De diepte van het platte vlak

Ideeën en ervaringen uit het PROFI-project

A.J. Goddijn
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

In het hart van de wiskunde

In de vorige aflevering van de *Nieuwe Wiskrant* heeft u kunnen lezen over 'Analyse in profiel'. In de algemene uiteenzetting over het PROFI-project werd gewezen op de 60 uur Vlakke Meetkunde die in het profiel Natuur & Techniek zijn gepland. De auteurs noemen daarbij het belang van *redeneren en bewijzen*, geven aan dat er verbanden moeten zijn tussen de analyse en de meetkunde en gaan vervolgens diep in op een analyse-hoofdstuk dat nota bene 'Oppervlakte en Raaklijn' heet. Duidelijker kan het niet: de meetkunde komt sterk terug in de VWO-top, vooral in het meest wiskundig getinte profiel. Tenminste, als het aan het PROFI-projectteam ligt, maar dat heeft dan nog wel het een en ander uit te leggen. Vandaar dit tweede artikel over het PROFI-project.
In de aanloop naar de herprofilering van het VWO is met name uit de universitaire wereld erop aangedrongen de VWO-leerlingen die echt 'exact' kiezen, al tijdens het VWO in diepgaand contact te brengen met het kloppend hart van de wiskunde: het redeneren en bewijzen zelf, en dat bij voorkeur in de paradijstuin van de Vlakke Meetkunde. Het PROFI-team had overigens deze aanbeveling nauwelijks nodig, want het maakt zelf namelijk precies diezelfde keuze. In het genoemde artikel over de analyse heeft u al kunnen waarnemen dat gekozen wordt voor fundamenteel inzicht in waar het bij de analyse om gaat, eventueel zelfs ten koste van omvang van de stof. Bij de meetkunde wordt dezelfde keuze gemaakt: een confrontatie met de methodiek van de meetkunde, met de structuur ervan, met het bewijzen en redeneren zelf, dat is waar het om gaat. Dat daarbij met prachtige wiskunde gewerkt wordt, dat er ook wel eens een toepassing wordt besproken, dat spreekt vanzelf, maar de zuivere wiskunde is bij dit onderdeel van het programma echt de leidraad. Het moet in dit verband maar even duidelijk gezegd: PROFI is een project van het Freudenthal instituut en dat wordt nogal eens aangewreven dat het alle wiskunde vanuit toepassingen wil benaderen en als dat niet lukt, links wil laten liggen. Het beeld kan onder meer ontstaan zijn omdat het Freudenthal instituut zich nog nauwelijks heeft kunnen bezighouden met wiskunde B. Juist is het niet.
Dit artikel kan verder gelezen worden als een beginselverklaring op dit gebied die geïllustreerd is met voorbeelden van het belangrijkste in het project: het werk van leerlingen.

Terug naar Euclides?

Laten we eerst eens een ruime tweeduizend jaar terugkijken: naar de *Elementen* van Euclides. Daarin werd praktisch de gehele toen bekende wiskunde gepresenteerd in de vorm van een systematische opbouw volgens de regels van de logica uit enkele basisaannamen, de axioma's. Op de Nationale Wiskunde Dagen, februari 1996, heeft prof. S.J. Doorman nog eens betoogd wat het belang van die werkwijze is en dat de werkwijze ontstond in een periode waarin je je gelijk moest krijgen door argumentatie. Je kunt ook zeggen: in een periode waarin het idee 'democratie' ontstond. Als argumenteren van belang is, moeten argumenten getoetst kunnen worden, op hun waarde beoordeeld kunnen worden. Een filosofische stroming, die van de sofisten, is hier van belang. De sofisten keken bijzonder kritisch naar het hele redeneerproces, bijvoorbeeld door allerlei redeneringen te bedenken, die perfect logisch leken, maar tot bizarre resultaten leidden, de zogenaamde paradoxen. Om te voorkomen dat de wiskunde op een dergelijke manier kwetsbaar zou worden, werd zo'n systematiek als we nu kennen van de *Elementen* ontwikkeld. Doorman wees erop dat de werkwijze van Euclides ook buiten de wiskunde van groot belang werd: in de rechtspraak, in zulke uiteenlopende gebieden als bijvoorbeeld de theologie, de muziekwetenschap en andere exacte wetenschappen. Kortom: we zijn hier bezig met één van de wortels van de westerse beschaving.
Doorman noemde nog drie belangrijke doelen van de methode, ik voorzie ze van enig commentaar.
Als eerste: het *onthoudbaar* maken van kennis. Omdat we intussen van een orale traditie via de boekdrukkunst naar een digitale toe groeien, lijkt dit argument van minder direct belang te worden. Maar toch: systematisch geordende kennis is makkelijker te onthouden dan ongeordende kennis, zo simpel ligt dat. Wat voor ons zeker van belang blijft, is het verband tussen systematiek van de

stof en de didactiek. In de tweeduizend jaar na Euclides viel de didactische opbouw van het meetkundeonderwijs praktisch samen met de wiskundige opbouw van het meetkundig systeem. Met andere woorden, wat stofindeling en stijl betreft, bleef de oude meester de ooit uitgezette koers bepalen. Eigenlijk pas in deze eeuw wordt daarvan afgeweken en ook in het PROFI-project gebeurt dat. We komen hier straks uitvoerig op terug.

