

De opvolger van de grafische rekenmachine dient zich alweer aan. Aan de hand van het gewichtige probleem van l'Hôpital laat **Paul Drijvers** zien hoe de TI-92 gebruikt kan worden bij zowel een meetkundige als een algebraïsche benadering van dit probleem.

## Oude wiskunde en nieuwe technologie

### Inleiding

Terwijl de invoering van de grafische rekenmachine in de tweede fase van HAVO en VWO in 1998 werkelijkheid lijkt te worden, dient zich de opvolger al aan: de symbolische calculator. Zo'n machine kan ook algebraïsche bewerkingen uitvoeren. Een van de representanten van deze nieuwe generatie is de TI-92, waarin het algebra-pakket Derive en het meetkundeprogramma Cabri zijn ingebouwd. In [1] en [2] schreef ik eerder over de TI-92.

Dit artikel beschrijft hoe een historisch wiskundig probleem op verschillende manieren met de TI-92 kan worden aangepakt. Dit 'gewichtige' probleem is enkele jaren geleden door Jan van Maanen gebruikt bij een mondeling schoolonderzoek (zie [3] en voor de historische achtergronden [4]). Recent is het vraagstuk als onderzoeksopdracht opgenomen in het PROF1-pakket *Optimaliseren* ([5]). De manier waarop het probleem in dit artikel wordt behandeld staat daar overigens los van; dit verhaal beoogt slechts aan de hand van een interessant voorbeeld verschillende facetten van een mooie machine te illustreren.

### Het gewichtige probleem

In 1696 publiceerde markies De L'Hôpital zijn boek *Analyse des infiniment petits* [6]. Het bevatte grotendeels werk van L'Hôpital's privé-docent, Johann Bernoulli. De aantekeningen die Bernoulli in 1691-1692 maakte ter voorbereiding van zijn lessen aan de markies zijn bewaard gebleven. Daarin is het gewichtige probleem al te vinden (zie [7], pp. 32-33). Kennelijk heeft Bernoulli het probleem bedacht, zoals hij ook de regel ontdekte die nu bekend staat als de stelling van L'Hôpital. L'Hôpital had zich namelijk tegen betaling het recht verworven om Bernoulli's ontdekkingen te publiceren.

Het gewichtige probleem staat niet zonder reden in *Analyse des infiniment petits*. In de zeventiende eeuw was de differentiaalrekening ontwikkeld. Veel wiskundigen waren echter nog niet overtuigd van de kracht ervan, in vergelijking met de tot dan toe gebruikelijke meetkundige methodes. Het gewichtige probleem had de bedoeling om die kracht op overtuigende wijze aan te tonen.

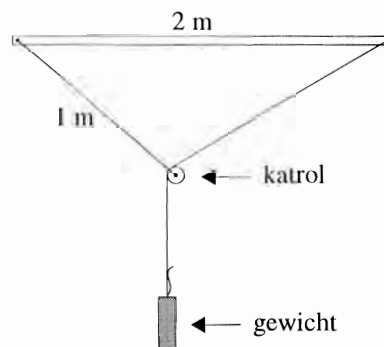


fig. 1 De proefopstelling

Aan de linkerkant van een horizontale balk van twee meter lang is een touw bevestigd van één meter lengte. Dit touw eindigt in een katrol. Aan de rechterkant van de balk zit een tweede touw van drie meter lang. Dit touw loopt door de katrol en aan het einde ervan hangt een gewicht. Wanneer men de katrol beweegt en dan loslaat, zal het systeem een evenwichtstoestand opzoeken, dat wil zeggen de situatie waarin het gewicht zo laag mogelijk hangt. De vraag is nu: wat is de laagst mogelijke positie van het gewicht?

### Meetkundige simulatie

Laten we dit probleem met de TI-92 aanpakken. Bij wijze van oriëntatie bekijken we eerst een meetkundige simulatie van het systeem (zie figuur 2). In de appendix aan het einde van dit artikel staan stap voor stap de constructies beschreven die tot dit model leiden.

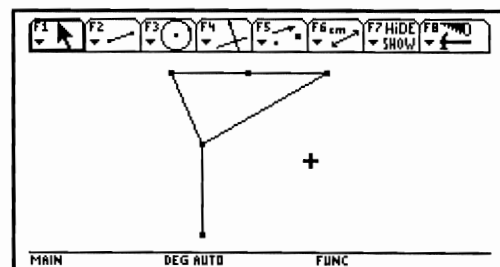


fig. 2 De Cabri-simulatie

De simulatie is gemaakt met Cabri, een programma voor

interactieve meetkunde. Het interactieve karakter komt in de volgende figuur tot uitdrukking: met een speciale toets kan men het 'katrol-punt' verslepen en onderzoeken welke gevolgen dat heeft voor de positie van het gewicht, die namelijk gelijktijdig mee verandert.

