Op 21 januari j.l. was de officiële start van het TWIN-project. Het doel van dit project is om een nieuw curriculum te ontwikkelen voor wis- en natuurkunde op het MTO. **Henk van der Kooij** schetst de snelle opeenvolging van veranderingen in het beroepsonderwijs en bespreekt voorbeelden uit het TWIN-lesmateriaal.

Wiskunde in het MTO: het TWIN-project

Inleiding

Het beroepsonderwijs is flink in beweging. Na de fusie van MBO en Volwassenen Educatie wordt nu ook het hele leerlingenwezen ondergebracht in de organisatie van de Regionale Opleidings Centra (ROC). Daarmee zijn alle varianten van beroepsgerichte opleidingen en cursussen in één instituut ondergebracht.
Voor deze hele 'bedrijfstak' wordt per augustus 1997 een nieuwe kwalificatiestructuur ingevoerd. Per beroepsrichting worden eindtermen geformuleerd waarin het eindniveau van de opleiding staat beschreven. Dit gebeurt voor verschillende niveau's, van korte assistentencursussen tot lange middenkader opleidingen. Ook voor de zogenaamde AVO-vakken (Nederlands, Engels, maatschappijleer, wiskunde en natuur/scheikunde; in het beroepsonderwijs zijn dat echte buitenbeentjes!) zijn die beschrijvingen gemaakt.

Naast de ingrijpende herstructureringen op het organisatorische vlak staat het beroepsonderwijs voor nog tenminste drie grote klussen: het zelfstandig leren zal (net als in de tweede fase AVO) moeten worden ingevoerd, de rol van Informatie- en Communicatie Technologie (ICT) moet aanzienlijk worden vergroot en de eerste landelijke generatie basisvorming- en (voor wiskunde) W12-16-leerlingen staat in augustus voor de poort. ROC-vorming, ICT en zelfstandig leren zijn hot items in het beroepsonderwijs. Van een andere instromer hebben de meeste beroepsopleidingen echter nog geen flauw benul.
Er is een uitzondering: de instellingen voor MTO zijn al een tijdje op de hoogte van de veranderingen bij de wiskunde-instroom van 1997. Dat is te danken aan het feit dat het docentenplatform, samen met SLO en Freudenthal Instituut, flink aan diverse bellen heeft getrokken en veel werk heeft verzet. Een en ander heeft geresulteerd in nieuwe eindtermen en een nieuw adviesleerplan wiskunde en natuurkunde voor de lange middenkaderopleidingen van het MTO.
Deze documenten zijn het vertrekpunt voor een nieuw curriculum, dat binnen het TWIN-project[1] gestalte begint te krijgen.

Het TWIN-project

Het is de bedoeling om binnen TWIN (Techniek, Wiskunde, ICT, Natuurkunde) een curriculum te ontwikkelen dat voor het basisprogramma (de eerste drie semesters):
- een echte ondersteuning biedt voor de praktijkvakken
- goed aansluit op het nieuwe MAVO D programma
- haalbaar is voor de echte MTO-leerling
- voldoende basis biedt voor het doorstroomprogramma naar het HTO
- het gebruik van ICT integreert in het lesmateriaal.

In een later stadium zal binnen TWIN ook het doorstroomprogramma geschreven worden. Dit moet gaan sporen met het programma van het profiel N & T van het HAVO.
Op vijf ROC's (de TWIN-kernscholen) werkt men binnen de afdeling techniek sinds augustus 1996 met het nieuwe lesmateriaal voor wiskunde en natuurkunde dat ontwikkeld wordt binnen een samenwerkingsverband van ROC Eindhoven, Freudenthal Instituut, Hogeschool van Utrecht/Faculteit Educatieve Opleidingen, SLO en de uitgever SMD.

Wiskunde in het MTO

Het vak wiskunde heeft binnen het technisch beroepsonderwijs niet de vanzelfsprekende status die het vak in het AVO wel heeft. Nog geen drie jaar geleden was er serieus sprake van overheveling van de wiskundige onderwerpen naar de praktijkvakken en daarmee leek de opheffing van het vak wiskunde nabij. Helemaal ongelijk hadden de voorstanders van opheffing niet: een vak dat dienstbaar hoort te zijn aan de beroepsvoorbereidende vakken doet zichzelf de das om als er vooral aandacht is voor exotische breukoperaties, voor verzamelingenleer en voor parabolica met al zijn uitwassen, terwijl alle variabelen x en y heten. Zulke oefensessies in het wiskundelokaal dragen niet bij aan het herkennen van het nut van wiskunde als je een deur verder met een techniekvak bezig bent.
De afgelopen tijd is veel energie gestoken in het uitzoeken welke wiskundige kennis en welke wiskundige vaardigheden dan wel zo belangrijk zijn ter ondersteuning bij de praktijkvakken.

