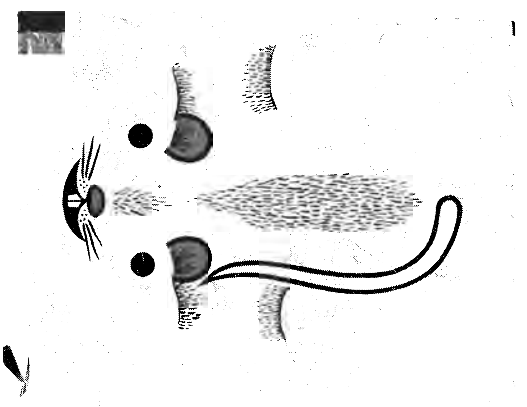
Als het goed is, ontvangt u deze Nieuwe Wiskrant vlak voor Kerstmis. Sinterklaas zal zeker al achter de rug zijn. **Aad Goddijn** schrijft zijn recreatierubriek dit keer geheel in decembersfeer.

Een inkrinkeling voor de donkere dagen

recreatierubriek

Mierzoete inkrinkelingen

Heeft u ook zo'n lekkere muis in uw schoen gevonden? Chocola van buiten, mierzoete witte brij van binnen en dicht in het zilverpapier. Haal het zilverpapier er eens hééI voorzichtig af en wrijf het zorgvuldig glad. Het beste gaat dat met de duimnagel en met het zilverpapier op een krant. Als het niet scheurt, kan het er zo uit gaan zien:



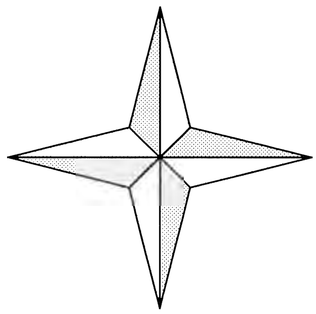
Wat heeft dit zilverpapiertje niet allemaal ondergaan! Koude machineonderdelen – heus geen zachte handen meer in 1996 – krinkelden het papiertje om het nekje, bogen de randen om staart en pootjes, drukten het rimpelig tegen de chocoladehuid. Maar nergens werd er ook maar een honderdste van een marsepeinen millimeter opgerekt. Scheuren was er niet bij.

Scherper, wiskundiger: de afstand tussen willekeurig welke twee plekken van het zilverpapier werd tijdens het inpakken hoogstens kleiner, nooit groter.

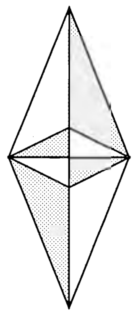
Probeer de muis zelf maar eens in te pakken. Omdat in de dierentuin van Sinterklaas staarten en poten dicht tegen het lijfje worden gedrukt, valt dat wel mee. Ook auto's en eendjes zijn nogal compact, zie de illustraties onder op de bladzijde. Om er een puzzel van te maken, gaan we over naar de tweede sfeer van december, kerst.

Een ster aankleden

In vóór- en zijaanzicht is hier een lekker dikke vierpuntige chocolade kerstster. De 16 vlakjes zijn vlak, de maten kunnen in de tekening opgemeten worden.



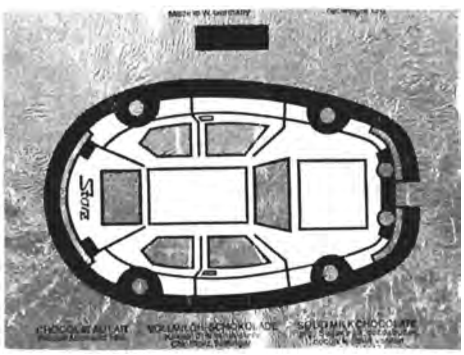
vooraanzicht

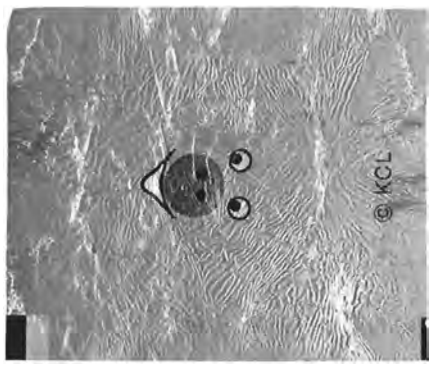


zijaanzicht

Opgave 150

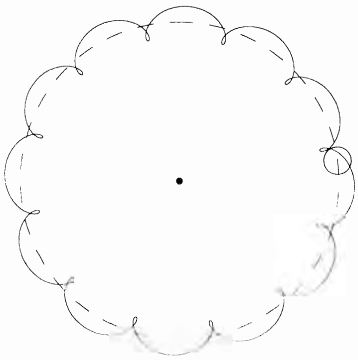
De ster moet in een vierkant stuk zilverpapier worden ingepakt. Hoe groot moet dat vierkant zijn?



