

Danny zit in de zesde klas van het Cals College. Ze volgt het experimentele wiskunde B programma dat ontwikkeld wordt voor de N-profielen van het vwo. **Michiel Doorman** sprak met haar.

Danny

Introductie

Wie is zij? Waarom dit interview? Waarom met haar? Ik heb Danny Dullens gevraagd het gesprek voor te bereiden en het materiaal waarmee ze in de wiskundeles heeft gewerkt nog eens te bekijken. Dat ze dit gedaan heeft, blijkt wel uit haar uitgebreide antwoord op mijn eerste vraag.

Het interview

Je zit nu in de zesde klas van het Cals College in Nieuwegein. In plaats van wiskunde B heb je het experimentele wiskunde programma voor de profielen N&T en N&G gevolgd. Wat vond je van de afgelopen twee jaar?

Ik vond het leuk om te doen. Bij wiskunde kreeg je vroeger een regel, en dan was de opdracht: pas hem maar toe, verzin er maar wat leuks mee. Maar nu krijg je meer: wat zit er achter? En hoe komen ze eraan? Dat vind ik leuk om te weten. Niet dat je domweg regeltjes hoeft toe te passen, want dat kun je ook bij natuurkunde doen. Je leert nu verder gaan met de wiskunde, je bent er echt mee bezig, je moet erover nadenken. Eerst mocht je doen wat je wou, als je je maar aan de regels hield.

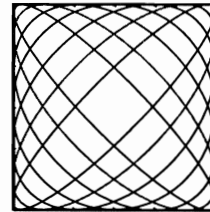
Bijvoorbeeld bij het tekenen van grafieken moest je eerst een tabelletje maken, dan nulpunten vinden, enzovoort, dat vond ik altijd zo saai. Dat vind ik ook zo mooi van die

grafische rekenmachine tegenwoordig. Waarom zou je dat allemaal onderzoeken? Dat je de technieken weet? Oké, soms is dat handig als je iets niet precies uit de grafiek kunt aflezen. Maar je hebt in ieder geval een idee waar je moet zitten en hoe je moet denken. Je kunt dan dieper op de stof ingaan. Zo kregen we bijvoorbeeld met sinussen en cosinussen een zijstapje naar Lissajoux figuren. Dat vind ik wat origineler, niet zo saai en zo droog.

1 Gegeven zijn de bewegingsformules

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin(t - a) \end{cases}$$

Maak hiermee het volgende plaatje na op je grafische rekenmachine.



2 Een punt beweegt zich volgens

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin(2t - a) \end{cases}$$

Laat de waarde van a variëren en maak een serie schetsen waaruit blijkt hoe de vorm van de 'vlinde'rs' afhangt van de waarde van a .



In plaats van het gewone boek werken jullie met pakketjes. Hoe vind je de presentatie van die pakketjes?

Er stond weinig concrete theorie in. Het zat meer door de opgaven heen. Dat leert op zich vrij moeilijk. Hoewel moeilijk, voor mij persoonlijk niet echt, maar ik hoor dan van anderen dat ze het hele pakketje opnieuw gingen maken voor het schoolonderzoek. Voor mij werken die pakketjes wel, maar niet voor iedereen dus.

Ze beginnen meestal met een praktijkvoorbeeld, niet gelijk met de theorie, dat vond ik wel goed. In het begin open en eerst zelf nadenken. Een makkelijk sommetje, waarbij je een idee kunt opdoen. Daarna wordt uitgelegd

hoe het in elkaar zit. Ik vind het leuk dat ik eerst zelf mag bedenken hoe ik het had opgelost als de oplossing onbekend was. Bijvoorbeeld de productregel bij differentiëren. Je weet niet hoe het moet. Eerst ga je eens nadenken, misschien moet je de afgeleides optellen? En dat ga je dan aan de hand van voorbeelden onderzoeken en dan krijg je een idee. Bij Voronoi-diagrammen was het ook zo dat je eerst op de computer met die meetkundeprogramma's (Cabri en Voronoi) zelf situaties ging uitzoeken en dan aan de hand daarvan het bewijs ging opstellen. Dan weet je ook van jezelf of je goed of fout hebt gedacht.