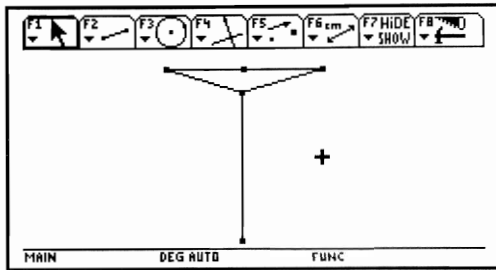


fig. 3 Verplaatsing van de katrol

Desgewenst kan het gewicht ook een spoor nalaten tijdens de beweging. Nog dynamischer is een animatie, waarbij de katrol-punt over een cirkel beweegt, terwijl het gewicht zich als gevolg daarvan verplaatst. Dat is op papier helaas niet te demonstreren.

De optie LOCUS geeft de baan die het gewicht beschrijft wanneer de katrol de cirkel doorloopt. Het resultaat is figuur 4.

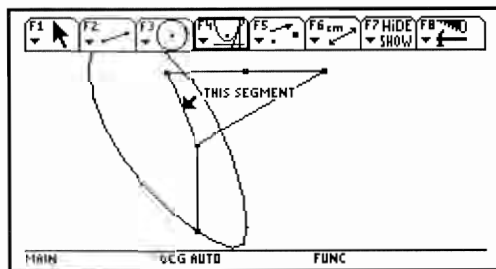


fig. 4 De baan van het gewicht

Natuurlijk wordt slechts een deel van deze 'sigaar-vormige' kromme werkelijk door het gewicht doorlopen. De katrol zal immers niet de zwaartekracht trotseren en boven de balk uitkomen. Om deze complicatie verder te vermijden, nemen we aan dat de katrol niet aan een touw maar aan een dun staafje zit, zodat het een volledige cirkel kan doorlopen. Men zou nu in de figuur de laagste positie van het gewicht kunnen gaan meten, maar ik geef de voorkeur aan een meer analytische methode.

## Tabellen en grafieken

In figuur 5 hebben de punten namen gekregen. De lengte van  $AE$  noem ik  $x$ .

De lengte van de verschillende segmenten kan nu met behulp van Pythagoras uitgedrukt worden in  $x$ :

$$EC = \sqrt{1 - x^2},$$

$$BC = \sqrt{(2 - x)^2 + EC^2},$$

$$CD = 3 - BC,$$

en

$$ED = EC + CD.$$

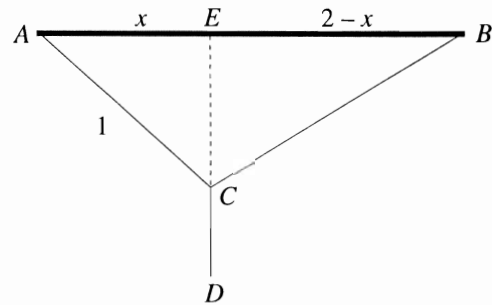


fig. 5 De keuze van  $x$

Bij het opstellen van deze formules heb je niets aan de TI-92. Maar met de technologie in het achterhoofd heb ik geen substituties uitgevoerd. De formule voor  $EC$  is bijvoorbeeld niet ingevuld in de definitie van  $BC$ , want dat doet de machine wel.

De bovenstaande functies worden in het functiebestand ingevoerd als  $y_1, y_2, y_3$  respectievelijk  $y_4$ .

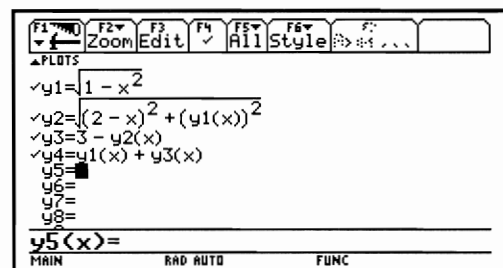


fig. 6 Het functiebestand

Functie  $y_4$  geeft de totale loodrechte afstand van het gewicht tot de horizontale balk. Dat is dus de functie waarvan het maximum gezocht wordt. In figuur 7 ziet u een tabel van numerieke waarden van  $y_4$ , waarbij 'ingezoomd' is op het  $x$ -interval  $[0.7, 1.0]$ . Het maximum is ongeveer 2.26 en wordt aangenomen als  $x$  ongeveer 0.85 is.