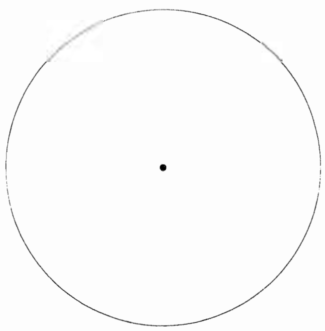


Binnenwaartse buitelingen?

De maan schijnt door de bomen, maar haar rust is bedriegelijk. Elke 27 dagen haast ze zich om de aarde (van ster tot zelfde ster) en samen met de aarde is er nog de rondedans in 365 dagen om de zon. Zo bijvoorbeeld?

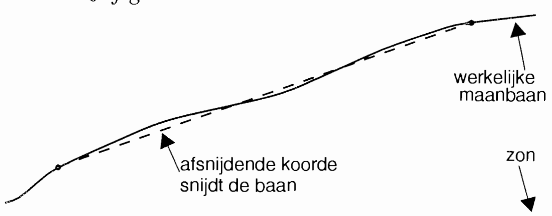


Die tekening is niet in verhouding. De afstand van de aarde tot de zon is 150 miljoen kilometer, van de maan tot de aarde slechts 385000 kilometer.
Nu een tekening met redelijke verhoudingen:

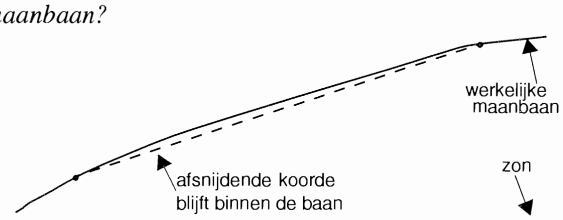


Alleen is daar weer nauwelijks de maanbaan van de aardbaan te onderscheiden. Vandaar de opgave:

Opgave 151
Zou de maan echt een binnenwaartse buiteling maken, zoals in deze figuur?

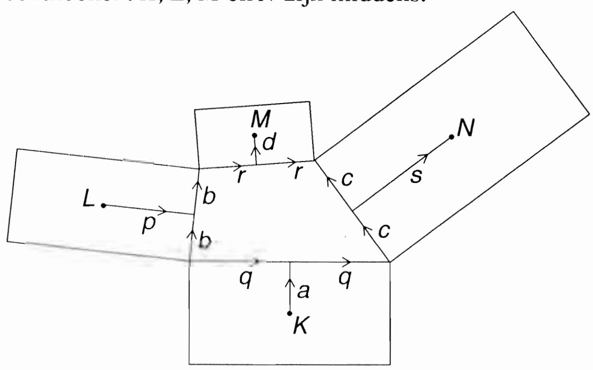


Of is de maanbaan convex, dat wil zeggen elke koorde van twee punten op de maanbaan ligt geheel binnen de maanbaan?



Terugblik op vierhoek, opgave 148

Hessel Pot demonstreerde in enkele regels de kracht van de vectormeetkunde en de transformatiemeetkunde. En zijn handigheid met deze middelen!
Eerst een figuur. Een vierhoek met vier gelijkvormige rechthoeken. K, L, M en N zijn middens.



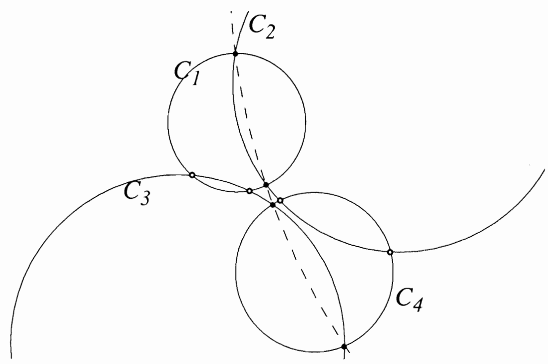
Er zijn twee routes van K naar M en twee van L naar N:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{KM} &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{KM} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{KM} \\
&= \tfrac{1}{2}(a + q + 2c - r + d) + \tfrac{1}{2}(a - q + 2b + r + d) \\
&= a + b + c + d \\
\overrightarrow{LN} &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{LN} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{LN} \\
&= \tfrac{1}{2}(p + b + 2r - c + s) + \tfrac{1}{2}(p - b + 2q + c + s) \\
&= p + q + r + s
\end{aligned}
$$