Als tweede aspect noemde Doorman het *systematisch produceren* van kennis. De hoop was: als je het redeneerproces maar voldoende precies in kaart brengt, kun je als het ware op een domme manier bijna mechanisch nieuwe kennis – bijvoorbeeld een nieuwe stelling – genereren. Eigenlijk wordt dit pas van belang in onze eeuw, en ook dan nog maar vrij beperkt. Ook hier een didactische noot: we willen allemaal dat onze leerlingen enigszins zelfstandig met de stof kunnen omgaan, maar over de geschiktheid van de traditionele vlakke meetkunde verschillen de meningen hier, zacht gezegd. Was dit niet het deel van de wiskunde waar je je als leerling kon vergapen aan de prachtig gekozen hulplijn, die je zelf nooit vond? Kortom: we moeten iets doen aan het leren vìnden van redeneringen, bewijzen en dergelijke. Anders gaat het niet goed.

Het derde aspect is misschien het belangrijkste: het *zeker stellen* van kennis. Als je uitgangspunten waar zijn en je redenering correct is, dan moet toch ook je resultaat waar zijn? Met name het waar zijn van de uitgangspunten en de 'juiste' keuze ervan is in de eeuwen na Euclides nogal een punt van discussie geweest. Zo moest met name de zelfevidentie van de axioma's wegens de ontdekking van logisch correcte meetkundige systemen die wezenlijk strijdig zijn met die van Euclides, verlaten worden. In het begin van deze eeuw (ver)werd de meetkunde hierdoor tot een puur logisch systeem, los van 'meetkundige objecten' en zeker los van welke werkelijkheid dan ook. Zekerheid was logische zekerheid, intuïtie mocht geen enkele rol meer spelen. Maar wiskunde is een vak met een levende geschiedenis waar accenten steeds anders gelegd worden. Je kunt grofweg zeggen dat de aandacht voor het meetkundige object op zich weer groeit, het onderzoek naar de logische fundamenten van de meetkunde staat daarbij niet meer zo centraal. Wel centraal staat de belangstelling voor de samenhang tussen vroeger gescheiden gebieden van de meetkunde. Het hoeft geen betoog dat we binnen het VWO beide doen: de meetkundig intuïtie dient ontwikkeld te worden, maar ook de logisch gebaseerde kritiek op wat 'alleen maar schijn is'. Elke VWO-leerling mag een beetje sofist worden, dat is nooit weg.

Met deze inleiding en terugblik schets ik impliciet natuurlijk een hoog ideaal. Als ontwerpgroep moet je dat ook hebben, samen met een gezonde dosis scepsis en relativeringsvermogen. We denken wel dat we in een veel gunstiger positie zitten dan ooit tevoren om iets van de hoge idealen te bereiken:

- de leerlingen komen binnen met een bredere intuïtieve basis van de meetkunde, zoals die nu in de onderbouw wordt gerealiseerd;
- de leerlingen waar het om gaat, zijn wat ouder dan de leerlingen waar vroeger de kenmerken van congruentie, de hoeken, bogen en onvindbare hulplijnen op af werden gevuurd; iets ouder, en vooral rijper om wat beschouwender met wiskunde te kunnen omgaan.

Na deze lange inleiding komen enkele belangrijke vragen over de meetkunde in het PROFI-project op:

- wordt het in het VWO weer meetkunde volgens het boek van Euclides, zoals dat al een aantal keren in het verleden is gelukt en mislukt?
- komen er geen nieuwe, moderne onderwerpen bij?
- wat is globaal de gekozen ordening van onderwerpen?
- hoe pakt het allemaal uit in de klas?

Verderop in dit artikel wordt via voorbeelden eerst indirect op deze vragen ingegaan en in de samenvatting aan het eind meer expliciet.

Maar daarvóór moet kort iets gezegd worden over de inhouden zelf.

De eerste helft

Intussen is de eerste helft van de 60 uur Vlakke Meetkunde voor de experimenteerklassen alweer voorbij; gebruikt is een nieuw pakket: *Afstanden, grenzen en gebiedsindelingen*. Dit zijn de hoofdstuktitels:

- Hoofdstuk 1: *Voronoi-diagrammen*
- Hoofdstuk 2: *Isoafstandslijnen*
- Hoofdstuk 3: *Convexiteit.*

Voronoi-diagrammen zijn uitvoerig aan bod geweest in de *Nieuwe Wiskrant* (Goddijn, 1995). Ik ga er nu niet op in, ook om niet de indruk te wekken dat Voronoi-diagrammen HET onderwerp van de PROFI-meetkunde zijn. Ze bleken in de experimenteeropzet een goede instap tot de vlakke meetkunde; geven ook de mogelijkheid een belangrijke moderne toepassing van deze meetkunde aan bod te laten komen. Ze zijn geen doel op zich. Maar dat was na de vorige paragraaf van dit artikel ook al duidelijk.

Isoafstandslijnen hebben dezelfde rol: een meetkundeonderwerp waarbinnen de traditionele vlakke meetkunde fraai functioneert. Ik verwijs nu naar het artikel 'Vlakke Meetkunde, waardevol voor wiskunde B?' (Kindt, 1995). En ook naar een artikel van J. van Maanen 'Over het verdelen van aangeslibd land. Een brugklasproject' (Van Maanen, 1984). In een historische context wordt daar met deellijnen en middelloodlijnen gewerkt.

