

Titia in de basisvorming wiskunde

M.G. Witterholt

Werkgroep Wiskundededidactiek, RU Groningen

Inleiding

In de *Nieuwe Wiskrant* van april 1995 presenteerde ik, samen met Henk Heinneman, het artikel 'Ruimtelijk Inzicht onder de loep'. In dat artikel ging het over ons onderzoek naar de verschillende manieren waarop vijf leerlingen in het eerste leerjaar ruimtelijke problemen aanpakken en oplossen. Tijdens het oplossen van een opgave blijkt een aantal handelingen telkens terug te komen. Dit leidde tot vier categorieën, die we hebben gebruikt voor de analyse van het oplossingsproces:

1. *Representatie*: de leerling probeert zich het probleem voor te stellen. Voorbeelden van een representatie zijn (her)lezen van het probleem en het noteren van de gegevens op het werkblad.
2. *Tekenen of Rekenen*: de leerling tekent op het werkblad of de leerling voert berekeningen uit op het werkblad.
3. *Antwoord*: de leerling geeft een voorlopig of definitief antwoord.
4. *Controle*: de leerling gaat voor zichzelf na of een gegeven antwoord juist is, dan wel juist kan zijn. Je ziet bijvoorbeeld aan het gummen dat een leerling een controlehandeling heeft uitgevoerd.

De tweede categorie bestaat uit twee onderdelen, namelijk tekenen en rekenen. Via dit onderzoek¹ proberen we erachter te komen hoe de vijf leerlingen zich ontwikkelen dankzij, of ondanks, het wiskundeonderwijs. Naast pakketjes opgaven over ruimtemeetkunde moeten ook pakketjes opgaven over verhoudingen en verbanden ons hierbij helpen. Het onderdeel tekenen heeft dan ook betrekking op het onderwerp ruimtemeetkunde en het onderdeel rekenen heeft betrekking op de onderwerpen verhoudingen en verbanden.

Voor het onderzoek zijn de leerlingen één voor één tijdens een lesuur bij ons te gast geweest en hun aanpak is op video opgenomen. De leerling wordt gestimuleerd om hardop te denken en bij elke denkstap te vertellen wat hij/zij doet. Dankzij de video-opnames kunnen wij niet alleen uitspraken doen over de oplossingsmethode, maar ook over de attitude (houding) van de leerling. Aan de

hand van de video-opname en een leerling-enquête over de beleving van het vak wiskunde hebben we leerlingprofielen geschreven. Alle uitspraken in dit artikel zijn gebaseerd op deze leerlingprofielen.

Het onderzoek heeft drie jaar geduurd. Ieder jaar moesten de leerlingen dezelfde opgaven maken. Sommige leerlingen konden zich nog wel herinneren dat ze in een vorig jaar moeite hadden met een bepaalde opgave, maar er was geen sprake van herinnering van een aanpak, oplossingsmethode of een antwoord. Dit is bekend, omdat we hier expliciet naar gevraagd hebben.

Titia is één van de vijf leerlingen die gedurende drie jaren meegewerkt heeft aan ons onderzoek. Dit artikel draait om haar. Titia begon in 1992-1993 als 'brugger' op het Zernike College in Groningen. De leerlingen van het Zernike College volgden vanaf het schooljaar 1992-1993 al het onderwijsprogramma W12-16 met experimentele pakketjes kijkmeetkunde.

Inmiddels zit Titia in 4 MAVO. In de tussentijd is ze een behoorlijk aantal ervaringen rijker geworden.

Vragen die ik probeer te beantwoorden in dit artikel zijn: Hoe denkt Titia over het vak wiskunde? Verbeteren algemene werkmethode zich? Hoe ontwikkelt het ruimtelijk inzicht zich bij Titia?

De beschrijvingen van Titia in klas 1 en klas 3 hebben betrekking op haar oplossingsmethode (de wiskunde) en op haar houding ten opzichte van wiskunde. De beschrijving van Titia in klas 2 is meer algemeen gehouden.