Ik vind het wel goed dat je zo het idee erachter krijgt. Dat krijg je bij andere vakken altijd al, maar bij wiskunde had ik nooit het idee dat je ook iets erachter kreeg. Je kreeg het gewoon. Alleen stonden sommige pakketjes vrij op zichzelf. Dan moet je ineens verbanden leggen. Wij kregen op het schoolonderzoek een opgave met Voronoi en conflictlijnen door elkaar. Je moest dingen van conflictlijnen gebruiken om een iso-afstandlijn te tekenen. Dat was wel even nadenken. Die verbanden zijn wel te leggen, maar dat vond ik in de boekjes niet duidelijk naar voren komen. Ik zag het meer als twee aparte dingen. Natuurlijk, je weet wel dat er verband is. Je ziet punt en grens, maar veel dieper vond ik het verband niet gaan. Het pakketje *Conflictlijnen* ging meer over ellipsen en parabolen. Bij Voronoi had je dat niet gehad, daar was het alleen rechte lijnen tekenen, dit is iets anders. Terwijl het eigenlijk in elkaar over loopt, dat merkte ik dus op het schoolonderzoek.

Getekend is een kustlijn met een inham. De iso-afstandlijnen in deze inham kunnen bestaan uit alleen rechte lijnen maar het is ook mogelijk dat delen van deze iso-afstandlijnen 'krommen' zijn. Er is maar een klein gebied waar de iso-afstandlijnen gebogen zijn.

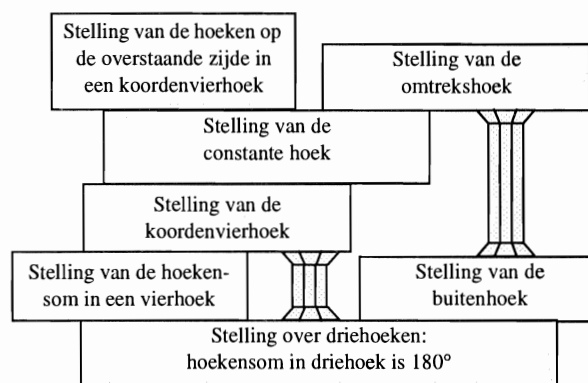
Geef in de tekening aan in welk gebied de iso-afstandlijnen krommen zijn. Zet in de tekening bij elke lijn wat voor type lijn het is.

Voronoi zie jij als een apart onderwerp? Eigenlijk is het meer als context/instap bedoeld.

Ik had meer het idee dat het echt een apart onderdeel was. Wel komen de begrippen naar voren zoals middelloodlijn en deellijn, maar dat weet je eigenlijk al van de tweede klas. En er wordt in het pakketje wel uitgelegd wat je ermee kan.

Eén van de uitgangspunten van het materiaal is om de geschiedenis van de wiskunde te gebruiken.

In al die differentiaal- en integraalpakketjes kwam er wel iets van terug: zo is het in 1600 gedaan, of in 1700 heeft iemand dat bedacht. En hoe wordt het dan nu gedaan? Dat moesten wij dan verzinnen. Het oude bewijs werd gegeven en dan moesten wij het nieuwe bedenken. Maar dan kon je wel aan de hand van dat oude bewijs redelijk het nieuwe bewijs opstellen. Ik vind dat best goed. Vroeger waren ze natuurlijk ook niet dom. Zij waren toen nog niet zo ver en wij zijn nu ook nog niet zo ver. Zo kan je zelf dingen eerder zien, omdat het er net iets anders staat en iets simpeler vaak dan nu. Soms is het bijna Grieks, maar dan kun je er wel dingen uithalen. En het is ook best geïnteressant om te ontdekken wat ze vroeger hebben gedaan.