Nu zijn de vectoren p, q, r en s draaistrekkingen van respectievelijk de vectoren b, a, d en c, allen met dezelfde draaihoek 90° en dezelfde strekfactor. Maar dan is ook $\overrightarrow{LN}$ een draaistrekking met draaihoek 90° en dezelfde strekfactor van $\overrightarrow{KM}$. Klaar!
Hessel Pot verwijst verder over deze Van Aubel-stelling naar het Vlaamse tijdschrift *Wiskunde en Onderwijs*, jrg. 20, 1994 en *Pythagoras*, jrg. 25, aflevering 1, 2 en 5.
Hij weet dat de stelling in 1870 bekend was (Emile Francoise) en blijft benieuwd naar andere verwijzingen.

Terugblik op vier cirkels, opgave 147

Te bewijzen was dat in deze figuur de zwarte en de witte punten tegelijk wel en niet op cirkels liggen.



Er blijken veel mogelijke bewijzen te zijn.

Jan van der Craats (telefonisch): 'Werk ruimtelijk. Projecteer stereografisch. Je krijgt vier cirkels op een bol B, de vier beeldcirkels liggen ieder in een eigen vlak; noem die vlakken even v_1, v_2, v_3 en v_4. Als de vier zwarte punten op een cirkel liggen, liggen hun beelden op B ook op een cirkel en liggen dus in één vlak, noem dat z. Blijkbaar gaan de lijnen $v_1 \cap v_2$ en $v_3 \cap v_4$ door één punt, dat in z ligt. Maar dan gaan ook $v_1 \cap v_3$ en $v_2 \cap v_4$ door datzelfde punt en bepalen dus een vlak, zeg w. De snijcirkel van w met B wordt bij terugprojecteren de cirkel door de witte punten.'

Een fraaie oplossing die enige kennis van de stereografische projectie veronderstelt. Bij stereografische projectie worden de punten van de bol vanuit de 'noordpool' van de bol geprojecteerd op het vlak door de 'evenaar' van de bol. Hierboven wordt eerst de inverse afbeelding gebruikt en aan het eind de afbeelding zelf. Gebruikt is de belangrijke eigenschap: cirkels blijven cirkels.

Agnes Verweij: 'Gebruik het begrip macht van een punt P ten opzichte van een cirkel.'

Weer moet nu kort wat voorkennis worden medegedeeld! Ik zie daarbij af van 'vervelende' gevallen, waarin cirkels samenvallen, wanneer er middelpunten op één lijn liggen, enzovoort.

Met 'macht van een punt P ten opzichte van een cirkel' wordt bedoeld: trek een lijn door P die de cirkel in A en B snijdt. De macht van P ten opzichte van de cirkel is nu het product $\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}$, waarvan bewezen kan worden dat het niet van de gekozen lijn afhangt.

Hoofdeigenschappen:

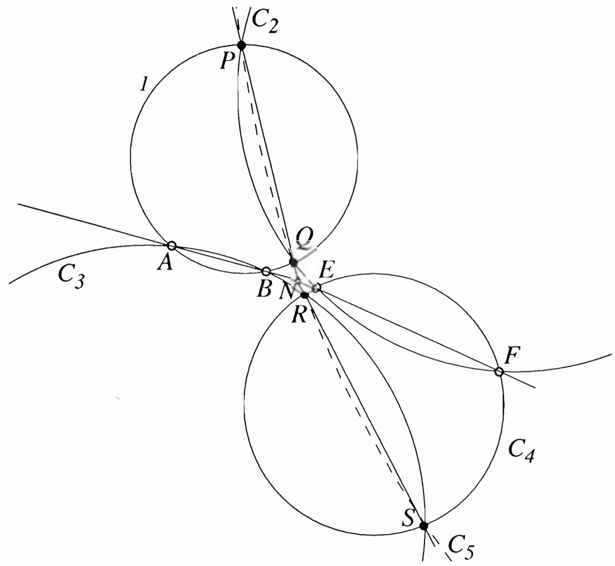
- de punten met gelijke macht ten opzichte van twee cirkels liggen op een rechte lijn, de machtlijn van die cirkels. (Als de cirkels snijden, is de machtlijn de lijn door de snijpunten.)
- de drie machtlijnen van drie cirkels gaan door één punt.