Het gaat om gebieden in het platte vlak en speciale lijnen eromheen. Deze lijnen geven de punten aan die een vaste afstand tot het gebied hebben.

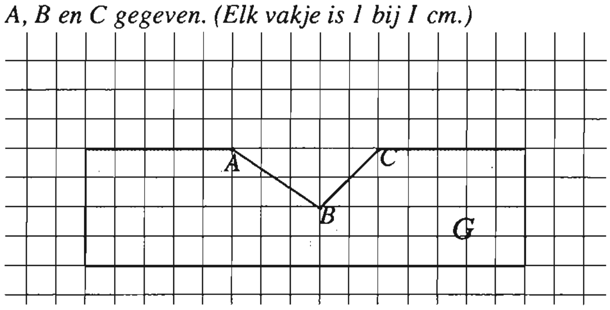
Convexiteit is een eigenschap van figuren, die bij Euclides niet voorkomt (bij Archimedes overigens wel). Bij de eerste twee hoofdstukken van het pakket duikt die eigenschap op natuurlijke wijze op. Het is een kenmerk van

algemene figuren, dus niet alleen van figuren die opgebouwd zijn uit stukken cirkel en stukken rechte lijn. Daarmee is het weer een stukje modernere wiskunde, vooral ook omdat hier het verband met de analyse zo sterk is. Een verruiming van het begrip raaklijn (namelijk 'steunlijn') speelt in dit hoofdstuk een belangrijke rol. Aan het eind van dit artikel zijn een paar voorbeelden opgenomen en hopelijk wordt dan duidelijk dat rond dit begrip tamelijk verfijnd redeneren mogelijk, nuttig en noodzakelijk is.
Op allerlei details van het pakket en het gebruik van de computer erbij ga ik nu niet in. Volgend schooljaar zal een herziene versie van het pakket verkrijgbaar zijn.

Toetsvraag isoafstandslijnen

De eerste twee voorbeelden gaan over antwoorden bij een toetsvraag bij hoofdstuk 2. De vraag is ontworpen door Ramiro Wanga van het Calscollege, onze experimenteerschool in Nieuwegein.

In deze figuur zie je een gebied G. Verder zijn de punten A, B en C gegeven. (Elk vakje is 1 bij 1 cm.)



a. *Teken de isoafstandslijnen op 1, 4, en 8 cm van G (voor zover mogelijk).*

De isoafstandslijnen vertonen een knik. Afhankelijk van de afstand tot het gebied G zijn er drie soorten knikken, namelijk:

kniksoort I kniksoort II kniksoort III

b. *Bepaal de plek waar de overgang van kniksoort I naar kniksoort II plaatsvindt.*
c. *Bepaal ook de plek waar de overgang van kniksoort II naar kniksoort III plaatsvindt.*
d. *De knikpunten van soort I liggen op de deellijn van hoek ABC. De knikken van soort III liggen ook op een (bijzondere) lijn. Welke lijn?*

In figuur 1 zijn méér isoafstandslijnen getekend dan gevraagd is, dit ter oriëntatie voor de lezer.
De verzameling knikken is goed te zien. Bij de snijpunten van de toegevoegde lijnen (loodlijnen op *AB* in *A* en op *BC* in *C*) bevinden zich de overgangen tussen de kniksoorten. Kniksoort III treedt op bij het bovenste stuk van de middelloodlijn van *AC*, kniksoort I op de deellijn vanuit *B*, waar die de loodlijn vanuit *C* op *BC* nog niet gepasseerd is en kniksoort II op het tussenliggende stuk. Dat stuk is geen stuk rechte lijn, zoals we later nog zullen zien.

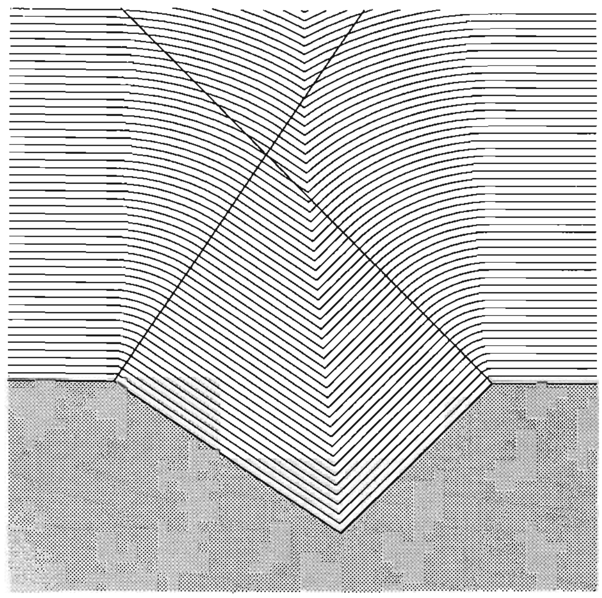


fig. 1 Isoafstandslijnen in de buurt van de inham

Nu de oplossing van Kaspar, weer alleen het relevante detail bij de inham (zie figuur 2).