Bij meetkunde is ook aandacht besteed aan de samenhang tussen stellingen, het bouwwerk van de wiskunde. Dat werd geïllustreerd door een plaatje met stellingen en zuiltjes. (In een herziene versie is dit plaatje vervallen.)

Voor mij was dat niet helemaal duidelijk. Wij moesten dat bouwwerk aanvullen en ik heb gewoon wat getekend. Daarbij heb ik niet geredeneerd, maar teruggebladerd. Als je eenmaal iets weet, dan gebruik je dat gewoon, dat neem je gewoon aan. Je bedenkt niet "dat heb ik ook ooit bewezen". Op zich is het wel goed dat je weet: als die stelling niet klopt, dan valt de rest ook in elkaar. Of: vanuit daar kun je verder naar iets anders.

Bij koordenvierhoeken vond ik het wel duidelijk. Daar kreeg je eerst stellingen die je ging bewijzen en dan ging je aan de hand daarvan weer verder. Bij Voronoi-diagrammen kon je er ook nog met je passer en je liniaal achter komen, als je iets niet kon bewijzen. Dat kon bij koordenvierhoeken niet, dan moest je echt zelf nadenken: "ik heb die stelling en als ik dat in combinatie met een andere stelling neem, dan kom ik op iets nieuws uit". Dan moet je wel degelijk verbanden kunnen leggen.

Ik denk dat ik nu wel weet hoe ik dingen moet bewijzen. Dat kon ik eerst echt niet. Je kreeg gewoon iets, gebruik het maar.

Wat vind jij het verschil tussen redeneren en bewijzen?

Bij redeneren speculeer je wat, dan verzijn je iets. Maar bij bewijzen zeg je echt: "zo is het en niet anders." Redeneren, daar kun je nog wel iets tussen verzinnen van waarom wel of waarom niet, er bestaat nog een beetje twijfel. Bewijzen is echt dat het zwart op wit staat. Bij re-

deneren mag je doorschrijven, dan hoef je niet aan te geven waar je het vandaan hebt. Je neemt soms deelverzamelingen, terwijl bij bewijzen het echt voor alle waarden moet gelden. Dan moet je soms rekening houden met dingen waarvan je in eerste instantie denkt “moet ik daaraan denken?”

Wanneer doe je het een en wanneer het ander?
Ligt eraan wat er gevraagd wordt.

Wat vind je leuker?

Redeneren. Bewijzen is moeilijker. Bewijzen is ook leuk, maar als je er niet uit komt... Bij redeneren ben je wat vrijer. Ik vind bewijzen op zich best leuk, maar dan moet je wel het bewijs in één keer zien, want als je eenmaal verkeerd begint, dan loop je vast. Bij redeneren kun je nog wel ergens omheen praten of zo, dan kun je iets overslaan. Bij bewijzen moet je die tussenstappen allemaal geven.

Wat vond je het meest vervelende pakketje?

Het eerste met die sigma (*Oppervlakte en raaklijn*). Dan moesten we van een sigma naar een delta en van delta weer naar sigma, en dan ineens moest je een sigma om kunnen schrijven in een delta.

7b Toon met algebra aan dat geldt:

$$\sum_{k=0}^{k+1} x^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

(.)

Bekijk de functie $S(x) = x^3$ op het interval $[0, n]$.

