‘Meneer van Dalen’ is een steeds terugkerend onderwerp dat nogal wat docenten bezig blijkt te houden. **Hessel Pot** probeert de gangbare praktijk met betrekking tot de deel-maal-voorrang in een hanteerbare regel samen te vatten.

Van Dalen en het tekenloos product

Gaat vermenigvuldigen vóór delen?

Naar aanleiding van het artikel ‘Weg met Van Dalen’ van Ed de Moor (*Nieuwe Wiskrant 14*(3)) wordt hier ingegaan op het meest omstreden aspect van die zaak: de eeuwige vraag of een vermenigvuldiging die vòlgt op een deling toch vóórgaat. Hoe zit het met de interpretatie van:

‘A gedeeld door B maal C’?

We beschouwen deze kwestie hier alleen voorzover het de situatie betreft waarbij de bewerkingen in *symbolische* notatie geschreven zijn/worden (in de spreektaal is de zaak ook van het veel complexere spraak-ritme afhankelijk). En alleen wanneer de deling *niet* in de drie-niveausnotatie (met een horizontale deel-/breukstreep) geschreven is.
Wanneer we proberen na te gaan welke conventie in de praktijk meestal gevolgd wordt, blijkt dat gelet dient te worden op de navolgende typografische details:

Het delings-teken; een quotiënt kan worden geschreven als

a/b
$a : b$
$a \div b$ (meest in Engelse tekst).

Het vermenigvuldigings-teken; een product kan worden uitgedrukt met de ‘tekens’

$b \times c$
$b \cdot c$ (de punt meestal op halve x hoogte)
bc of $b\ c$ (tekenloos product)

De behaking; het al dan niet tussen haakjes geplaatst zijn (en misschien ooit ook wel het sóórt haakjes) van één of beide operanden kan een rol spelen. Bijvoorbeeld in het systeem van de TI-81 en opvolgers.

De spatiëring; de breedte van de spaties is een voor de hand liggend expressiemiddel om een hoge dan wel lage prioriteit aan te duiden. (Bij de TI-81 spelen spaties inderdaad een rol.) In opgeschreven spreektaal speelt dat ook:

driemaal vijfentwintig versus driemaal vijf en twintig;
driehonderd duizendste versus drie honderdduizendste.

In drukwerk staan volgens de gebruikelijke norm alle bewerkingstekens, (behalve /) tussen ‘halve’ spaties. Terwijl er bij de tekenloze vermenigvuldiging in het geheel géén spatie tussen de expressies voor de operanden komt, behalve in $2 \ln 5$ en $a \sin x$.

Het overwegend gangbare gebruik

Na het jarenlang kien zijn op hoe de praktijk met de deel-vóór-maal-prioriteit omgaat, meen ik dat er een zeer duidelijke trend te constateren valt. Voor door mensen te lezen formules, niet voor apparaatinstructies, is deze trend:

Een tekenloos product heeft prioriteit boven een direct voorafgaande (lineair genoteerde) deling, dit in tegenstelling tot een product-mèt-bewerkingsteken.

Hierbij speelt géén rol:
- de keuze van het delingsteken
- eventuele haakjes om de operanden
- de breedte van eventuele spaties
- het ‘rekenkundig’ of ‘algebraïsch’ zijn van de operanden (getallen of letters).

Dus in concreto:

$\frac{a}{b \times c}$ =	$\frac{a}{b} \times c$ =
$= a/bc$	$= a/b \times c$ $= a/b \cdot c$
$= a : bc$	$= a : b \times c$ $= a : b \cdot c$
$= a \div bc$	$= a \div b \times c$ $= a \div b \cdot c$
$= a/b\ \ c$	$= a\ /\ b{\cdot}c$ $= {}^{a}/_{b}\,c$

Schrijvers moeten expressies met een ‘tegennatuurlijke’ spatiëring zoveel mogelijk vermijden. En lezers zullen er kritisch naar moeten kijken.
In het basisschoolrekenen zal het tekenloos product mogelijk nooit voorkomen. Daar geldt dan: vermenigvuldigen en delen gaan van links naar rechts, net als optellen en aftrekken. Volgens het voorafgaande zou in de reken-

kunde echter ook te gebruiken zijn:

$100 / 5(7-3) = 5 \qquad 9! / 3!\,6! = 9 \cdot 8 \cdot 7 / (3 \cdot 2 \cdot 1)$

$1000 : 2^3\, 5^2 = 5 \qquad 1/2\, \sqrt{3} = 1/6 \cdot \sqrt{3}$

Über das Setzen von *Klammern* in der Arithmetik spricht zuerst *E. Schröder* in seinem Lehrbuch die folgende allgemeine Regel aus: Ein Ausdruck, der Teil eines neuen Ausdrucks ist, wird in eine Klammer eingeschlossen. Allmählich ist es gebräuchlich geworden, diese Klammern in zwei Fällen fortzulassen, erstens wenn von zwei *gleichstufigen* Operationen die *voranstehende* zuerst ausgeführt werden soll, zweitens, wenn von zwei *ungleichstufigen* Operationen die *höherer* Stufe zuerst ausgeführt werden soll.