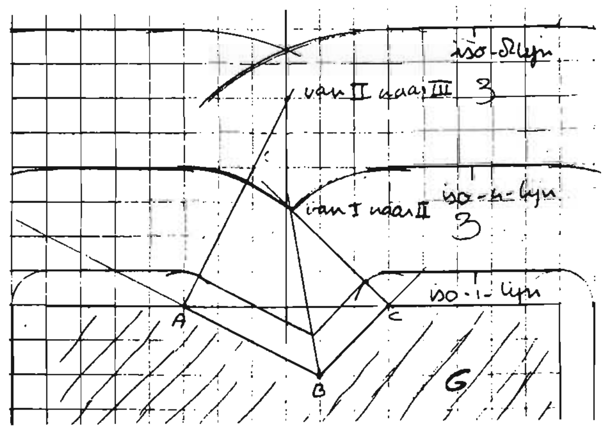


fig. 2 Tekening van Kaspar

Alles wat van belang is, komt in de tekening voor: de juiste cirkelbogen en lijnstukken, de deellijn uit *B* en de middelloodlijn van *AC*. Dergelijke eenvoudige elementen uit de vlakke meetkunde worden door Kaspar voldoende beheerst om er zelfstandig een vraagstuk mee op te lossen dat in deze vorm nog niet aan de orde is geweest. Uiteraard zijn isoafstandslijnen wel aan de orde geweest, maar de typering van de knikken in dit verband zeker niet. Ik zou zelf nog graag de vraag beantwoord zien (dat werd echter niet gevraagd in de toets) of de iso-4-lijn nu precies de overgang markeert van type I naar type II. Met enige moeite is het antwoord af te lezen uit figuur 1: nee. Aan Kaspar's werk is te zien dat de toetsvraag niet te moeilijk was, zoals verwacht. Maar voor dit artikel is het instructiever ook naar een verkeerde oplossing te kijken: die van Bart.

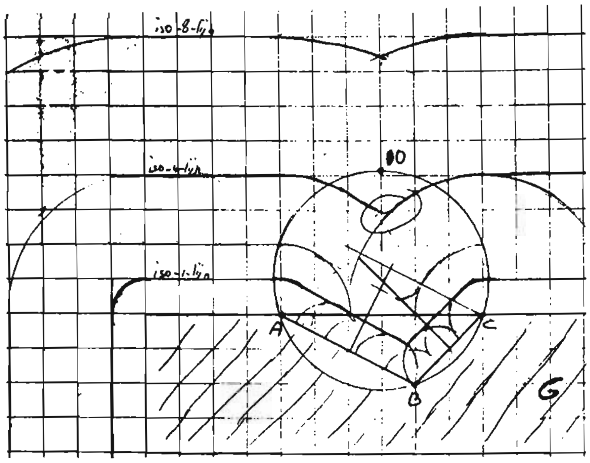


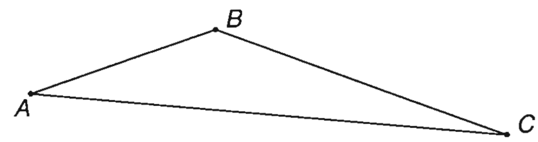
fig. 3 Tekening van Bart

Bij Bart heeft de iso-4-lijn helemaal geen knik. Schetsmatig is iets toegevoegd aan de exact gevonden cirkelbogen en lijnen. De consequentie waarmee Kaspar werkt – geheel in stijl van Euclides – is door Bart nog niet bereikt. Toch zijn er interessante andere elementen in Bart's tekening te vinden: al die kleine cirkelbogen met middelpunt op de rand van G en de cirkel door A, B en C, die zichtbaar gevonden is door de middelloodlijnen van AB en BC te snijden. Dat alles behoort tot wat in de eerste twee hoofdstukken aan bod is geweest. De kleine cirkels met straal 1 bepalen met z'n allen een omhullende lijn, dat is juist de iso-1-lijn. Hier wordt dus nauwgezet het geleerde in praktijk gebracht, maar er wordt, althans bij de iso-4-lijn, niet consequent mee gewerkt en consequent kunnen vasthouden aan gegevens is een voorwaarde voor het kunnen bedrijven van de bewijsmeetkunde waar we naartoe willen.
In deze paragraaf zijn even middelloodlijn en deellijn in beeld geweest. Het zijn meetkundige plaatsen: verzamelingen van punten met een bepaalde karakteristiek. In het tweede deel Vlakke Meetkunde, dat nu in ontwikkeling is, wordt meer met dit begrip gedaan en wordt de algemene bewijstechniek die ermee samenhangt expliciet aan de orde gesteld. Nu is die bewijstechniek al even aangekaart.