Titia in de brugklas

Houding

In het eerste onderzoeksjaar voelt ze zich tijdens het maken van de opgaven niet op haar gemak. Ze is gespannen en onzeker. Ze zucht vaak. Haar aandacht is vooral gericht op het papier.

Alleen als de begeleider haar een vraag stelt, is Titia bereid om te praten. Het is overigens de bedoeling dat ze hardop denkt.

Ze zegt vaak dat ze een opgave moeilijk vindt of dat ze

een opgave niet begrijpt. Het gevolg is dat Titia vaak niet verder komt dan het lezen van een opgave.

Ze schrijft weinig op als het om berekeningen gaat, want schrijven vindt ze 'rottig'. Haar antwoorden zijn vaak 'gokjes'. Soms gokt ze goed, maar dan kan ze het antwoord niet onderbouwen. Ze doet maar wat.

Wiskunde

Titia is in de brugklas over de gehele linie een matige leerling. Ze zit in een MAVO/HAVO/VWO-brugklas, maar krijgt al snel een MAVO-advies. Ze gaat met een 6 voor wiskunde over naar de tweede klas van de MAVO.

Ter illustratie geef ik twee door Titia gemaakte opgaven.

De eerste opgave gaat over kijklijnen (ruimte meetkunde). Bij deze opgave is óók de voorgaande opgave afgebeeld, omdat Titia de voorgaande opgave nodig heeft voor het tekenen van het vooraanzicht bij de gegeven plattegrond (figuur 1).

De tweede opgave gaat over het vergelijken van autoreclames. Daarbij spelen verhoudingen een belangrijke rol.

Kijklijnen

Titia begint met het in gedachten doortrekken van de kijklijnen. Ze begrijpt dat Jaap het huis helemaal ziet. Vervolgens gaat ze aan de slag. Ze neemt heel precies,

met de geodriehoek, het huis over op haar papier. Na een tijdje vraagt ze: 'Mag ik gummen? Het huis moet verder naar links'. Natuurlijk mag dat! De stippellijnen geven aan dat ze gegumd heeft.

Daarna begint ze met de kerk. Deze gumt ze ook weer uit, omdat de tekening netter kan. Bovendien wil ze de exacte maten van de kerk weten. Als de begeleider zegt dat het niet zó precies hoeft, tekent ze opnieuw de kerk. Maar dan vergeet ze dat er een hoekje van de kerk af moet. Uiteindelijk is de tekening af en Titia zegt: 'Zo is ie goed'. Ze heeft dan ongeveer 3,5 minuten aan de opgave gewerkt.

Het resultaat is een deelplattegrond van de gegeven plattegrond en geen vooraanzicht van de situatie.

Verhoudingen

Als Titia de opgave heeft gelezen (zie figuur 2), vraagt de begeleider waar ze naar kijkt. Haar antwoord is: 'Naar Opel Rocket. Er staat 'zuiniger kan niet', dus ik denk dat die wel het voordeligst is. Want er staat 'zuiniger kan niet'. Bij de rest niet'. Op de vraag van de begeleider of ze dat uit kan leggen zegt ze: 'Nee. Ik kan totaal geen verhoudingen'. Toch begint ze opeens een aantal berekeningen op te schrijven. Gezien de verschillende reclames vermoedt ze dat de Opel het voordeligst is. Ze vergelijkt de Fiat met de Opel. De Opel verbruikt $1,5 \times 5 = 7,5$ liter

Hieronder zie je een plattegrond van een dorp met een kerk, een flat en een huis.

Jan staat op de plaats van een van de letters

Jan ziet dit

Geef op de plattegrond aan waar Jan staat.

