Mijn wens: Een Jaguar XJS-convertible

G. Hooghiemstra
Faculteit der Technische Wiskunde en Informatica, TU Delft

Inleiding

Iemand benaderde mij telefonisch met het volgende verhaal.
'Mijnheer, reeds jaren heb ik maar één wens. Deze wens is extravagant, of zal zo op u overkomen. Ik wil eigenlijk maar één ding: een auto. En niet zo maar de eerste de beste auto; ik wil een

Jaguar XJS Convertible
prijs: f 197.600,-

Nu heb ik vorige week f 110.000,- van een tante geërfd (de notaris zei dat ik nog deze week de overschrijving op mijn giro tegemoet kan zien). Ik wil echter geen 110 duizend gulden, ook geen 120 duizend gulden; ik wil een Jaguar XJS Convertible. Kunt u mij vertellen wat de kans is dat ik, als ik naar het casino ga, van mijn f 110.000,- de gewenste, zeg f 200.000,- kan maken?'

Om een antwoord te geven op bovenstaande vraag introduceren we het volgende model.
Veronderstel je speelt met een beginkapitaal van elf fiches het volgende spel. Bij elke ronde zet je één fiche in. Met kans p, $0 < p \leq \frac{1}{2}$, krijg je twee fiches terug, met kans $1 - p$ ben je de inzet van één fiche kwijt. Het is niet toegelaten een andere hoeveelheid dan precies één fiche in te zetten. Je stopt bij het bereiken van twintig fiches, dan wel wanneer je blut bent. Wat is de kans om te stoppen met twintig fiches?

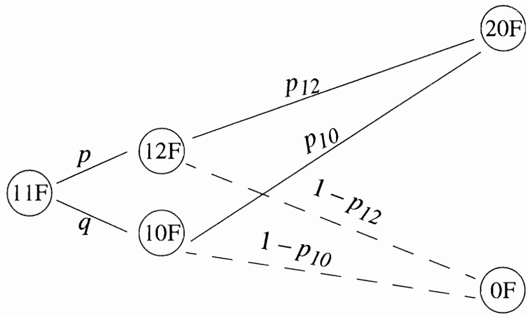
Merk op dat als één fiche *f* 10.000,- waard is, bovenstaand spel van toepassing is op onze Jaguar-freak. Immers, zijn beginkapitaal van *f* 110.000,- komt overeen met 11 fiches en bij het aantal van 20 fiches is precies het doel bereikt: namelijk een eindkapitaal van *f* 200.000,- waarmee de Jaguar kan worden aangeschaft.

In een *Amerikaans* casino wordt bij het spelen op kleur (rood of zwart) op de roulette tweemaal de inzet uitgekeerd. Als het nummer 0 optreedt, wordt de halve inzet achtergehouden. In *Holland Casino's* zijn de regels wat er gebeurt als het nummer 0 optreedt nogal ingewikkeld. Hoe deze regels precies luiden, is te vinden in [1].

Hier zullen we volstaan met de berekening voor willekeurige p, $0 < p \leq \frac{1}{2}$, van de winstkans in bovenstaand model.
De speciale gevallen $p = \frac{1}{2}$ en $p = \frac{18}{37}$, zal ik onderling vergelijken. De waarde $p = \frac{18}{37}$ correspondeert met totaal verlies van de inzet als het balletje niet op de gekozen kleur valt (immers een roulette heeft 37 vakjes, 18 rode, 18 zwarte en een vakje met het nummer 0).
Er zijn meerdere methoden om bovenstaande kansen te berekenen. Een probabilistisch bijzonder fraaie methode werkt met *martingalen.* Een tweede methode gebruikt *differentievergelijkingen.* Ik zal met de tweede methode beginnen, omdat deze volledig elementair is.

Differentievergelijkingen

Zij p_i de kans ons casino te verlaten met een eindkapitaal van 20 fiches als het beginkapitaal gelijk is aan i fiches ($0 \leq i \leq 20$). We gaan in deze paragraaf p_i berekenen. Onze uitgangspunten zijn precies gelijk aan die in de inleiding, dus bij ieder spel is de inzet gelijk aan één fiche en de kans op verdubbeling p. We leiden voor p_i een zogenaamde differentievergelijking af. De oplossing van deze vergelijking berekenen we via een handigheidje.
Omdat ieder spel met kans p wordt gewonnen en met kans $q = 1 - p$ wordt verloren, is bij een beginkapitaal van 11 fiches na één ronde het kapitaal gelijk aan 12 fiches met kans p en gelijk aan 10 fiches met kans q. Hieronder is dit in een boomdiagram verduidelijkt.



