboekje voor de universiteit van Pybo Steenstra tegenkwam, luidde (in bewerking):

> De hoekdeellijn van de tophoek verdeelt de driehoek in twee driehoeken. Deze beide driehoeken zijn congruent, want zij bestaan uit twee paren even lange lijnstukken (waarvan één gemeenschappelijk) met daartussen een gelijke hoek. In het bijzonder zijn dus de hoeken van deze driehoeken gelijk.

Met deze redenering is tevens bewezen, dat de hoekdeellijn in kwestie ook hoogtelijn en zwaartelijn is. Ook kan men met dit resultaat eenvoudig inzien dat de hoeken van een gelijkzijdige driehoek alledrie gelijk zijn.

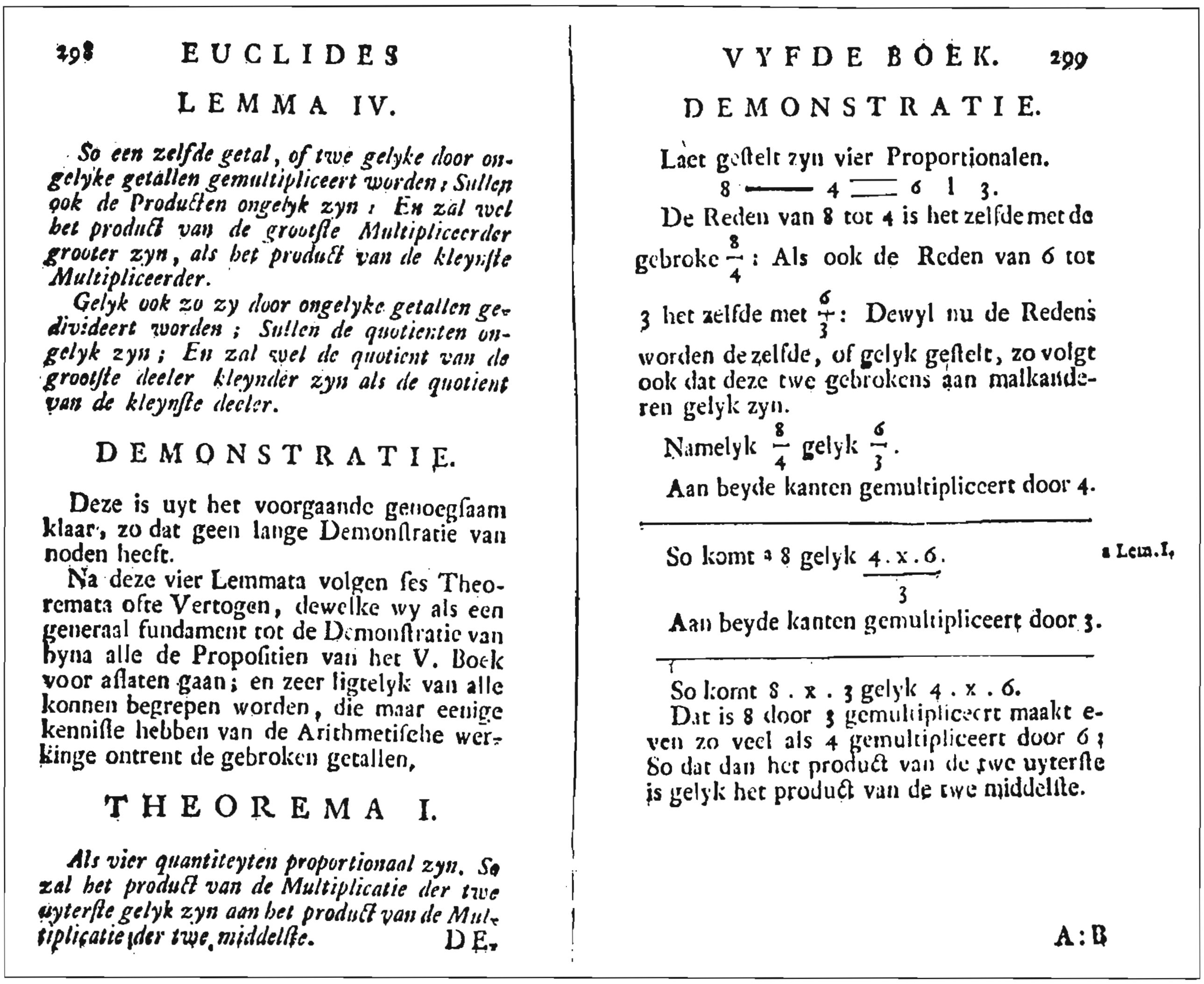
In het boek van Claas Gietermaker voor het ingenieursonderwijs trof men het volgende aan. Het is gebaseerd op de stelling dat de som van de hoeken van een driehoek 180 graden is (eveneens bewerkt):