Hieronder zie je een plattegrond met Ineke en Jaap. Ze nemen een foto in de richting van de pijlen. De stippellijnen geven de grens van de foto aan.

foto van Jaap



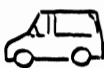

Teken de foto die Jaap maakt.

fig. 1 De twee opgaven over kijklijnen (links de eerste opgave, rechts de tweede)

benzine per 100 km. Haar conclusie is: 'Dus de Fiat Uniek heeft minder benzine nodig. Ik kan het me haast niet voorstellen, maar ja'.

Reclame voor voordelig autorijden

Je ziet hier vier reclame-aanbiedingen.

<p>Fiat Uniek</p> <p>Slechts 6,7 liter voor elke 100 km</p> 	<p>Citroen bmy</p> <p>Met 1 liter rijdt u 14,5 kilometer</p> 	<p>Ford Faster</p> <p>Deze auto verbruikt maar 0,08 liter benzine per kilometer</p> 	<p>Opel Rocket</p> <p>Zuiniger kan niet! Bij elke 20 kilometer verbruikt deze auto slechts 1,5 liter benzine</p> 
---	--	---	--

Al deze auto's zijn getest op benzinegebruik bij een constante snelheid van 100 km per uur. Welke auto is het voordeligst in benzinegebruik als je de reclames vergelijkt?

Laat zien wat je uitrekent.

$$\begin{array}{r} 1,5 \overline{)100} \quad 14,5 \overline{)100} \\ \underline{15} \quad \underline{145} \\ 5 \quad 5 \\ \underline{5} \quad \underline{50} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

Antwoord: Fiat Uniek is het voordeligst

fig. 2

Vervolgens berekent ze met behulp van de rekenmachine $100 : 14,5 = 6,8$. Ze licht de berekening toe door te zeggen: 'Die, de Citroen, voor 100 km 6,8. Dat, de Fiat, is 6,7 dus die rijdt voordeliger'.

Nu hoeft ze alleen de Ford Faster nog maar te controleren. Daarvan zegt ze: 'Nou, dat is 0,08 liter benzine per km. Dus deel je 100 km door 1, dat blijft 100. Dan doe ik 100 keer 0,08. Ik moet dan kijken hoeveel liter dat is. Dat is 8. Nou, dan blijft het de Fiat Uniek'. Na ongeveer elf minuten staat het antwoord op papier.

We zijn blij dat ze iets op heeft kunnen schrijven. Dit is namelijk de enige opgave in het bundeltje *Verhoudingen* waarover ze iets opschrijft.

Titia in 2 MAVO

In dit artikel bekijken we de ontwikkeling van Titia over een periode van drie jaren. De nadruk ligt op het vergelijken van Titia's prestaties in de brugklas met haar prestaties in de derde klas. Bij het onderzoek in klas 2² ben ik minder betrokken geweest, maar ik kan wel een korte samenvatting geven van Titia's functioneren.

Titia is tijdens het maken van de toetsen zeer gespannen. Ze weet dat het niet nodig is om zich er druk over te maken, maar ze kan er niets aan doen. De opgaven over ruimtemeetkunde vindt ze moeilijker dan vorig jaar. Volgens haar is het onderwerp al een tijd niet meer besproken. Uit de resultaten blijkt echter dat Titia de opgaven over ruimtemeetkunde beter heeft gemaakt dan in het eerste jaar. In het algemeen kan Titia haar antwoorden bij alle onderwerpen beter onderbouwen dan in het eerste jaar. Dit geldt vooral voor het onderwerp verhoudingen. Titia maakt verhoudingstabellen en voert met behulp van deze tabellen de berekeningen uit. Titia gebruikt de rekenmachine om uit te zoeken door welk getal ze moet delen om een ander getal te krijgen in de verhoudingstabel.

Titia in 3 MAVO

Wiskunde

Titia gaat over naar MAVO 3 met een 7 voor wiskunde. In die klas worden haar weer de 'onderzoeks'-opgaven voorgeschoteld. We bekijken nu wat ze er in het derde jaar van heeft gemaakt.