x	y4
0.7	2.2309
0.75	2.2472
0.8	2.2584
0.85	2.2619
0.9	2.2527
0.95	2.2168
1.	2.

fig. 7 Een tabel van functiewaarden

Een grafiek kan ook inzichtelijk zijn. Ik neem  $A$  als oorsprong van het assenstelsel. Omdat het gewicht zich onder de  $x$ -as bevindt, voer ik in:  $y_5(x) = -y_4(x)$ . De waarden van  $x$  variëren tussen 0 en 1 en de minimale waarde van  $y_5$  is ongeveer -2.26. Ik laat dus de grafiek tekenen op een kijkvenster van  $[0,1]$  bij  $[-3,-2]$ .

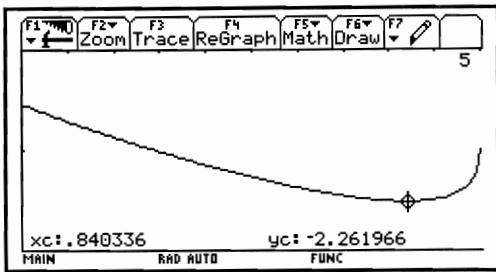


fig. 8 De grafiek van y5

De grafiek lijkt op het onderste deel van de sigaar die bij de meetkundige animatie tevoorschijn kwam. Door over de kromme te lopen, blijkt dat de kleinste waarde van y5 inderdaad ongeveer -2.26 is voor x in de buurt van 0.84, in overeenstemming met eerdere bevindingen. Een volgende stap is nu het bepalen van een exacte oplossing.

### De exacte oplossing

Om de exacte waarde van x te vinden waarvoor y5 minimaal is, laat ik de nulpunten bepalen van de afgeleide van y5.

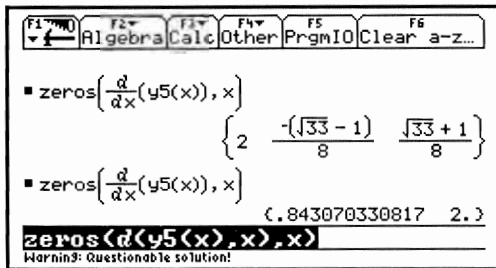


fig. 9 De nulpunten van de afgeleide

De tweede regel van figuur 9 geeft drie oplossingen: 2 (te groot in deze situatie), een negatieve (ook niet relevant) en de oplossing die ik zoek, namelijk  $(\sqrt{33} + 1)/8$ . Bij benadering is dit gelijk aan 0.84307..., zoals ook te verwachten was. Substitutie van de exacte x-waarde geeft een ingewikkeld ogende formule voor de minimale waarde van y5 (zie figuur 10). Bij benadering blijkt deze waarde gelijk te zijn aan -2.26198..., wat evenmin verrassend te noemen is.

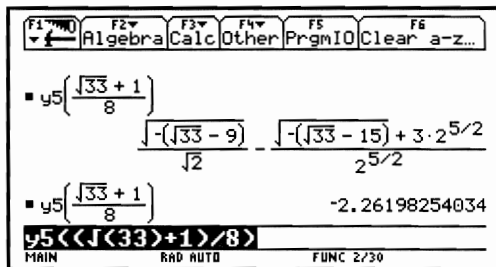


fig. 10 Het exacte minimum van y5

L'Hôpital loste het probleem iets anders op. Omdat y5 de som is van -y1 en -y3, is de afgeleide van y5 slechts gelijk aan 0 wanneer de afgeleiden van y1 en y3 tegengesteld zijn. Omdat die twee laatgenoemde afgeleiden wortels

bevatten, is het handig ze te kwadrateren.

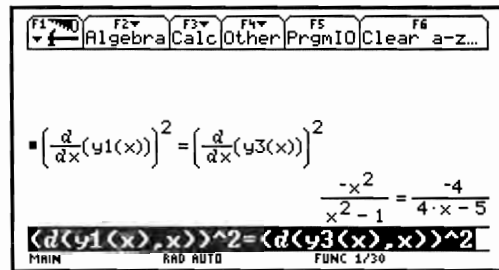


fig. 11 Het kwadraat van de afgeleiden

Door vermenigvuldiging met de beide noemers ontstaat een derdegraads vergelijking, die door de TI-92 wordt opgelost.