19 Verklaar nu uit het resultaat van opgave **7b** van hoofdstuk 4 dat geldt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (3k^2 + 3k + 1) = n^3$$

Opgave **19** geeft de mogelijkheid om een formule te vinden voor

$$\sum_{k=0}^n k^2 \dots\dots$$

Bij economie heb ik voor het eerst dat sigma-teken gezien, maar hoe je ermee moest werken? Ik had het nog nooit gedaan en ze gooien het er gelijk in. Het was een nieuwe methode, hoe werken ze? Wat willen ze? Hoe bouwen ze het op? Je kent niet wat je krijgt en je weet niet wat het is. Nu moest je aan twee dingen gelijk wennen. Het was wel een voorbereiding naar integreren en naar rijen en limieten. Ik denk dat ik liever eerst differentiëren had gedaan, dat kende ik al. Wel vond ik goed dat het vóór het pakketje integreren kwam. Eerst met boven-schatting en onderschatting en daarna ga je echt het preciese werk doen.

Wat vind je van de formulekaart die je ook bij proefwerken en op het examen mag gebruiken?

Dat vind ik goed, want ik vind het op zich onzinnig om al die formules uit het hoofd te leren als je het toch ergens kunt opzoeken. Voor natuurkunde bestaat er ook een binas met een lijstje formules. Door gebruik weet je ze wel, maar het is handig als je het bij je hebt. Ik zie het nut er niet van in als je dat gewoon kan reproduceren.

Hoe denk je dat je docent Ramiro Wanga het vond?

Ik denk dat hij het wel leuk vond. Weer eens iets anders. De oude methode kende hij bijna uit z'n hoofd. Ik vind hem echt zo'n onderzoekend persoon. Hij houdt van raadgefs en dingen die hij niet weet. De wiskunde-Olympiade doet hij ook altijd aan mee.

Heb jij ooit meegedaan aan de wiskunde-Olympiade?

Ja in de vierde, toen had ik vier punten of zo. Dat was gewoon een beetje lollig. En met de wiskunde A-lympiade heb ik meegedaan. Dat was voor ons verplicht in de vijfde (bij wiskunde A). Toen hebben we de finale gehaald. Dat vind ik wel leuk, maar het moet wel een keuze blijven, omdat je in groepsverband moet werken. De wiskunde A-lympiade kun je niet alleen doen, dat red je gewoon niet. Dan ben je altijd afhankelijk van anderen. Als je daarvoor kiest, prima. Maar er zijn sommigen die liever iets alleen doen, die willen zelf verantwoordelijk zijn voor hun cijfer. Ik vind op zich wel goed dat het gedaan wordt. Dan gaan toch meer mensen denken dat het geinig is om eens iets te onderzoeken. Dingen waarvan ze denken “oh, lekker simpel.” Als ze vervolgens daarmee aan het werk gaan, merken ze dat het best moeilijk is. En dan willen ze het toch weten. Ik denk dat je daarmee interesse van mensen kan krijgen, van “hoe zit het nou?” Wij hadden die opgave met die liften: hoe kom je het snelst met de liften naar boven? En dan kom je er toch achter dat dat via wiskunde moet en dat is leuk. Je bent meer met wiskunde bezig dan je eigenlijk zou verwachten als je naar het probleem kijkt. Dat vind ik heel verrassend.

Waarom ga je wiskunde studeren?

Waarom ga ik wiskunde studeren? Ik weet het niet, ik vind het gewoon leuk. Ik vind het een hele moeilijke vraag. Waarom vind je iets leuk?

Wat stel je je van de studie voor?

Verder ingaan op dingen die je nu hebt en nieuwe dingen onderzoeken. Dat je dingen gaat bewijzen die je nu hebt aangenomen. Wat zit erachter? Dat vind ik interessant. Of als je een uitkomst krijgt waarvan je zegt: “goh, dat had ik nooit verwacht...” Als ik eenmaal met een bewijs bezig ben en ik kom er niet uit, dan ben ik echt zo van: nu wil ik het weten! En dan ga ik eraan zitten. Met andere vakken heb ik dat niet zo sterk, dan denk ik dat vraag ik morgen wel. Ik vind ze wel leuk, maar niet zo dat ik echt zeg: “nu wil ik weten hoe het zit.” Dat heb ik bij wiskunde wel. □