Kijklijnen

Hieronder zie je een plattegrond met Ineke en Jaap. Ze nemen een foto in de richting van de pijlen. De stippellijnen geven de grens van de foto aan.

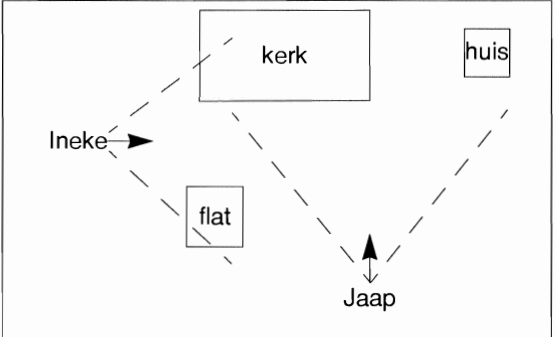
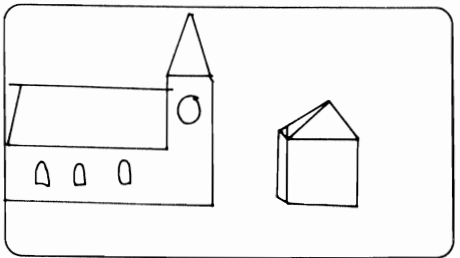



foto van Jaap

teken de foto die Jaap maakt

fig. 3

Titia verlengt de kijklijnen van Jaap met potlood en geodriehoek, omdat de kijklijnen 'niet ver genoeg gaan'. Na ongeveer één minuut nadenken tekent ze de kerk en het huis. Van de kerk zegt ze: 'Beetje mislukt!'. Vervolgens gumt ze een lijn van de kerk weg en tekent ze een nieuwe lijn. Als ze de raampjes in de kerk heeft getekend, zegt ze: 'Zo ... dat is het'. Aangezien Titia drie raampjes tekent in de kerk, geeft ze aan dat ze doorheeft dat Jaap de kerk niet helemaal ziet. Ze tekent echter wel het hele dak van de kerk. Het huis is in perspectief getekend.



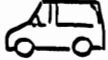

Het aanzicht staat in ongeveer zes minuten op papier.

Verhoudingen

Titia leest de opgave en zegt: 'Okee, eerst de Fiat ... even kijken hoor ... ik ga gewoon van 100 km maak ik 1 km'. Vervolgens maakt ze de verhoudingstabel voor de Fiat. Ook in de volgende verhoudingstabellen, voor de andere auto's, brengt ze vlot het aantal kilometers naar 1. De eerste verhoudingstabellen voorziet ze nog van boogjes, om aan te geven wat ze doet. Op deze manier kan ze alle merken snel met elkaar vergelijken. Na ongeveer drie minuten concludeert ze: 'Nou, dan is de Fiat het voordeligst'.

Reclame voor voordelig autorijden

Je ziet hier vier reclame-aanbiedingen.

Fiat Uniek	Citroen bmy	Ford FASTER	Opel Rocket
Slechts 6,7 liter voor elke 100 km	Met 1 liter rijdt u 14,5 kilometer	Deze auto verbruikt maar 0,08 liter benzine per kilometer	Zuiniger kan niet! Bij elke 20 kilometer verbruikt deze auto slechts 1,5 liter benzine
			

Al deze auto's zijn getest op benzinegebruik bij een constante snelheid van 100 km per uur.
Welke auto is het voordeligst in benzinegebruik als je de reclames vergelijkt?

Laat zien wat je uitrekent.

fiat. $\frac{\text{aant. km } 100}{\text{liters } 6,7} = 14,77$

citroen $\frac{\text{aant. km } 14,5}{\text{liters } 1} = 14,5$

ford $\frac{\text{aant. km } 1}{\text{liters } 0,08} = 12,5$

opel $\frac{\text{aant. km } 20}{\text{liters } 1,5} = 13,33$

Antwoord: fiat..... is het voordeligst

fig. 4

De ontwikkeling van Titia

Houding

Titia is op alle fronten vooruit gegaan. Was ze in het eerste jaar nog een zorgenkindje, met af en toe de tranen in de ogen, in het derde jaar laat ze zich niet meer uit het veld slaan. Haar zelfvertrouwen is behoorlijk toegenomen en dat werkt in haar voordeel. Bij een opgave die ze moeilijk vindt, geeft ze de moed niet meer op. Ze probeert door goed te kijken, te lezen en eventueel te corrigeren tot een antwoord te komen.