> wanneer in een rechthoekige driehoek één van de scherpe hoeken gegeven is en men begeert de andere, dan gaat men als volgt te werk. Neem de scherpe hoek en trek die van de rechte hoek af. De rest zal de begeerde hoek zijn.

Voor universitaire studenten streefde men blijkbaar een geheel ander doel na dan voor de ingenieurs in spé. De auteurs van meetkundeboeken in de achttiende eeuw vonden meetkunde belangrijk omdat studenten daarvan beter (helderder) zouden leren denken. Meetkunde werd beschouwd als een perfect voorbeeld van redeneren. De studenten zouden de meetkundige manier van denken meenemen in hun vakgebied en zodoende veel voordeel van de redeneer-meetkunde hebben.
De ingenieurs daarentegen werden niet geacht te redeneren: zij hadden een bepaalde taak uit te voeren en dienden die naar behoren te volbrengen. Daarbij achtte men het niet noodzakelijk dat er werd geredeneerd. Auteurs van boeken voor het ingenieursonderwijs gingen er vanuit dat hun lezers geen redeneer-meetkunde kenden en ook niet hoefden te leren. De boeken waren gebaseerd op praktijkproblemen die moesten worden opgelost. Om tot die oplossing te komen, werd een *regel* (wij zouden tegenwoordig algoritme zeggen) aangeboden, die verder niet werd verklaard.

Verlichting en onderwijs

De Verlichting bracht enige pogingen tot verandering in deze situatie met zich mee. De tweedeling universitair/ingenieursonderwijs was dan ook niet alleen een tweedeling uit praktisch oogpunt. Uiteraard waren de verschil-



298 EUCLIDES

LEMMA IV.

So een zelfde getal, of twe gelyke door ongelyke getallen gemultipliceert worden; Sullen ook de Producten ongelyk zyn; En zal wel het product van de grootste Multipliceerder grooter zyn, als het product van de kleynste Multipliceerder.

Gelyk ook zo zy door ongelyke getallen gedivideert worden; Sullen de quotienten ongelyk zyn; En zal wel de quotient van de grootste deeler kleynder zyn als de quotient van de kleynste deeler.

DEMONSTRATIE.

Deze is uyt het voorgaande genoegsaam klaar, zo dat geen lange Demonstratie van noden heeft.

Na deze vier Lemmata volgen ses Theoremata ofte Vertogen, dewelke wy als een generaal fundament tot de Demonstratie van byna alle de Propositien van het V. Boek voor aflaten gaan; en zeer ligtelyk van alle konnen begrepen worden, die maar eenige kennisse hebben van de Arithmetische werkinge ontrent de gebroken getallen,

THEOREMA I.

Als vier quantiteyten proportionaal zyn, So zal het product van de Multiplicatie der twe uyterste gelyk zyn aan het product van de Multiplicatie der twe middelste. DE.

VYFDE BOEK. 299

DEMONSTRATIE.

Laet gestelt zyn vier Proportionalen.

8 —— 4 —— 6 1 3.

De Reden van 8 tot 4 is het zelfde met de gebroke $\frac{8}{4}$: Als ook de Reden van 6 tot 3 het zelfde met $\frac{6}{3}$: Dewyl nu de Redens worden de zelfde, of gelyk gestelt, zo volgt ook dat deze twe gebrokens aan malkanderen gelyk zyn.

Namelyk $\frac{8}{4}$ gelyk $\frac{6}{3}$.