Globaal kom je dan uit op de volgende zaken:
– het rekenen met machten van 10, met name in de wetenschappelijke notatie, en het (om)werken (van) met samengestelde eenheden
– de logaritmische schaalverdelingen bij grafieken
– formules die altijd een verband tussen (meestal meer dan) twee grootheden beschrijven en grootheden die van nature vrijwel nooit negatief zijn
– verbanden waarbij het meestal gaat om 'rechtevenredig met...' of 'omgekeerd evenredig met ...'
– veelal gecompliceerde grafieken en bundels daarvan.

Met een paar voorbeelden uit het lesmateriaal van het eerste semester geven we een eerste indruk van de beoogde wiskundige activiteiten waarmee leerlingen het nut van het vak voor de praktijkvakken hopelijk gaan zien. In een volgend artikel zullen andere aspecten van het TWIN-project worden belicht.

Wiskunde voor de techniek

Verbanden tussen grootheden

Voor een fietser is de volgende formule interessant (reken vooral die 0,06 even na!):

rijsnelheid = *trapsnelheid* × *verzet* × 0,06
rijsnelheid in km per uur
trapsnelheid in aantal omwentelingen per minuut
verzet in meter

Voor een werktuigkundige die een draaibank bedient, is het van belang om te weten hoe de snelheid *v* waarmee de beitel door het materiaal snijdt, samenhangt met het in te stellen toerental *n* van zijn machine en de diameter *d* van het werkstuk. Bij een te hoge snijsnelheid krijg je namelijk brokken, bij een te lage snelheid verlies je kostbare produktietijd.
Het verband tussen deze grootheden is (ga maar na):

snijsnelheid = *diameter* × *toerental* × 0,00314
snijsnelheid in meters per minuut
diameter in mm
toerental in omwentelingen per minuut

Twee heel verschillende voorbeelden van eenzelfde type verband: een grootheid is evenredig met het product van twee andere grootheden. Via de evenredigheidsconstante kan het hanteren van verschillende eenheden voor de drie grootheden worden gladgestreken. In de techniekboeken worden zulke verbanden vaak in diagramvorm gegeven: een bundel grafieken, waarin iedere individuele grafiek het verband tussen twee van de drie grootheden toont, bij een constante waarde van de derde grootheid. De ondersteunende rol die wiskunde kan hebben voor de praktijkvakken komt in dit geval tot uitdrukking in het zien van de (wiskundige) gelijkwaardigheid van de twee verbanden. Er worden echter twee verschillende grafieken (zie figuur 1 en 2) gepresenteerd bij eenzelfde fenomeen.

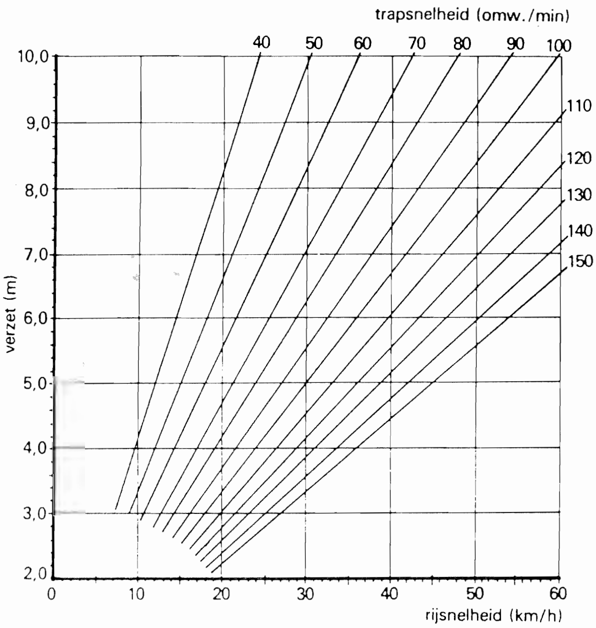


fig. 1 Rijsnelheid-verzet-trapsnelheid diagram afkomstig uit het Prisma Fietsboek