Op zoek naar het fundament

Wie de *Elementen* van Euclides wel eens in handen heeft gehad, weet wat de structuur van het boek is: vanuit vijf axioma's wordt een heel systeem gebouwd. Alleen de axioma's worden als waar aangenomen.
Maar spreken wij met onze leerlingen wel duidelijk genoeg af wat onze basiswaarheden zijn? Eigenlijk hebben we dat nog niet gedaan in het hier besproken pakket. We willen dat ook niet te snel doen en daar zijn redenen voor. Ten eerste stellen we ons op het standpunt dat een totaaldeductieve opbouw vanuit axioma's wel wiskundig juist is, maar didactisch zeker niet de beste weg. Je zou, als je echt deductief wilt werken, namelijk moeten beginnen met het moeilijkste deel van het meetkundig redeneren, namelijk vanuit heel weinig gegevens redeneren naar dingen die je eigenlijk wel weet. Het is aardig hierbij te vermelden dat Euclides zelf in zijn allereerste bewijs de fout in gaat door een aanname te doen die hij echt niet op zijn axioma's kan baseren. En bovendien: dat basisredeneren levert voorlopig niet zoveel rijkdom aan figuren en verbanden op. We starten daarom dus eigenlijk 'middenin' het systeem. Dat geeft waardevolle conflicten met leerlingen en met onze resonansgroep.
Een tweede reden om niet te snel zoiets als axioma's vast te leggen, is: de leerling moet de kans hebben zelf aan dat vastleggingsproces deel te nemen. Daarover gaat het volgende voorbeeld.
In het eerste hoofdstuk werd de driehoeksongelijkheid als volgt opgevoerd:

In onderstaande figuur zijn drie punten en hun verbindingen getekend.

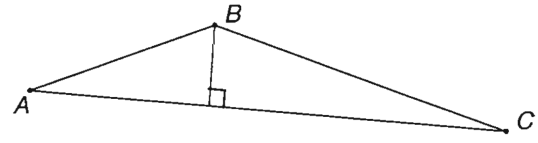


a. *Schrijf d(A,C) bij de juiste zijde in de figuur.*
b. *Ben je het eens met deze ongelijkheid:*

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$$

c. *Vertaal deze ongelijkheid in een Nederlandse zin. Wat betekent deze ongelijkheid?*

Ik ben erop gewezen dat men in de wiskunde niet vraagt: 'Ben je het hiermee eens?' Natuurlijk was het een kleine provocatie. Alleen werkte hij niet op het moment zelf, maar wel in een afsluitende les, enkele weken later dus. Dan is natuurlijk al wat meer over redeneren gesproken.
Een leerling zegt: 'Dat van die driehoeksongelijkheid, dat vind ik vaag. Waarom zou je dat nu wèl aannemen?'
Ik: 'Tja, we moeten ergens beginnen. En als ik iets had genomen waar je de driehoeksongelijkheid uit àfleiden kon, had je óók gezegd: waarom dit aannemen?'
Zo gaat het gesprek nog even heen en weer. Tot ik denk: Waarom ook niet?
'Wat zou jij dan als basis willen nemen, iets wat je zeker weet?'
Die leerling, onmiddellijk: 'Pythagoras, dat is zeker bewezen.'
Ik: 'Probeer dan maar die driehoeksongelijkheid uit Pythagoras af te leiden!'
Tien minuten later moest ik naar deze figuur komen kijken en werd me het bijbehorende bewijs voorgelegd:



Of het mogelijk is Pythagoras te bewijzen zonder van de driehoeksongelijkheid gebruik te maken, die vraag laat ik even liggen. Ik geef het voorbeeld alleen om aan te geven dat het gesprek met de leerling mogelijk was omdat de uitgangspunten niet vooraf geheel vaststonden en juist nog bediscussieerbaar waren. Deze leerling liet zich uitdagen zelf mee te zoeken naar het fundament onder de meetkunde. Hij bewandelt de logische weg naar de onderkant van de piramide.
We zijn hier in goed gezelschap. Aristoteles zegt over het redeneren dat het zoeken naar je uitgangspunten, het naar onderen zoeken in de deductieve piramide, minstens zo belangrijk is als het deduceren zelf. De *Elementen* is het eindprodukt van zo'n denkproces en laat het proces van zoeken niet zien. Precies dat proces willen we juist wèl door de leerlingen laten beleven.

Op zoek naar de grens

In de vorige paragraaf heb ik een leerling ten tonele gevoerd die onder de bodem graaft van wat aangeboden werd. Nu een leerling, Karin, die aan de andere kant werkt: ze probeert veel meer af te leiden dan lijkt te kunnen. Om de zaken in de juiste proporties te zien, begin ik bij dit verslag juist vóór het gesprek met haar.
Tijdens het werk aan hoofdstuk 2 zijn twee jongens bezig met figuur 4.

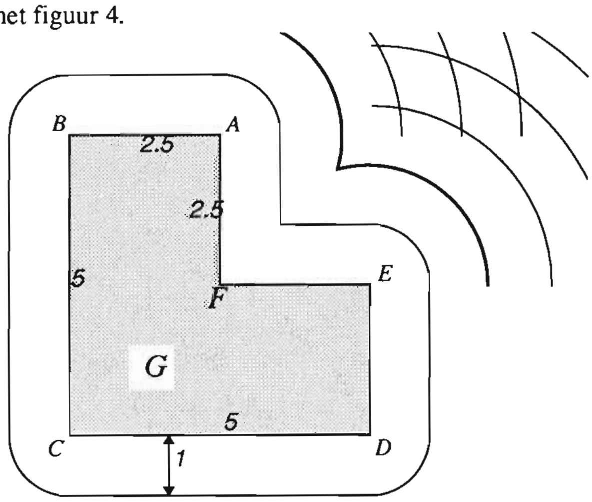


fig. 4 De vette lijn is geen goede isoafstandslijn!