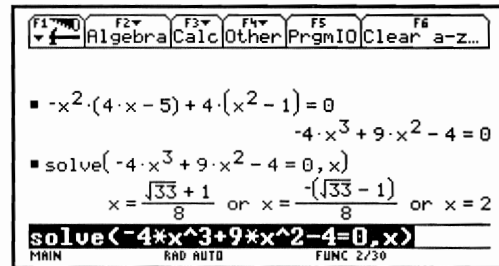


fig. 12 De derdegraads vergelijking

Vergelijking met figuur 9 leert dat dit tot dezelfde resultaten leidt als de eerste manier.

### Generalisatie

Het zou natuurlijk nog mooier zijn om het probleem meer in het algemeen op te lossen. Stel bijvoorbeeld dat de lengte van AB niet 2 maar a meter is. De lengte van het touw waaraan de katrol zit, blijft 1 meter. Dan moet het andere touw, wil de katrol een volledige cirkel kunnen beschrijven, a+1 meter lang zijn. Dat geeft de volgende aanpassing van het functiebestand:

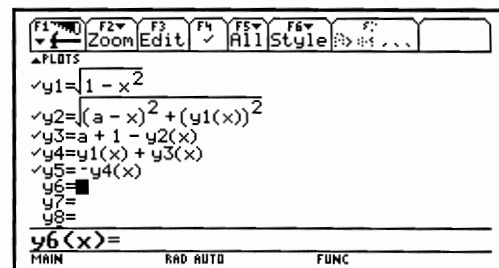


fig. 13 De algemene formules

Als ik nu net als in figuur 11 de kwadraten neem van de afgeleiden van y1 en y3, ontstaat een uitdrukking in x en a (figuur 14). Deze uitdrukking moet gelijk aan 0 zijn. De TI-92 kan dit zonder mijn hulp niet oplossen. Dat zie je wel vaker bij computer algebra: de gebruiker moet de software soms een handje helpen. Daarom laat ik alle termen onder een gemeenschappelijke noemer brengen en isoleer ik met GETNUM de teller van de breuk die zo ontstaat.

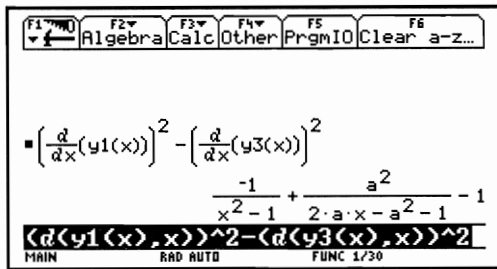


fig. 14 De afgeleiden gekwadrateerd

Het resultaat is een uitdrukking van graad 3 in  $x$ .

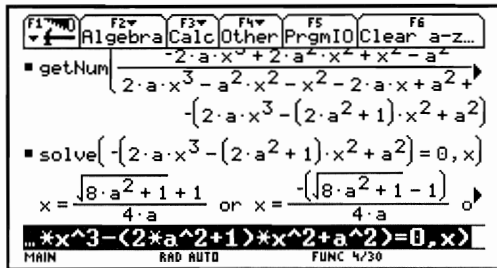


fig. 15 De algemene oplossing

De nulpunten van de laatste uitdrukking worden berekend door de TI-92. Het resultaat is dat in het algemene geval het gewicht de laagste positie aanneemt wanneer

$$x = \frac{\sqrt{8a^2 + 1} + 1}{4a}$$

Ter controle substitueer ik voor  $a$  de waarde 2 en u ziet in figuur 16 een bekend resultaat terug. Dat stemt tevreden!

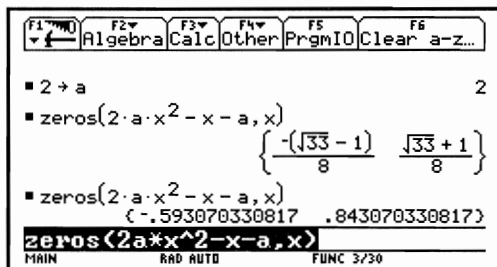


fig. 16 De substitutie van  $a = 2$

## Van 'sigaar' naar ellips

Tenslotte kijk ik nog even naar de vorm van de baan van het gewicht. De Cabri-animatie liet een sigaarvorm zien waar ik intuïtief eerder een ellips verwacht zou hebben. Is dit ook algebraïsch aan te tonen?