In formule:

$$p_{11} = p \cdot p_{12} + q \cdot p_{10}.$$

Merk op dat $p_0 = 0$ en $p_{20} = 1$.
Algemeen geldt voor $1 \leq i \leq N - 1$:

$$p_i = p \cdot p_{i+1} + q \cdot p_{i-1} \qquad (1)$$

als N het gewenste eindkapitaal (in fiches) is.
We rekenen nu verder met N in plaats van met 20. Het zal namelijk blijken dat de berekeningen gebruikmakend van N niet moeilijker zijn dan die met eindkapitaal 20. We krijgen dus eigenlijk straks *gratis*, dat wil zeggen zonder extra inspanning, een algemener resultaat.

De vergelijking (1) heet een (tweede orde) differentievergelijking. Het is mogelijk de algemene oplossing van de vergelijking (1) af te leiden uit de algemene theorie van differentievergelijkingen. Wij zullen dit niet doen, maar in plaats daarvan de oplossing van (1) rechtstreeks bepalen.
Daar $p + q = 1$, volgt uit (1):

$$p \cdot p_i + q \cdot p_i = p \cdot p_{i+1} + q \cdot p_{i-1},$$

ofwel

$$(p_{i+1} - p_i) = \left(\frac{q}{p}\right) \cdot (p_i - p_{i-1}), \qquad 1 \leq i \leq N - 1.$$

Omdat $p_0 = 0$ volgt nu:

$$\begin{cases} p_2 - p_1 = \left(\frac{q}{p}\right) p_1 \\ p_3 - p_2 = \left(\frac{q}{p}\right)(p_2 - p_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 p_1 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ p_N - p_{N-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} p_1. \end{cases}$$

Tel nu de eerste $(i - 1)$ vergelijkingen bij elkaar; enerzijds vinden we dan:

$$(p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \ldots + (p_i - p_{i-1}) = p_i - p_1,$$

anderzijds:

$$\left(\frac{q}{p}\right) p_1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2 p_1 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} p_1 =$$
$$p_1\left[\left(\frac{q}{p}\right) + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right],$$

zodat met de formule

$$r + r^2 + \ldots + r^{i-1} = \frac{r^i - 1}{r - 1} - 1, r \neq 1$$

(deze formule is gemakkelijk te verifiëren door links en rechts met $r - 1$ te vermenigvuldigen) volgt:

$$p_i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - 1}{\left(\frac{q}{p}\right) - 1} \cdot p_1, \qquad \frac{q}{p} \neq 1.$$

Voor $\frac{q}{p} = 1$, dus $p = \frac{1}{2}$ geldt natuurlijk:

$$p_1\left[\left(\frac{q}{p}\right) + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right] = (i - 1) \cdot p_1,$$

zodat in dit geval $p_i = i \cdot p_1$.

Voor $i = N$ geeft bovenstaande:

$$p_N = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}{\left(\frac{q}{p}\right) - 1} \cdot p_1, & \frac{q}{p} \neq 1 \\ N \cdot p_1, & \frac{q}{p} = 1, \end{cases}$$

zodat

$$p_1 = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right) - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \cdot p_N, & \frac{q}{p} \neq 1 \\ \frac{1}{N} \cdot p_N, & \frac{q}{p} = 1. \end{cases}$$

Omdat $p_N = 1$ volgt:

$$p_1 = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right) - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}, & \frac{q}{p} \neq 1 \\ \frac{1}{N}, & \frac{q}{p} = 1, \end{cases}$$

zodat

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}, & \frac{q}{p} \neq 1 \\ \frac{i}{N} & \frac{q}{p} = 1. \end{cases}$$

Deze formule kan nu toegepast worden met $i = 11$, $N = 20$ en $p = \frac{1}{2}$, respectievelijk $p = \frac{18}{37}$.

Voor $p = \frac{1}{2}$ vinden we een winstkans: $p_{11} = \frac{11}{20} = 0{,}55$.

Voor $p = \frac{18}{37}$ vinden we: $p_{11} = 0{,}417$.

Hiermee is de vraag van de Jaguar liefhebber beantwoord.

Martingaalmethode

In deze paragraaf zal ik het probleem geschetst in de inleiding nogmaals uitwerken, nu met behulp van de zogenaamde *martingaaltheorie*.

We beginnen met de definitie van een eerlijk spel. Een spel heet eerlijk als bij elke ronde de verwachte winst gelijk is aan 0. In ons model is dit het geval indien $p = \frac{1}{2}$ (vergelijk formule (3) beneden).

Zij M_n het kapitaal van de speler na het spelen van n ronden zoals geschetst in ons model in de inleiding en $p = \frac{1}{2}$, dan heet M_n met $n \geq 0$, een martingaal.