De gemaakte fout is wel karakteristiek voor de problemen in dit hoofdstuk: het is vaak op zich eenvoudig, maar in de grotere situatie worden de eenvoudige elementen snel verkeerd ingepast. Na een kort gesprek wordt echter zonder veel hulp alles verbeterd. Nu blijkt ineens àlles duidelijk. Moeiteloos wordt vastgesteld: *als de afstand kleiner dan 2.5 is, is er een recht stukje (lengte ook bekend). Daarna wordt de knikhoek kleiner. Maar hij blijft. De knikhoek wordt steeds platter, wordt bijna 180°.*
Een mooie stelling, zelfstandig geformuleerd, vooral mooi als je weet dat in veel artikelen over isoafstandslijnen schetsen met veel te gladde isoafstandslijnen staan.

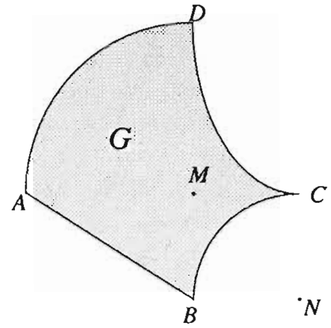


fig. 5 Een lastiger gebied

Terwijl we bezig zijn, komt Karin in de buurt. Ze wacht rustig af tot we klaar zijn, met deze discussie bemoeit ze zich niet. Haar vragen gaan over figuur 5.
Ook hier isoafstandslijnen en met mogelijk knikken.
In het boekje staat onder andere:

De rand van het gebied G bestaat uit een recht deel en drie gebogen delen. AD is een kwartcirkel om M, BC is een kwartcirkel om N.

a. Teken de iso-1 cm-lijn om G. Gebruik waar nodig cirkels om randpunten van G.
b. Teken vóór de kust BC ook de iso-2 cm-lijn en de iso-3 cm-lijn.
c. Vanaf een bepaalde waarde van d krijgt de isoafstandslijn een knik.
Hoe groot is deze afstand d?

Karin heeft allang gezien dat boog *BC* bij kleine afstanden, dat wil zeggen niet verder dan *N*, een glad stuk cirkel oplevert en bij grotere afstanden een knik. Ze wil echter weten hoe het bij het kromme stuk *CD* gaat. We raken aan het schuiven met dubbeltjes, guldens en fietswielen, dat is de aangeleerde techniek van de schuifcirkel en zijn middelpunt. Zo te zien gebeurt er niets knikkerigs bij dubbeltjes, maar wel bij fietswielen. Die kantelen om *D* en stoten dan op hoek *C*. Volgens Karin moet er een straal zijn waarbij het knikken wel optreedt, daarboven ook, daaronder niet. Ze wil die grens vinden, net zoals bij *BC*.
Op dit moment besef ik dat ze nu wiskunde moet gaan studeren, een college differentiaalmeetkunde moet volgen, en dat ze het na vier jaar dan wel weet. Mijn antwoord is dat het kan, maar dat het moeilijk zal zijn om het precies te doen. Voorlopig einde van het gesprek? Nee!
Even later heeft ze een stuk oplossing. Dat wil zeggen: ze heeft iets gedaan dat tot nader inzicht leidt. Ze toont hoe de grens gevonden kan worden (zie figuur 6).
Ze heeft de raakcirkel in *D* gevonden die door *C* gaat. *T* is in de tekening dus een punt van de isoafstandslijn met – volgens Karin – de laatste knik (dat wil zeggen: als je een nog kleinere afstand neemt, dan is er geen knik meer). Op dit niveau vraagt men niet meer naar de constructiedetails voor het vinden van punt *T*. De stotende cirkel is getekend en we vermoeden dat de isoafstandslijn ongeveer loopt zoals bij *T* is aangegeven.

Karin: 'Als de afstand kleiner is dan is het knikloos.'

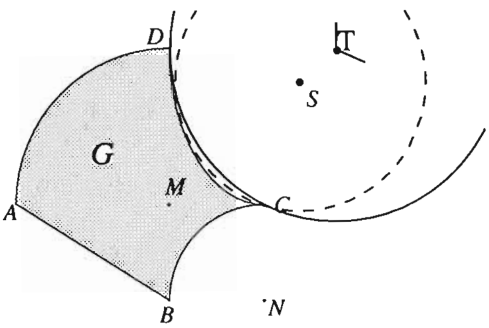
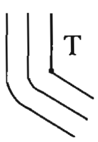


fig. 6 Voorlopig antwoord: T is het eerste knikpunt

Ik: 'Hmm. Tja, zou het dus zo lopen als je wat kleinere afstanden neemt (uitvergroot bij *T*; de tekening is niet precies, het gaat alleen om knik-of-niet)?'



Karin acht dit wel mogelijk, ik echter niet.
Omdat ik denk dat de richting van de isoafstandslijnen continu van de plek en het voetpunt van de verbindingslijn naar *G* af zal hangen, met als gevolg de knik als er twee voetpunten zijn. Mijn gekrabbel overtuigt niet.
Wat gebeurt er als we de cirkel bij *D* iets kleiner nemen? Dan kan hij iets naar beneden schuiven, maar stoot later toch op *C*. Zie de gestippelde cirkel in figuur 6.
Ik suggereer eerst eens naar opgave 24 te gaan kijken, daar gaat het om net zoiets. Karin gaat dat doen. Bij die opgave wordt een isoafstandslijn aan de binnenkant van de parabool getekend met behulp van normalen op de parabool. Een illustratie staat in het eerder genoemde artikel 'Analyse in profiel' (Drijvers en Kindt, 1995).
Even later toont Karin haar schets. Ik schat dat ze tien normalen heeft getekend; die schets is ongeveer zoals figuur 7. In haar schrift is ook duidelijk een omhullende van de normalen te zien.