Om dit verhaal niet al te lang te maken, beschrijf ik de te volgen werkwijze slechts globaal zonder op details in te gaan.

Vereenvoudiging van  $y5(x)$  geeft:

$$y5(x) = -a - 1 + \sqrt{a^2 - 2ax + 1} - \sqrt{1 - x^2}$$

Optellen van  $a + 1$  en kwadrateren geeft (waarbij  $y$  staat voor  $y5(x)$ ):

$$(y + a + 1)^2 =$$

$$= -x^2 - 2ax + a^2 + 2 - 2\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{a^2 - 2ax + 1} \quad (*)$$

Ik isoleer nu de wortels en kwadrateer opnieuw:

$$((y + a + 1)^2 + x^2 + 2ax - a^2 - 2)^2 =$$

$$= 4 \cdot (1 - x^2) \cdot (a^2 - 2ax + 1)$$

Kennelijk is de vergelijking van de sigaar van graad 4 in  $x$  en  $y$ , en dus is het inderdaad geen ellips.

Toch speelt de ellips wel een rol. Als in vergelijking (\*) na deling door  $a$  de limiet voor  $a$  nadert tot oneindig wordt genomen, dan valt  $a$  weg en ontstaat na enig herschrijven de uitdrukking

$$(1 + x + y)^2 + x^2 = 1$$

en dat is de vergelijking van een ellips! Dat betekent dat de sigaarvorm steeds meer op een ellips gaat lijken wanneer de lengte van de horizontale balk  $AB$  toeneemt terwijl de lengte van  $AC$  gelijk blijft. Dat is een aardig besluit van het onderzoek van het gewichtige probleem.

## Terugblik

Terugkijkend op deze exercitie met het gewichtige probleem springt een aantal zaken in het oog.

Ten eerste valt op dat de algebra die in dit mooie historische probleem een rol speelt geen obstakel meer is: die wordt gewoon aan de TI-92 uitbesteed. De vraag is natuurlijk wel welke invloed dit heeft op het inzicht en de vaardigheid van de gebruiker. Dat is iets waarover nog weinig bekend is. In elk geval zou, in het algemeen gesproken, het gebruik van informatietechnologie realistische toepassingen, die te complex zijn om met de hand aan te pakken, toegankelijk kunnen maken voor een grotere groep leerlingen.

Als tweede punt noem ik de verschillende manieren waarop het probleem wordt aangepakt: meetkundig, grafisch, numeriek en analytisch. Het gebruik van de technologie maakt het eenvoudiger om verschillende representaties van dezelfde situatie naast elkaar te zetten. Dat is mooi, maar het vraagt wel wat flexibiliteit van de gebruiker en het vermogen om de verschillende strategieën met elkaar in verband te brengen.

Ten derde lijkt de TI-92 een geschikt hulpmiddel voor de oriëntatie op het probleem: de meetkundige animatie, de tabellen en de grafieken helpen bij het krijgen van een goed beeld van de probleemsituatie. Ook weer even generaliserend: technologie biedt mogelijkheden tot exploratie van een situatie.

Een vierde en laatste aspect is de dynamiek. De katrol kan verslept worden, waarbij de positie van het gewicht

meeverandert. Ook kan algebraïsch het effect van het veranderen van de lengte van  $AB$  onderzocht worden door een parameter in het functiebestand in te bouwen. Deze vier aspecten, die in [8] verder zijn uitgewerkt, zijn in meer of mindere mate ook van toepassing op het gebruik van de grafische rekenmachine of de PC. De verschillen tussen de diverse media zijn eerder kwantitatief dan principieel. Wel is het natuurlijk zo dat de invoering van de grafische rekenmachine in het voortgezet onderwijs minder ingrijpend is dan die van de TI-92 of computeralgebra op de PC. In dit licht is de 'voorzichtige' strategie een verstandige: wel de grafische rekenmachine bij het eindexamen toestaan, maar PC of symbolische rekenmachine niet. Op iets langere termijn lijkt het onvermijdelijk om het gebruik van de symbolische rekenmachine en de PC bij het eindexamen te overwegen. Experimenten op scholen zouden de besluitvorming hierover moeten ondersteunen. Gezien de snelheid waarmee de technologische ontwikkelingen zich voltrekken is het hoog tijd dat scholen op vrijwillige basis de gelegenheid krijgen deze ervaringen op te doen.