We merken op dat de verwachte (gemiddelde) waarde van M_n constant is; immers bij iedere ronde is de verwachte winst gelijk aan 0. Nog iets scherper geformuleerd: op ieder moment in de toekomst is de verwachte waarde van het kapitaal gegeven de waarde van het kapitaal tot op het huidige moment precies gelijk aan de huidige waarde van het kapitaal. Wiskundig geformuleerd: voor iedere n en k met $n \geq k$ geldt:

$$E(M_n \mid M_0, \ldots, M_k) = M_k. \tag{2}$$

Vergelijking (2) is de *wiskundige* definitie van een martingaal.

Het woord martingaal is afkomstig van een Frans acroniem voor een wedsysteem, waarbij de speler voortdurend zijn inzet verdubbelt, totdat winst optreedt.

Veronderstel wederom dat een speler *f* 110.000,- inwisselt voor 11 fiches elk ter waarde van *f* 10.000,- en in de gelegenheid is om een onbeperkt aantal ronden te spelen, waarbij in elke ronde de inzet één fiche is. Met kans $\frac{1}{2}$ krijg de speler aan het eind van de ronde 2 fiches terug, met even grote kans 0. De speler stopt met spelen bij het bereiken van 20 fiches, dan wel wanneer hij blut is.

Zij x_1 het aantal fiches dat gewonnen wordt in de eerste ronde. Dus $x_1 = +1$ of $x_1 = -1$, beide mogelijkheden hebben kans $\frac{1}{2}$. De verwachtingswaarde van x_1 is:

$$Ex_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0. \tag{3}$$

De gemiddelde winst Ex_1 in de eerste ronde is dus 0. Dit geldt voor iedere ronde, dus

$$Ex_j = 0, \quad \text{voor iedere } j.$$

Zij M_n het kapitaal na n ronden. Duidelijk is dat $M_0 = 11$; $M_1 = 11 + x_1$ en na n ronden:

$$M_n = 11 + (x_1 + \ldots + x_n).$$

Zoals boven gezien is de rij M_n, $n \geq 0$, een martingaal. Omdat de strategie die je gebruikt (spelen tot òf blut òf 20 fiches) geen kennis verondersteld van het resultaat van toekomstige ronden en omdat M_n begrensd is, kun je laten zien dat op het moment van stoppen de gemiddelde waarde van M_n ook gelijk is aan 11. Echter, het gemiddelde kapitaal bij het stoppen is ook te schrijven als:

$$20 \cdot p_{11} + 0 \cdot (1 - p_{11}),$$

waar p_{11} de kans op het uiteindelijk vergaren van 20 fiches is uitgaande van beginkapitaal 11.

Conclusie:

$$p_{11} = \frac{11}{20} = 0{,}55.$$

Voor $p < \frac{1}{2}$ is

$$M_n = 11 + x_1 + \ldots + x_n,$$

met x_j het aantal gewonnen fiches in de j-de ronde niet langer een martingaal omdat

$$Ex_j = p \cdot 1 + q \cdot (-1) = 2p - 1 < 0.$$

De gemiddelde winst per spel is dus $\neq 0$ en het kapitaal M_n blijft dus *niet* gemiddeld constant. Voorgaande theorie gaat niet op. We moeten dus een ander object (lees: martingaal) vinden met een constant gemiddelde.

Zij weer $q = 1 - p$, en merk op dat

$$\left(\frac{q}{p}\right) \cdot p + \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} \cdot q = q + p = 1.$$

Dus $y_1 = \left(\frac{q}{p}\right)^{x_1}$ heeft de eigenschap

$$Ey_1 = E\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1} = \left(\frac{q}{p}\right)^1 \cdot p + \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} \cdot q = 1.$$

We zien nu dat

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{M_n} = \left(\frac{q}{p}\right)^{11 + x_1 + \ldots + x_n}$$

de volgende eigenschap heeft:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{q}{p}\right)^{M_n} &= E\left(\frac{q}{p}\right)^{11 + x_1 + \ldots + x_n} = \left(\frac{q}{p}\right)^{11} \cdot E\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1 + \ldots + x_n} \\ &\overset{(!)}{=} \left(\frac{q}{p}\right)^{11} \cdot E\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1} \cdot E\left(\frac{q}{p}\right)^{x_2} \ldots E\left(\frac{q}{p}\right)^{x_n} \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{11} \cdot Ey_1 \cdot Ey_2 \ldots Ey_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{11}. \end{aligned}$$

Het $\overset{(!)}{=}$ teken volgt omdat de verschillende ronden elkaar niet beïnvloeden. Dus nu is $\left(\frac{q}{p}\right)^{M_n}$ de martingaal. Toepassing van dezelfde redenering als in het geval $p = \frac{1}{2}$ levert:

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{11} = \left(\frac{q}{p}\right)^{20} \cdot p_{11} + \left(\frac{q}{p}\right)^{0} \cdot (1 - p_{11}),$$

zodat

$$p_{11} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{11} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{20} - 1}.$$

Wij hebben nu (vrijwel zonder rekenen) de kans p_{11}, om uitgaande van 11 fiches een eindkapitaal van 20 fiches te bereiken, op een geheel andere manier verkregen.