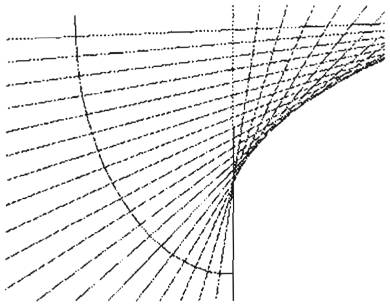
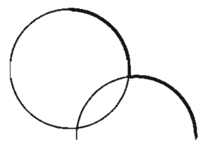


fig. 7

'Als die isoafstandslijn dáár onderdoor gaat, gaat hij knikloos'. Daar, dat is waar de normalen elkaar beginnen te hinderen.
Dit lesuur is ten einde, maar na de les staat Paul Thiel (docent van deze klas) nog met twee jongens bij het bord. Het gesprek gaat ook over de knikken in de isoafstandslijnen. Hier spitst de vraag zich toe: wat is eigenlijk een knik? In het licht van Euclides: wat is de definitie? Eén van de leerlingen formuleert het halverwege de pauze zo: als het verspringt van de één op de ander. Met twee cirkels die snijden op het bord: 'Als je zo van de ene cirkel op de andere overstapt?' Ja, dat is precies wat hij bedoelt. Dat is in de voorbeelden tot nu toe precies het geval!



Convexiteit, steunlijn, raaklijn

Interessante zaken rond isoafstandslijnen spelen zich altijd af bij inhammen in het gebied. Over inhamloze gebieden gaat het derde hoofdstuk. Een definitie van het begrip convexiteit wordt besproken: de rechtlijnige verbindbaarheid van alle punten in het hele gebied.
Een belangrijke sleutel in dit hoofdstuk is het begrip *steunlijn*. Dit is de beschrijving en een opgave erbij:

Een lijn l is een steunlijn aan een gebied G, als
- *G geheel in één van de halfvlakken ligt die door l worden bepaald*
- *de lijn l minstens één punt met de rand van G gemeen heeft.*

a. *Welke van de hier aangegeven lijnen l, m, n, o, p en q zijn steunlijnen aan het gebied G?*

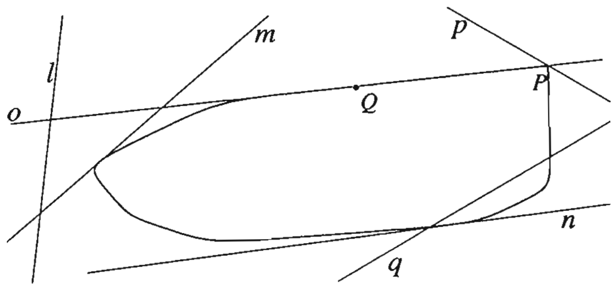


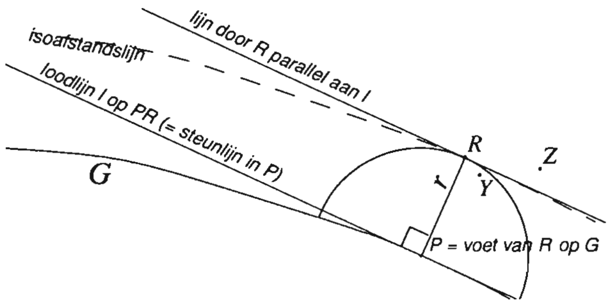
fig. 8

b. *Is elke steunlijn aan het gebied G een raaklijn aan G?*

Te bewijzen valt nu: *bij een convex gebied gaat door elk punt op de rand minstens één steunlijn.*
Dat is intuïtief heel duidelijk, maar een bewijs dat op dit niveau goed werkt, ligt niet onmiddellijk voor de hand. In het bewijs mag alleen van de definitie van convexiteit gebruik worden gemaakt!
Precies ingaan op het onderwerp *rand* is wiskundig gezien nu eigenlijk nodig. Hier lieten we echter bewust een gat vallen; impliciet nemen we aan dat duidelijk is wat een gebied is, dat een gebied omsloten wordt door een kromme rand, dat de rand tot het gebied behoort, enzovoorts. Voor wie eist dat in de leerstof een volledige deductieve opbouw moet zitten, is dit pure horror, voor wie met ons gelooft dat het natuurlijk is om bij meetkunde *leren* met een probleemgebied te beginnen en daarvanuit zowel naar fundamenten als gevolgen toe te redeneren, is het een terrein met veel mogelijkheden.

Terug naar de steunlijn. Een lijn is *raaklijn in een punt* aan een convex gebied, als de lijn in dat punt de enig mogelijke steunlijn is. In het voorbeeld in figuur 8 is lijn o wel een raaklijn in Q, maar niet in P. Een raaklijn blijkt altijd raaklijn *in een punt*, een steunlijn altijd steunlijn *aan een gebied*. Een zeer verhelderende opmerking.
Hier is de 'stelling' die dit hoofdstuk besluit, met illustratie en schets van het bewijs:

Isoafstandslijnen om convexe gebieden zijn knikloos.