Schubert, H. (1898). In: Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. (W.F. Meyer, Red.), Band I, Teil I, S. 10

Waarom zo'n dubbelslachtige regel?

Het toekennen van essentieel betekenisverschil aan het al dan niet gebruiken van een zichtbaar maalteken, lijkt niet bijzonder fraai. Een voordeel(tje?) is echter dat

$355a \sin 2x / 113bcd(e-f+g) \sin 2y$

te schrijven is (op één regel, zonder extra haakjes) als:

$355/113 \cdot a/bcd(e-f+g) \cdot \sin 2x / \sin 2y$

waarin verwante factoren bij elkaar staan.
Zo is het plezierig om een vierkantsvergelijking éénregelig te kunnen schrijven als

$3/8 \cdot x^2 - 2/7 \cdot x + 1 = 0$ in plaats van

$3x^2/8 - 2x/7 + 1 = 0$ of $(3/8)x^2 - (2/7)x + 1 = 0$

Hetzelfde geldt voor notatievormen als:

$1/2 \cdot bh \qquad 1/3 \cdot Gh \qquad 1/2 \cdot n(n+1)$

$4\pi/3 \cdot R^3 \qquad h_c = 2/c \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Buiten de pure wiskunde wordt ook met voordeel van de conventie gebruik gemaakt. Bijvoorbeeld bij het drukken in lopende tekst, zonder haakjes en zonder extra witregels, van $h/2\pi$, $1/\omega C$, e/mc, $\Delta E/kT$.
Verder is er nog een parallel te zien tussen de hier genoemde voorrangsconventie voor *symbolisch geschreven* deel-maal-expressies en iets dergelijks in *uitgeschreven* gesproken taal. Want de woordcombinatie

'vierhonderd gedeeld door tweehonderd'

(*zonder* expliciete aanduiding van de, in de term 'tweehonderd' besloten, vermenigvuldiging), zal in de meeste gevallen als een ander totaal worden gezien als:

'vierhonderd gedeeld door twee maal honderd'.

Order of operations in terms containing both ÷ and ×. If an arithmetical or algebraical term contains ÷ and ×, there is at present no agreement as to which sign shall be used first. 'It is best to avoid such expressions.' For instance, if in $24 \div 4 \times 2$ the signs are used as they occur in the order from left to right, the answer is 12; if the sign × is used first, the answer is 3.
Some authors follow the rule that the multiplications and divisions shall be taken in the order in which they occur. Other textbook writers direct that multiplications in any order be performed first, then divisions as they occur from left to right. The term $a \div b \times b$ is interpreted by Fisher and Schwatt as $(a \div b) \times b$. An English committee recommends the use of brackets to avoid ambiguity in such cases.

Cajori, F. (1928). A history of mathematical notations, vol. 1, p. 274

Structuurverschil tussen : en × ?

In een drietal speciale situaties lijken in de praktijk af en toe, en soms zelfs bijna structureel, afwijkingen voor te komen van de genoemde deel-maal-voorrangsconventie. Met name als er sprake is (of: lijkt te zijn) van:

Grootheden
Symbolen voor een bepaalde grootheid of voor een grootheidsvariabele, in combinatie met getalsymbolen:
$R_g = 1/2\, R_a$ (roosterweerstand is halve anodeweerstand)

fréquence $f_6 = 3^6/2^9\, f_0$

distance de la Lune $= 20/57\, r \cot 0^{\circ},5 = 40r$

1 boogminuut $= 1/60°$

Klop 1/8 l slagroom, en ...

(6 + 18) : 2 M. = 12 M.

Verhoudingen en evenredigheden
Het symbool ' : ' is hier het *staat tot*-teken in plaats van het *gedeeld door*-teken:

De kapitalen verhouden zich als $5 \times 5 : 3 \times 4$

platteland staat tot stad is $= 1{,}2 \times 2 : 0{,}8 \times 3$

$h_a : h_b : h_c = \sin\beta \cdot \sin\gamma : \sin\gamma \cdot \sin\alpha : \sin\alpha \cdot \sin\beta$

boldriehoek : bolopp. = sferisch exces : $4 \times 180°$

Breuksymbolen
Het weergeven van de als enkelvoudig en onsplitsbaar bedoelde getalsymbolen als $\frac{1}{2}$, $\frac{13}{100}$, ... en $^3/_4$, $^7/_{12}$, ... door 1/2, 13/100, 3/4, 7/12, ... betekent vrágen om problemen:

$$mgl = 1/2mv^2$$

$$\text{bolmassa } M = 4/3\pi\rho r^3 \quad (\rho = \text{dichtheid})$$

$$\sqrt{(1+x)} = 1 + 1/2x - 1/8x^2 + 1/16x^3 - 5/144x^4 \ldots$$

$$\cos 45° = 1/2\sqrt{2}$$

$$\sin a/2 \cos a/2 = 1/2 \sin a$$

$$N_P = 1/2 \ln(N_1/N_2)$$

$$3/4 \div 2/3 \quad \text{(driekwart gedeeld door tweederde)}$$

Deze voorbeelden komen allemaal uit bestaande boeken. In elk van de drie speciale gevallen kan misschien als argument voor het afwijken van de gangbare prioriteitsregels worden aangevoerd, dat de in de voorbeeldexpressies aangegeven 'deling' verwijst naar een bewerking uit een *andere wiskundige structuur* dan de direct erop volgende 'vermenigvuldiging'. Die deling en die vermenigvuldiging zijn niet elkaars inverse binnen één en dezelfde structuur. In de voorbeelden met grootheden slaat het deelteken steeds op een bewerking tussen *getallen*, terwijl het weggelaten 'vermenigvuldigingsteken' werkt op een getal en een (variabele of constante) *grootheid.*
Voor de evenredigheid geldt dat 'de verhouding van grootheden of van getallen' niet in alle opzichten hetzelfde is als het 'quotiënt van getallen'. Zo hebben Engelstalige teksten veelal ':' voor verhoudingen naast '÷' voor echte quotiënten.
En als je beslist wilt, valt er in breukenland een betekenisnuance aan te wijzen tussen een schuine streep als *breuk*-teken en een schuine streep (door : of ÷ te vervangen) als *deel*-teken.
Maar hoe zie je dat aan die streep?

De bovengenoemde argumentatie lijkt in alle drie de gevallen nogal subtiel. Naar mijn idee te subtiel en discutabel om er het *niet* van toepassing zijn van de gebruikelijke deel-maal-voorrangsconventie mee te kunnen verdedigen. Ik zou daarom alle hierboven gegeven notatievoorbeelden als minder bruikbaar en minder wenselijk willen bestempelen. En in deze gevallen pleiten voor het gebruik van haakjes, dan wel voor een ander notatie-alternatief dat de dubbelzinnigheid met betrekking tot de deel-maal-prioriteit opheft.

De *schuine* streep in rekenkundige en algebraïsche expressies is trouwens van vrij recente datum. Vanaf het midden van de negentiende eeuw wordt ' / ' gebruikt voor 'gewone breuken', veelal met nog enig niveauverschil tussen teller en noemer ($^3/_4$). Pas in de twintigste eeuw komt / meer en meer ook in de plaats van de voor type- en zetwerk minder handige *horizontale* deelstreep (in gebruik vanaf Leonardo van Pisa, rond 1200), dus als alternatief voor de deeltekens ÷ (vanaf Rahn 1659 en Pell 1668) en : (vanaf Leibniz 1684).

> Consider, for example, the expressions $x \div y \times z$ and $x \div yz$. According to the rules, both are equivalent to the expression $(x \div y) \times z$. However, yz is frequently used as an expression for multiplication which is performed first regardless of other rules. Furthermore, the dot annotation for multiplication yields the expression $x \div y \cdot z$, which (according to the interpretations encountered) seems to fall midway between the other cases. Proponents of the common convention protest that such expresssions would be parenthisized anyway for clarity; but then the convention seems to lose most of its value.

Iverson, K.E. (1966). Elementary function: an algorithmic treatment. p. 219

Wie kent afwijkingen?

Graag verneem ik van praktijkgevallen waarbij *niet* voldaan is aan de regel

> 'Een tekenloos product heeft, in tegenstelling tot een product-mèt-bewerkingsteken, prioriteit boven een direct voorafgaande (lineair genoteerde) deling.'

En wel:
- in symbolisch genoteerde formules, geen computertaal
- gedrukt in boek of tijdschrift, in welke taal dan ook
- waarbij de deling en de vermenigvuldiging onderling inverse bewerkingen zijn binnen dezèlfde lichaamsstructuur
- kennelijk systematisch en opzettelijk toegepast, dus afgezien van geïsoleerde gevallen waarin mogelijk sprake is van een onbedoelde onachtzaamheid of vergissing
- ook afgezien van expressies $(a:b) \cdot c$ en $a:(bc)$ waarin de haakjes mogelijk alleen voor alle zekerheid ten overvloede zijn toegevoegd
- en evenmin voorbeelden ter illustratie van, of schoolboekjessommen ter toetsing van de kennis van, een kort tevoren gepresenteerde prioriteitswet.