Slotopmerkingen

1. Merk op dat 0,417 aanzienlijk kleiner is dan 0,55. Dit terwijl $p - \frac{1}{2} = \frac{18}{37} - \frac{37}{74} = - \frac{1}{74} = - 0{,}0135$, de onzuiverheid per spel, klein is.
2. Als op élk moment iedere inzet is toegelaten, dan is bij $p < \frac{1}{2}$ grof inzetten beter. Immers, 9 fiches inzetten leidt bij winst tot 20 fiches en dit heeft kans $\frac{18}{37} = 0{,}4865 > 0{,}4170$. Bij verlies heb je 2 fiches over om alsnog te proberen de 20 fiches te halen. Algemeen kan bewezen worden dat voor $p < \frac{1}{2}$ grof spelen (dus zo groot mogelijke inzet) voordeliger is dan bescheiden spelen. Een bovengrens aan de inzet is dus gunstig voor het casino. Bij een eerlijk spel ($p = \frac{1}{2}$) is er geen verschil wat betreft de uiteindelijke kans op winst tussen grof inzetten en bescheiden met één fiche spelen.
3. De aanpak met differentievergelijkingen verdient bij bovenstaande toepassing de voorkeur, omdat deze methode via elementaire berekeningen en zonder diepere stappen zijn doel bereikt. Bijzonder fraai werkt de martingaalmethode op het moment dat de juiste martingaal gevonden is; de keuze van de martingaal ligt echter niet altijd voor de hand.
Zo is voor $p < \frac{1}{2}$ de rij $M_n - n \cdot Ex_1 = M_n - n \cdot (2p - 1)$ ook een martingaal; de martingaal is echter niet geschikt om p_i te berekenen. In theoretische toepassingen ligt de keuze van martingaal vaak meer voor de hand en is dan een krachtig hulpmiddel om een ongelijkheid of een limietstelling te bewijzen.
Een tweede bezwaar bij de aanpak via martingalen kan zijn de verificatie van de voorwaarden onder welke de martingaal, op het moment van stoppen, dezelfde verwachtingswaarde bezit als op tijdstip $n = 0$. We zijn hier betrekkelijk lichtvaardig over dit probleem heengestapt. Een voordeel van de martingaalmethode is dat deze ook toepasbaar is voor een ruimere klasse van wedsystemen dan het eenvoudige inzetten van één fiche.
Als u interesse heeft om iets meer te lezen over martingalen dan kan ik hoofdstuk 6 van [2] aanbevelen.

Lezing voor 'Wiskunde in Actie', Faculteit der Technische Wiskunde en Informatica, Technische Universiteit Delft, donderdag 28 september 1995.

Noten

[1] Genugten, B.B. van der (1993). *Blackjack in Holland Casino's: hoe de dealer te verslaan.* Tilburg University Press.
ISBN 90-361-9793-7.

[2] Karlin, S. and H.M. Taylor (1975). *A First Course in Stochastic Processes.* Academic Press, New York. ISBN 0-12-398552-8.

Puzzels, denkspelletjes, wiskunst

Vierkant wiskunde zomerkampen 1996

VIERKANT organiseert in 1996 al voor het derde jaar zomerkampen voor jongeren van 12-16 jaar. In het kamp zullen diverse wiskundige activiteiten aangeboden worden, zoals bijvoorbeeld het oplossen van spannende vraagstukken; onderzoekprogramma's om je wiskundige horizon te verruimen, het ontwerpen van wiskundige kunstwerken. De wiskundige activiteiten (ongeveer vijf uur per dag) zullen worden aangevuld met lezingen, spelletjes en sportactiviteiten. Het kamp wordt geleid door wiskundigen en universitaire wiskundestudenten.
Ex-deelnemers (ook meisjes!) vonden de kampen 'leuk, speels, uitdagend'. Probeer zelf ook te ervaren dat wiskunde leuk kan zijn voor iedereen!
Kamp B is van 19 - 23 augustus, met hetzelfde programma als kamp B in 1995, kamp C van 12 - 16 augustus, met een nieuw programma.
Een derde kamp in het Noorden, met programma A (hetzelfde als in 1995) is nog in voorbereiding!
Verdere informatie en aanmeldingsformulieren te verkrijgen bij de wiskundedocenten of bij het VIERKANT secretariaat:
Zsófia Ruttkay, Faculteit der Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit Amsterdam
De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam
tel: 020-444 7776, e-mail: vierkant@cs.vu.nl

Internationaal wiskundecongres voor jongeren

Van 29 juli - 2 augustus is er in Hongarije een Internationaal wiskundecongres voor jongeren. Voertalen zijn Engels en Hongaars.
Inlichtingen: Zsófia Ruttkay, tel: 020-444 7776