Y ligt minder dan de lengte van PR van G af en Z méér. De isoafstandslijn door R ligt dus ingeklemd tussen de cirkel om P en de lijn door R loodrecht op PR. Bij R kan dus geen knik in de isoafstandslijn zitten.
Natuurlijk werd bij dit hoofdstuk de vraag gesteld: Wat is nu precies een raaklijn? Terecht, want we hebben er nu twee: die uit de analyse en die bij de convexe figuren. Eigenlijk is dat het voorlopige antwoord op die vraag. In het eerder genoemde analysepakket zijn de meetkundige ingang en de ingang via differentiëren bij elkaar gebracht aan de hand van het voorbeeld van de cirkel. Hier is het meetkundige begrip raaklijn ruim opgezet: het werkt voor de klasse van de convexe figuren. In de herziene versie zal het verband nog sterker naar voren komen.

Samenvatting

In hoeverre zijn de belangrijke vragen van het eind van de paragraaf 'Terug naar Euclides?' nu beantwoord?
– Wordt het in het VWO weer meetkunde volgens het boek van Euclides, zoals dat al een aantal keren in het verleden is gelukt en mislukt?

Ja en nee. Duidelijk is dat we ernaar streven de logisch-meetkundige redeneerstijl te behouden. We zien wel af van een totaal-deductieve opbouw. Daardoor zal ook het 'naar de bodem' redeneren voor moeten komen.
– Komen er geen nieuwe, moderne onderwerpen bij?

Er zijn twee soorten nieuwe onderwerpen: nieuwe inhouden en nieuwe toepassingen. Convexiteit is inhoudelijk nieuw terrein. Het is op zich een belangrijk meetkundig begrip, vooral ook omdat er niet vanuit wordt gegaan dat de figuren alleen uit 'bekende' delen zijn opgebouwd. Net zoals je het bij functies over x^2+1 kunt hebben, maar ook wel eens over de functie f. Het andere nieuwe is, dat gewerkt is aan de hand van enkele moderne toepassingen van de meetkunde, met name de gebiedsindelingen.
– Wat is globaal de gekozen ordening van onderwerpen?

Een indeling van deel I van de vlakke meetkunde is gegeven. Daar is dus een startcontext gekozen waar de meetkunde van middelloodlijnen, driehoeken, hoeken en bogen op natuurlijke wijze naar voren komt. In principe moeten andere contexten ook die rol kunnen vervullen. Maar belangrijker wat betreft opbouw is wat bij het antwoord op de eerste vraag (volgen we Euclides) is gezegd. Zo dadelijk volgt een schets van deel II.
– Hoe pakt het allemaal uit in de klas?

Tot nu toe heel bemoedigend. De indruk is dat de leerlingen met behoorlijk wat inzet eraan gewerkt hebben en vaak zelf met goede vragen komen. Het contrast met de analyse is vrij groot, ook voor hen. Niet wat inspanning betreft en ook niet zozeer wat moeilijkheidsgraad betreft, maar wel wat het soort redeneringen betreft. Daar gaat het ook precies om. Docenten en ontwerpers hebben heel wat geleerd over wat haalbaar is op dit gebied. Op sommige onderdelen is dat wat meer dan verwacht werd, en in deel II en de aangepaste versie van deel I zal dat tot uiting komen.

De tweede helft

Aan het eind van dit schooljaar komt het tweede deel van de vlakke meetkunde in de klas. De werktitel van dat pakket is: *Van Redenering naar Conflict.* De hoofdstuktitels, met een korte schets van de inhoud, zijn:
– Werken met wat je weet (op een rijtje zetten wat je nu wel en niet bij bewijzen gebruiken kunt).
– Cirkels, hoeken, bogen, (een klassiek onderwerp, maar sterk gericht op het leren vinden van een redenering).
– Meetkundig experimenteren (hierbij gebruiken we het computerprogramma Cabri; centraal zal staan het begrip meetkundige plaats).
– En nu bewijzen (afwerken van onderwerpen uit het computerpracticum).
– Conflictlijnen en Kegelsneden (introductie van ellips, parabool en hyperbool via conflictmeetkunde).

In dat laatste hoofdstuk kan het kleine stukje knikkenlijn van figuur 1 ter sprake komen: dat is een stukje parabool!

Literatuur

Drijvers, P. en M. Kindt (1995). 'Analyse in Profiel', *Nieuwe Wiskrant 15* (2) pp. 4-9.
Goddijn, A.J. (1995). 'Brand, regen, hunebedden, steunlijnen en kapen', *Nieuwe Wiskrant 14* (4) pp. 51-55.
Kindt, M. (1995). 'Vlakke Meetkunde, waardevol voor wiskunde B?' *Nieuwe Wiskrant 14* (3) pp. 34-39.
Maanen, J. v. (1984). 'Over het verdelen van aangeslibd land. Een brugklasproject'. *Euclides 60*, pp. 161-168.
Reuter, W. en A.J. Goddijn (1995). *Afstanden, grenzen en gebiedsindelingen, een meetkunde pakket voor VWO.* PROFI-publicatie. Freudenthal instituut, Utrecht.