> Utelämnat gångertecken tolkas ofta som om produkten stod inom parentes.
> a/bc, med utelämnat gångertecken, tolkas således vanligen $\frac{a}{bc}$ men detta är inte någon allmänt vedertagen regel.

Matematik-terminologi i skolan (1979). Skolöverstyrelsen, Stockholm

Leerboeken weinig helder

In boeken over rekenkunde en algebra wordt vaak het een en ander gezegd over 'de volgorde der bewerkingen'. Maar slechts zelden wordt opgemerkt dat de gangbare praktijk nòch met 'vermenigvuldigen gaat vóór delen', nòch met 'vermenigvuldigen en delen gaan van links naar rechts' in overeenstemming is.

Vaak wordt wel de Van-Dalen-regel genoemd, maar komt er daarna onder de voorbeelden en de sommetjes geen enkele keer een expressie met $a : b \cdot c$ voor, alsof al gevoeld werd dat dit een omstreden geval is. Sterker, soms vergéét de auteur zijn eigen regel en noteert vrolijk herleidingen als $a : b \cdot b = a$.
Omgekeerd geven 'van-links-naar-rechts-auteurs' series opgaven van het soort $pq^2r^3 : qr^2$ waarbij als antwoord pqr gegeven wordt in plaats van pqr^5.

Bevreemdend is ten slotte ook de regelmatig terugkerende zinsnede: 'Men heeft afgesproken dat....' of 'Men is overeengekomen dat....' of 'Mathematicians have made certain agreements for...' als het om de bewerkingsvolgorde gaat. Want er wordt nooit bij gezegd waar, wanneer, door wie, en op grond van welke argumenten er door wiskundigen zulke afspraken gemaakt zouden zijn.

Is het niet eerder het praktijkgebruik dat bepaalt welke notatievormen regulier zijn en welke afwijkend?

Historie

De door velen als 'geldend recht' beschouwde MVDWOA-wet is door talloze Nederlandse leerboekauteurs vermeld. Deze 'wet' lijkt oorspronkelijk ontleend aan een appendix in de leer-, hand- en theorieboeken *Rekenkunde* van J. Versluys (1845-1920), voor het eerst in 1875.
Het *toenemen* van de status van die wet is min of meer gelijk opgegaan met het meer en meer *weglaten* van de kanttekeningen dat Versluys:

- expliciet wees op uitzonderingen in 'bijzondere gevallen', helaas zonder die precies af te bakenen
- *niet* het oog had op expressies met de, toen nog niet of nauwelijks voorkomende, schuine breukstreep
- zich wat betreft optellen en aftrekken domweg vergiste
- voor de vermenigvuldiging, de worteltrekking en de logaritmeneming een prioriteit koos die afweek van de volgorde die bij een aantal tijdgenoten van hem te vinden is en die ook (mede daardoor?) nooit algemeen gangbaar is geworden
- zijn (veelgebruikte) boeken schreef in een tijd waarin het onderscheid tussen de begrippen 'getal' en 'grootheid' nog op een wat andere plaats gedacht werd dan in de gangbare moderne opvatting. Men sprak vroeger van wortel-'grootheden'. En ook verhoudingen, speciaal ook de goniometrische 'verhoudingen', werden niet altijd opgevat als 'gewone' getallen.

H. N. Pot, Tournoysveld 67, 3443 ER Woerden

Cursus achtergronden van de meetkunde in het nieuwe vwo-programma

Omschrijving
In de Meetkunde die in het profiel Natuur en Techniek van de VWO-top zijn gereserveerd, komen traditionele onderdelen van de vlakke meetkunde en moderne toepassingsgebieden verweven aan bod. Ook verbindingen tussen meetkunde en analyse worden gelegd.

In deze nascholingscursus wordt vooral ingegaan op de wiskunde zelf, maar ook zullen de eerste ervaringen met het programma ter tafel komen. De inhouden van het nieuwe programma worden daarbij geplaatst in het kader van wiskundige ontwikkelingen van de twintigste eeuw.

Cursusvorm
Presentaties, practica, discussies, maken van opgaven tussen de cursusmiddagen.

Cursusleiding
Aad Goddijn, medewerker ontwikkelteam wiskunde in de nieuwe profielen, Freudenthal instituut.
Dirk Siersma, hoogleraar wiskunde Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht.

Duur en data
Vier middagen, van 15.00-18.00 uur op de dinsdagen 29 oktober, 12 november, 26 november en 10 december 1996.

Plaats
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Budapestlaan 6, Uithof, Utrecht.

Prijs
f 300,– ; inclusief cursusmateriaal, koffie, thee.

Aanmelding
Vakgroep Wiskunde t.a.v. K. Schoenmaker
Universiteit Utrecht, Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht
Telefoon: 030 -2531430, fax: 030 -2518394
email: vakgroep@math.ruu.nl