Nu het bewijs van Agnes Verweij. Zie de figuur in de volgende kolom.

De zwarte punten liggen op een cirkel C_5. Nu gaan de machtlijnen van C_1, C_3 en C_5 door één punt M en die van C_2, C_4 en C_5 door één punt N. Die twee drietallen machtlijnen hebben twee machtlijnen gemeen; in de figuur zijn dat PQ en RS. Dit leidt tot de conclusie dat $M = N$ en uiteindelijk tot $\overrightarrow{NA} \times \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NE} \times \overrightarrow{NF}$. Uit dat laatste volgt dat A, B, E en F op één cirkel moeten liggen; daar zit natuurlijk ook weer een stelling over machten achter, die bewezen moet worden.

Wie denkt dat deze oplossing hemelsbreed verschilt van de vorige, moet de figuur van de vier cirkels en lijnen maar in het bewijs met de stereografische projectie gaan terugzoeken. Er zijn nog wel andere mogelijkheden.

Werken met inversie vanuit een van de snijpunten. Dit leidt onvermijdelijk ook tot gebruik van machten en ik werk dat hier niet meer uit. Omdat ik en mijn buurman dit probeerden tijdens de lezing op het ICME congres in Se-



villa waarin Adrien Douady het probleem presenteerde, kan ik Douady's oplossing niet goed weergeven. Maar de titel van zijn lezing was: 'Reasoning in parameter spaces'. Daarom vermoed ik dat het ongeveer het volgende was:

Neem aan dat de zwarte punten op een cirkel liggen. In de bundel cirkels door de snijpunten van C_1 en C_2 zit een exemplaar dat ook in de bundel cirkels door de snijpunten van C_3 en C_4 ligt. Laten de vergelijkingen $C_1 \equiv 0$, enzovoorts, zijn.

Er zijn dus getallen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 (niet allemaal 0), zodat:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \equiv \lambda_3 C_3 + \lambda_4 C_4$$

Handig verwisselen levert weer een bewering over twee cirkelbundels, die we nu kunnen interpreteren als: de witte punten liggen op een cirkel:

$$\lambda_1 C_1 - \lambda_3 C_3 \equiv \lambda_4 C_4 - \lambda_2 C_2$$

(In deze oplossing is heel duidelijk dat we steeds met 'cirkel of lijn' kunnen/moeten werken in plaats van 'cirkel'.)

Terugblik op 144, 145 en 146: iteraties

Er kwamen zeer uitvoerige reacties binnen op de opgaven 144 tot en met 146, over itereren van functies als

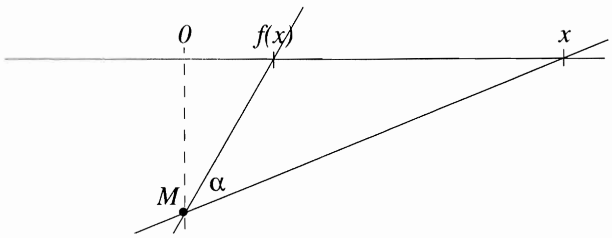
$$f: x \to \frac{ax + b}{cx + d}$$

Gevraagd werd als eerste bij elk gegeven natuurlijke getal n coëfficiënten a, b, c en d te vinden, zodat het iteratieproces een n-cyclus heeft.

Het is niet mogelijk alle reacties in detail te bespreken. Ik geef slechts hoogtepunten en eindresultaten van het uitgebreide zoeken dat verspreid heeft plaatsgehad.

Diverse mondelinge inzendingen wezen direct op het begrip rotatie. Ik volsta hier met het geven van het idee in de vorm van een illustratie en een formule.

Neem een vaste hoek α, een getallenlijn en een rotatiecentrum M op afstand 1 van de oorsprong van die getallenlijn. De figuur geeft aan hoe $f(x)$ van x afhangt.



Enig rekenwerk leidt tot:

$$f(x) = \frac{x\cos\alpha - \sin\alpha}{x\sin\alpha + \cos\alpha}$$

Als we nu $\alpha = \frac{\pi}{n}$ kiezen, geeft n keer itereren van f een draaiing over π, dat is de identieke afbeelding.
Deze oplossing houdt zich aan mijn suggestie vooral te kijken naar functies van de vorm

$$f\colon\ x \rightarrow \frac{ax - b}{bx + a}$$

Bijzonder fraai vind ik hoe Jan Postma geheel buiten de meetkunde om op dezelfde oplossing uitkomt.
Hij stelde $c = a/b$ en gaat gewoon geïtereerden f_n van