Aan beyde kanten gemultipliceert door 4.

So komt a 8 gelyk $\frac{4 . x . 6}{3}$. a Lem.I.

Aan beyde kanten gemultipliceert door 3.

So komt 8 . x . 3 gelyk 4 . x . 6.

Dat is 8 door 3 gemultipliceert maakt even zo veel als 4 gemultipliceert door 6; So dat dan het product van de twe uyterste is gelyk het product van de twe middelste.

A:B

fig. 2 Fragment uit het leerboek van Hendrik Coets. Het voorbeeld laat zien hoe uit het vijfde boek van de Elementen van Euclides Theorema I met getallen gedemonstreerd wordt.

lende taken die de studenten te wachten stonden een motivering voor de geschetste verschillen. Er lag echter tevens een klasseverschil aan ten grondslag: de geleerde stand moest leren redeneren, terwijl dat voor ‘gewone’ ingenieurs nodeloos – zelfs ongewenst – was.
Op twee manieren trachtte men de bestaande situatie te veranderen. Ten eerste werd er gepleit voor toelatingsexamens en beter onderwijs, zodat iedereen gelijke kansen zou hebben om tot de universiteit te worden toegelaten. Ten tweede werd er gepopulariseerd: door middel van enige vereenvoudiging werd de heilzame werking (beter leren denken) die van de meetkunde zou uitgaan ook onder ingenieurs verspreid. Dit laatste gebeurde met behulp van boeken die voor geïnteresseerde ingenieurs werden geschreven.

De vereenvoudiging in dit soort boeken werd hoofdzakelijk bereikt door geen bewijzen te leveren, maar de stellingen aannemelijk te maken. De motivering hiervoor was dat de bewijzen nodeloos moeilijk waren om dergelijke *klaarblijkelijke waarheden* aan te tonen[7]. Behalve deze boeken werden er in Nederland geen concrete resultaten inzake onderwijs bereikt.

Didactiek

Aangezien er onderwijs werd verzorgd en er zelfs speciaal voor dit onderwijs boeken werden geschreven, kunnen we gevoeglijk aannemen dat docenten wiskunde nadachten over hoe dit onderwijs het beste kon worden gegeven. Er zijn talloze voorbeelden te noemen van achttiende-eeuwse wiskundigen die blijk gaven van een didactisch bewustzijn. Pybo Steenstra (†1788) liet bijvoorbeeld bewijzen uit het ongerijmde zoveel mogelijk achterwege omdat zijn leerlingen die moeilijk vonden. Hendrik Coets (*1685-†1730) had de bewijzen met lijnstukken in het vijfde boek van Euclides vervangen door voorbeeldjes met getallen omdat zijn leerlingen wel konden rekenen, maar de meetkundige redeneringen niet zo goed konden volgen. Jan Hendrik van Swinden (*1746-

†1823) vond dat studenten eerst zelf moesten proberen een bewijs te vinden en gaf in zijn boek alleen maar aan welke stellingen ze moesten gebruiken om de nieuwe stelling te bewijzen.
Auteurs van meetkundeboeken in de achttiende eeuw hebben hun didactiek nooit expliciet gemaakt: de didactiek van de wiskunde als een zelfstandig aandachtsveld bestond niet. Als docent en als auteur van lesboeken hield men zich er ongetwijfeld mee bezig, maar blijkbaar werd de didactiek als te triviaal beschouwd om aan het papier toe te vertrouwen. Nadere beschouwing van achttiende-eeuwse meetkundeboeken kan enig inzicht verschaffen in de didactische ideeën die men indertijd hanteerde.

De boeken voor het ingenieursonderwijs stonden vol met voorbeelden. Elke *regel* werd met een aantal *exempelen* (voorbeelden) verhelderd. De leerling kon zijn begrip vervolgens toetsen op een aantal *exempelen* waarvan alleen het antwoord was vermeld. De didactische idee lijkt te zijn geweest dat het goede voorbeeld goed deed volgen.
Meetkundeboeken voor universitaire studenten bestonden enkel uit stellingen en bewijzen. Door middel van voordracht leerde de hoogleraar de studenten meetkunde. De studenten zouden door de logica bevangen moeten raken en op die manier niet alleen meetkunde leren, maar zich tevens oefenen in de redeneerkunst.