## Literatuur

- [1] Drijvers, P. (1996). Het Calculator Concours. *Nieuwe Wiskrant*, 15(4), pp. 16-21.
- [2] Drijvers, P. (1996). Oude liefde roest niet. *Euclides*, 72(1), pp. 28-31.
- [3] Maanen, J.A. van (1991). Een gewichtig probleem van L'Hôpital. *Nieuwe Wiskrant*, 10(3), pp. 6-9.
- [4] Maanen, J.A. van (1989). De zeventiende eeuw in tien wiskundige problemen uit tien decennia. In: *Wiskunde in de gouden eeuw*. Amsterdam: CWI.
- [5] Doorman, L.M., P. Drijvers en M. Kindt (1996). *Optimaliseren*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- [6] Marquis de l'Hôpital (1696). *Analyse des infiniments petits. Pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris: L'Imprimerie Royale.
- [7] Bernoulli, Johann (1924). *Die Differentialrechnung*. P. Schafheitlin ed. Leipzig: Ostwald's Klassiker, 211.
- [8] Doorman, L.M., P. Drijvers en M. Kindt (1994). *De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs*. Utrecht: CD B press.

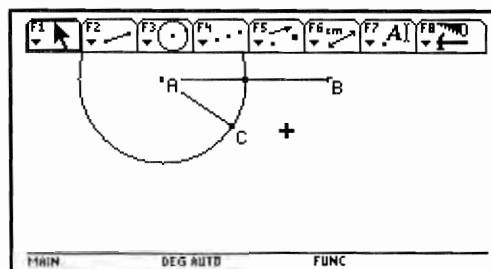
Een Engelstalige versie van dit artikel verscheen onder de titel 'L'Hôpital's weight problem and the TI-92' in de *SAC Newsletter*, Vol 1, pp. 71-80.

De auteur bedankt Jan van de Craats, Jan van Maanen en Agnes Verweij voor hun commentaar op een eerdere versie van dit artikel.

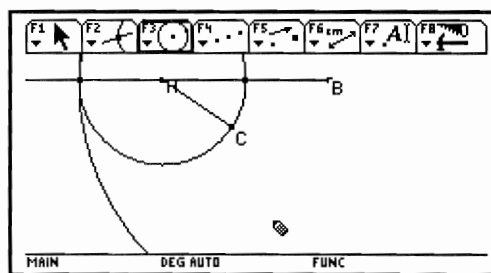
Paul Drijvers, Freudenthal Instituut

### Appendix: De meetkundige constructie

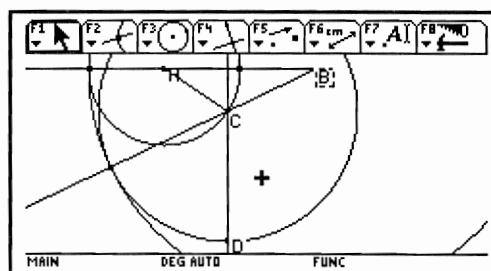
Deze appendix bevat een stapsgewijze beschrijving van de constructie die is gebruikt bij de figuren 2, 3 en 4.



1. Open een Cabri file met Apps, 8, 3.
2. Teken een segment met F2, 5. Noem de eindpunten  $A$  en  $B$  met F7, 4.
3. Construeer het midden van  $AB$  met F4, 3. (In plaats hiervan kan men ook, meer algemeen, een punt op  $AB$  kiezen met F2, 2.)
4. Teken een cirkel met middelpunt  $A$  en door het bij 3 gemaakte punt op  $AB$ . Gebruik F3, 1.
5. Kies een punt op deze cirkel (F2, 2) en noem het  $C$  (F7, 4).
6. Teken het segment  $AC$  met F2, 5.



7. Teken met F2, 6 een halve recht vanuit  $B$  door  $A$ .
8. Teken met F3, 1 een cirkel met middelpunt  $B$  door het meest linkse snijpunt van de halve rechte met de al aanwezige cirkel.



9. Teken met F2, 6 een halve rechte vanuit  $B$  door  $C$ .
10. Teken met F3, 1 een cirkel met middelpunt  $C$  en door het snijpunt van de halve rechte van stap 9 en de grote cirkel uit stap 8.
11. Construeer een lijn door  $C$  loodrecht op  $AB$  (F4, 1).
12. Bepaal met F2, 3 de doorsnede van de lijn van 11 met de cirkel van 10. Noem het onderste snijpunt  $D$  (F7, 4).
13. Verberg de irrelevante objecten in de tekening met F7, 1.
14. Teken ten slotte de segmenten  $BC$  en  $CD$  met F2, 5.