$$f\colon\ x \rightarrow \frac{cx - 1}{x + c}$$

uitrekenen. Dat zijn allemaal functies van het type:

$$f_n\colon x \rightarrow \frac{px - q}{qx + p}$$

De p en q moeten in c uitgedrukt worden, uiteindelijk moet $q = 0$ naar c opgelost worden. Jan Postma herkent in die uitdrukkingen termen van het binomium van Newton. De even termen zitten in de formules voor p, de oneven in die voor q. Er gebeurt ook nog iets merkwaardigs met mintekens. Hij vindt uiteindelijk dit:

$$f_n\colon\ x \rightarrow \frac{Re(1-ci)^n x + Im(1-ci)^n}{-Im(1-ci)^n x + Re(1-ci)^n}$$

We staan intussen kniediep in het complexe vlak en wie overeind blijft vindt wel:

$$f_n\colon \qquad x \rightarrow \frac{x - \tan(n\arctan(c))}{x\tan(n\arctan(c)) + 1}$$

Gekozen kan nu bijvoorbeeld worden: $c = \tan(\frac{\pi}{n})$, want dan is f_n de identieke functie.
Bij een eerste poging van professor Van der Blij ging het rekenwerk dezelfde kant uit: via het binomium van Newton en de formule van de Moivre teller en noemer bepalen. Ook hier lukte het slechts gedeeltelijk iets te vinden dat er op wijst dat oplossingen met rationale a en b uiterst schaars zijn; dat was opgave 144.
Ik toonde daarop Van der Blij de resultaten die intussen door E.C. Buissant des Amorie waren gevonden. Die hield zich niet aan gesuggereerde beperkingen en vond zoekend en rekenend vele f's met gehele coëfficiënten die periodiciteit bij iteratie opleveren. Ook hier werd het iteratieproces handig in kaart gebracht door goed overzicht te houden op de algebraïsche bewerkingen.
Deze eerste twee formules hieronder leidden respectievelijk tot perioden 3 en 4; de derde heeft periode 5, maar heeft helaas geen rationale coëfficiënten.

$$\frac{3x-1}{7x-2} \qquad \frac{3x+1}{17x+5} \qquad \frac{3x+8\sqrt{5}-21}{x+1}$$

Dit prikkelde mij dom zoekwerk te laten doen door de computer. Ook die vond veel voorbeelden met gehele coëfficiënten met periode 2 (de lezer bewijze overigens zelf dat $a + d = 0$ daarvoor een voldoende voorwaarde is), periode 3, 4 en 6. Maar niet met periode 5!
Hier zijn bijvoorbeeld drie voorbeelden met periode 6:

$$\frac{3x+3}{-13x+12} \qquad \frac{6x-7}{3x+9} \qquad \frac{9x+13}{-3x+12}$$

(Er zijn er meer dan 500 met coëfficiënten onder de 20).
Een andere ingang is het samenstellen van gebroken lineaire functies te vergelijken met vermenigvuldigen van 2 bij 2 matrices. De samenstellingsregels zijn dezelfde.
Van der Blij werkt nu verder als volgt:
Zij F de matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Een macht van F moet de identieke matrix worden, dus $F^n = I$. Herschrijf F als $U^{-1}GU$, waarin G de diagonaalvorm heeft en U een orthogonale transformatie is. De getallen op de diagonaal van G moeten eenheidswortels zijn, (complexe getallen z met $z^n = 1$) want ook voor G geldt $G^n = I$.
Uiteindelijk worden, na diverse niet zo eenvoudige algebraïsche stappen, alle mogelijkheden gevonden. Alleen periodes 2, 3, 4 en 6 zijn mogelijk.
Dit is het grand totaal van Van der Blij:
Voor functies met periode 3 moet de matrix er zo uit zien:

$$\begin{pmatrix} AC & -A^2 + A - 1 \\ C^2 & C - AC \end{pmatrix}$$

Daarin moeten de getallen A en C zo gekozen worden dat de vier getallen geheel zijn.
Voor periode vier is de volgende serie gevonden:

$$\begin{pmatrix} 2AC & -2A^2 + 2A - 1 \\ 2C^2 & 2C - 2AC \end{pmatrix}$$

en voor periode zes:

$$\begin{pmatrix} 3AC & -3A^2 + 3A - 1 \\ 3C^2 & 3C - 3AC \end{pmatrix}$$

Nederig narekenen leerde mij dat veel eerder gevonden oplossingen aan deze formules voldoen.
Kan vraag 144 nu ook beantwoord worden? Ik denk van wel!