Wiskunde

Als we de door Titia gemaakte opgaven in het eerste onderzoeksjaar vergelijken met die in het derde jaar, dan valt het volgende op³.

Titia's toegenomen zelfvertrouwen is waarschijnlijk te danken aan het feit dat ze methoden heeft geleerd om een probleem aan te pakken. Ze heeft iets geleerd waar ze altijd op terug kan vallen en meestal met succes. Bij de opgave over kijklijnen kan Titia zich in de positie van Jaap verplaatsen. Op deze manier kan ze tekenen wat Jaap ziet. Ze tekent zelfs met perspectief!

Ze heeft in de basisvorming zelf allerlei bouwwerkjes gemaakt. Deze bouwwerkjes komen in de pakketjes kijkmeetkunde voor. Bij een dergelijke opgave kan ze zich iets voorstellen. Haar ruimtelijk inzicht heeft zich goed ontwikkeld en daar heeft ze nu voordeel van.

Ook bij de opgave over autoreclames heeft Titia een passend gereedschap gevonden: de verhoudingstabel. Ze heeft veel houvast aan dit rekenmiddel en voelt zich hier zeker door. In het eerste onderzoeksjaar kon ze de opgaven over verhoudingen wel herkennen, maar het gebruik van het bijbehorende gereedschap was er niet bij. In het derde jaar heeft ze geen moeite meer met dergelijke opgaven.

Aanwijzingen met het oog op onderwijs

We hebben twee verschillende opgaven van Titia bekeken. De ene ging over ruimteteekunde en de andere over verhoudingen. Aanwijzingen met het oog op het onderwijs hebben dan ook alleen betrekking op deze leerstofgebieden.

Ruimteteekunde

Natuurlijk is het noodzakelijk dat leerlingen ervaringen op doen, maar de vraag is: 'Welke ervaringen bieden wij onze leerlingen aan?' In de onderwijssituatie ligt het voor de hand om tot concretisering over te gaan. Knippen, vouwen en plakken, het hoort er allemaal bij. Een essentieel aspect van ruimtelijk inzicht is dat een leerling zich kan verplaatsen in een gegeven situatie. Het is zinvol om de ruimtelijke situatie na te laten bouwen, zodat de leerling precies ziet hoe het in elkaar zit. Op een gegeven moment zal de leerling uit zichzelf een situatie nabouwen als hij op deze manier beter in staat is om een opgave op te

lossen. De docent hoeft hem hiertoe niet meer aan te sporen, omdat hij weet dat de mogelijkheid er is. Met elkaar er op uit gaan om bijvoorbeeld de hoogte van een gebouw te bepalen, levert een referentiemaat op. Deze maat is bruikbaar in de les om opgaven te kunnen maken. Uit het leven gegrepen voorbeelden spreken de leerlingen aan. De leerling ontwikkelt op deze manier inzicht aan de hand van werkelijke probleemsituaties. Daarmee groeit het vertrouwen dat je er zelf wel uit kunt komen.

Verhoudingen

Een belangrijk stuk wiskundig gereedschap bij het rekenen met verhoudingen, is de verhoudingstabel. Terwijl Titia veel houvast heeft aan de verhoudingstabel, laten een aantal van de door ons geobserveerde leerlingen dit rekenmiddel achterwege. Opvallend is, dat dit de betere leerlingen betreft. Het rekenen zonder verhoudingstabel is helemaal niet erg. Als een leerling een snellere methode heeft gevonden, dan is het prima dat hij deze methode toepast. Titia gebruikt in het derde jaar bij alle opgaven een verhoudingstabel, terwijl de andere leerlingen daar selectief gebruik van maken. Zij hebben de verhoudingstabel niet iedere keer nodig.