Slot

Meetkunde-onderwijs bestond in de achttiende eeuw uit twee totaal verschillende takken. Enerzijds was er het universitair onderwijs waar studenten werd geleerd te redeneren. Anderzijds was er het ingenieursonderwijs, waar leerlingen praktische vaardigheden kregen aangeleerd, in de vorm van *regels* van algoritmisch karakter.
Het meetkunde-onderwijs in achttiende-eeuws Nederland speelde aan het hoger onderwijs en lijkt dus ver af te staan van de huidige docent wiskunde aan een middelbare school. De onderwerpen die onderwezen werden, waren echter grotendeels dezelfde als de onderwerpen die in de eerste helft van de negentiende eeuw aan de Latijnse scholen verplicht werden gesteld. Dit was de 'meetkunde oude stijl' die na 1968 grotendeels is verdwenen.
Bovendien ligt in de achttiende eeuw de kiem van de ideeën achter de invoering van wiskunde als (verplicht) vak in het middelbaar onderwijs: de zogenaamde 'propaedeutische functie van de wiskunde'.

Noten

[1] Winter, P.J. van (1988). *Hoger beroepsonderwijs avant-la-lettre*. Amsterdam enz., Noord-Hollandsche Uitgevers Maatschappij.
[2] Swinden, J. H. van. *Grondbeginsels der meetkunst*. Amsterdam, 1790, voorrede.
[3] Bijvoorbeeld Hendrik Coets in zijn *De ses eerste boeken der beginselen van Euclides*. Leiden, 1702, 1724.
[4] Dit blijkt uit het feit dat in veel meetkundeboeken stellingen werden geïllustreerd met een paar getallenvoorbeelden.
[5] Zie de *Ses eerste boeken der beginselen van Euclides* van Hendrik Coets, in de door Willem Labordus herziene editie, Leiden, 1740 en de *Beginselen der meetkonst* van Pybo Steenstra, Amsterdam, 1763.
[6] Beckers, D. 'Jacob de Gelder en de didactiek van de wiskunde'. binnenkort te verschijnen in *Euclides*.
[7] Zie met name *Beginzelen der meetkunst* door A.C. Clairaut, vertaald door A.B. Strabbe. Amsterdam, 1760.

Workshop 'Propaedeutische wiskunde' in de negentiende eeuw

De Vakgroep Wiskunde van de KUN en het landelijk werkcontact GMFW organiseren op 26, 27 en 28 juni 1996 een Workshop *'Propaedeutische wiskunde' in de negentiende eeuw* aan de Katholieke Universiteit Nijmegen. Voorzitter is prof. dr. A.C.M. van Rooij (voorzitter vakgroep wiskunde KUN) en er zijn bijdragen van onder andere prof. dr. Gert Schubring (Universität Bielefeld) en drs. Harm Jan Smid (TU Delft).

Korte inhoud
Met de opzet van het Polytechnisch onderwijs rond 1800 kreeg de wiskunde een nieuwe maatschappelijke functie te vervullen: voorbereiding op het Ingenieursonderwijs door de vorming van het verstand. Daarnaast deed de overheid in toenemende mate een beroep op wiskundigen, vaak ook met problemen die niet wiskundig van aard waren. De mening van de wiskundige werd in dezen blijkbaar op prijs gesteld. Deze nieuwe functie die de wiskunde te vervullen kreeg, noemen we 'Propaedeutische wiskunde', naar de functie die de wiskunde in het hoger technisch onderwijs vervulde.
's Ochtends zullen publieke voordrachten worden verzorgd; 's middags zijn werkbesprekingen gepland.

Kosten: *f* 75,- per deelnemer (excl. verblijfkosten), korting voor studenten.
Inlichtingen:
Danny Beckers / Gerard Alberts, ift W&S, Th.v.A. 3.01 23, Postbus 9108, 6500 HK Nijmegen, tel. 024-36159856, e-mail: d.beckers@bw.kun.nl