Het is echter duidelijk, dat we onze leerlingen dergelijke handvaten aan moeten bieden. Op deze manier kunnen ze met allerlei opgaven uit de voeten. Bovendien moeten we de leerlingen duidelijk maken, dat de verhoudingstabel niet in alle situaties bruikbaar is. Als uit de context blijkt, dat er sprake is van een lineair verband ($y = ax + b$), dan kan de verhoudingstabel ($y = ax$) niet gebruikt worden. Leerlingen moeten verhoudingen en verbanden van elkaar kunnen onderscheiden. Uit onze toetsresultaten blijkt dat sommige leerlingen de regels voor de verhoudingstabel ook gebruiken bij lineaire verbanden. Het is dus belangrijk dat verschil aan onze leerlingen te laten zien.

Tijd nodig voor probleemrepresentatie

In de representatie probeert de leerling zich het probleem voor te stellen. De tijd die een leerling nodig heeft om

zich het probleem voor te stellen, noemen we de representatietijd. De totale oplostijd is de tijd die nodig is om de opgave te maken.

Een belangrijke conclusie van ons onderzoek is dat de totale oplostijd korter wordt, terwijl de representatietijd ongeveer gelijk blijft. Die wordt dus niet korter. In het programma W12-16 blijft tijd nodig om rustig een probleem te analyseren, omdat er geen sprake meer is van het routinematig oplossen van standaardsonnen. Een snelle classificatie van opgaven naar typen ontbreekt.

Tenslotte

In dit artikel heb ik geprobeerd om duidelijk te maken, dat het belangrijk is om in de les expliciet aandacht te besteden aan de ontwikkeling van 'denk-gereedschap'. Titia heeft hierdoor veel meer zelfvertrouwen gekregen en waarschijnlijk is dit voor meer leerlingen het geval.

Tevens heb ik geprobeerd om duidelijk te maken dat het gevaarlijk is om leerlingen in een hokje te stoppen. Juist de leerling van wie je het niet verwacht, kan zich ontzettend goed ontwikkelen. En zeker niet in het minst door het aangeboden onderwijs.

Noten

- [1] 1992-1993: Onderzoek uitgevoerd door Drs. H. Heineman en Drs. M. G. Witterholt.
1993-1994: Onderzoek uitgevoerd door Drs. C. M. Modderman.
1994-1995: Onderzoek uitgevoerd door Drs. J. A. Grummel en Drs. N. F. Sijsma.
Alle onderzoeken werden begeleid door Dr. A van Streun.
- [2] Uit: Modderman, C.M. (1994). *Oplossingsmethoden in de basisvorming wiskunde*.
- [3] Uit: Grummel, J.A. en N.F. Sijsma (1995). *Oplossingsmethoden in de basisvorming wiskunde*.

Een nieuwe hoofdredacteur

Vier jaar lang heeft Douwe Kok zijn krachten aan de Nieuwe Wiskrant gegeven. Als een spin in het web van het Nederlandse wiskundeonderwijs heeft hij zijn draden gesponnen en veel zaken met elkaar weten te verbinden. Vrije nieuwsgaring, zowel uit het formele als uit het informele circuit, was hem op het lijf geschreven. Douwe had een fijne neus voor de nieuwste ontwikkelingen en dat leverde altijd wel enkele ideeën voor artikelen op. Het

schrijven van 'Over het laatste nieuws' begon hij in de loop van de jaren steeds leuker te vinden.

Douwe wordt opgevolgd door zijn voorganger, Sieb Kemme. Na vier jaar geleden gestopt te zijn met het werk voor de Nieuwe Wiskrant, heeft Sieb er echt weer zin in.

Heleen Verhage