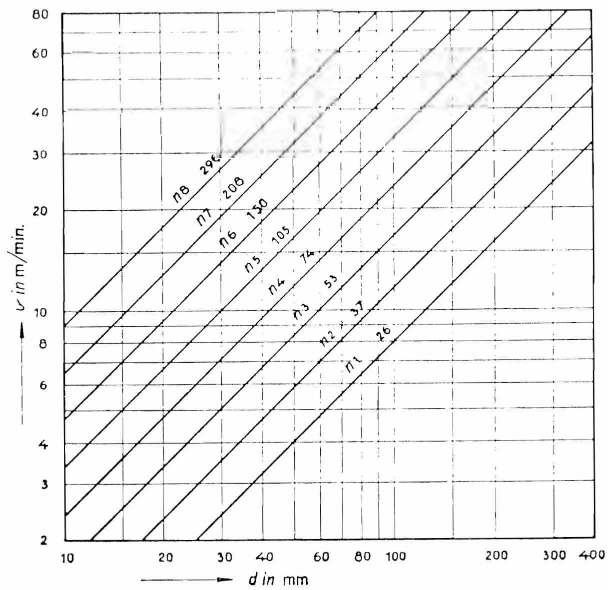
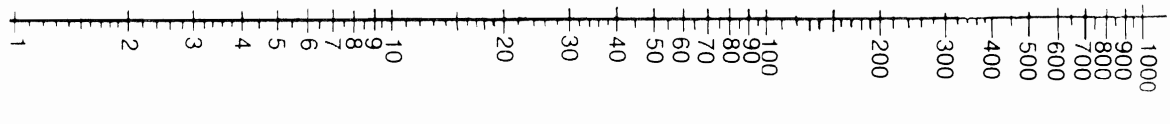


fig. 2 V-d-n-diagram, afkomstig uit A.M.G. van Asten e.a., Produktietechnieken 1, Wolters Noordhoff, Groningen, 1990

Aandachtspunten zijn dan onder andere:
– Bij evenredige verbanden gaat de grafiek altijd door de oorsprong. Hoe zit dat hier?
– Waarom lijken alle *rij*-grafieken door één punt te gaan en zien de *snij*-grafieken er zo evenwijdig uit?

Natuurlijk is het niet eerlijk om de laatste vraag zomaar te stellen. De tweede grafiek heeft immers een afwijkende schaalverdeling. Omdat dit type schaalverdeling zo vaak voorkomt in de leerboeken, wordt er al snel in het eerste leerjaar aandacht aan besteed.

De logaritmische schaal hieronder is nogal gedetailleerd onderverdeeld.



a. Het getal 60 is op verschillende manieren als product te schrijven: $60 = 6 \times 10$, $60 = 2 \times 30$, $60 = 4 \times 15$. Het getal 60 is op deze schaal dus terug te vinden door de stukken van 1 tot 6 en van 1 tot 10 achter elkaar te plakken. Controleer dat elk van de genoemde producten deze eigenschap heeft.

b. Het getal 250 staat niet aangegeven met een streepje. Hoe kun je de precieze plaats van 250 vinden?

c. Kun je 250 ook precies vinden met behulp van $250 = 500 : 2$?

fig. 3 Logaritmische schaal met markeringen

Logaritmische schalen

Je kunt bijna geen techniekboek openslaan zonder op grafieken met logaritmische schalen te stuiten. Daarom wordt in de eerste lesweken al bekeken hoe zo'n schaalverdeling in elkaar zit. Dit wordt gekoppeld aan het werken met machten van 10. De essentie van een logaritmische schaal kan kortweg worden omschreven met 'gelijke stap = gelijke factor'. Figuur 3 is een voorbeeld van een verwerkingsopgave over de logaritmische schaal.

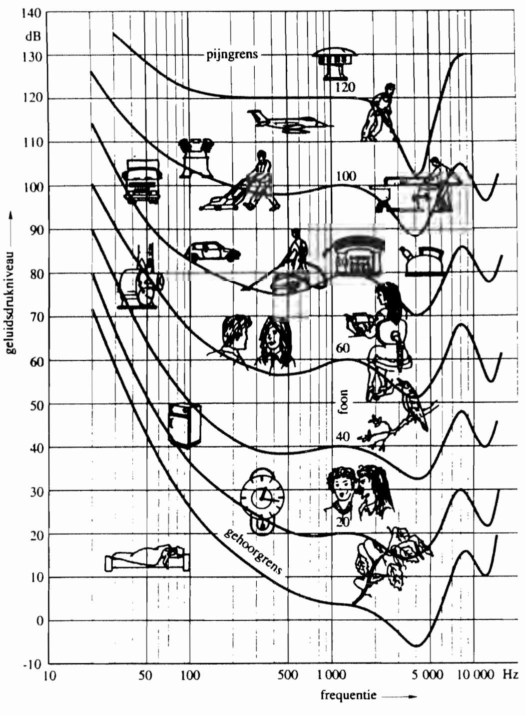


fig. 4 Een geluidsgrafiek met isofonen

Figuur 4 toont een prachtige grafiek (eigenlijk ook weer een bundel) waarin horizontaal de frequentie van geluidstonen in Hz en verticaal het geluidsdrukniveau (zeg maar de hardheid van het geproduceerde geluid) in dB zijn uitgezet. De getekende krommen heten iso-fonen: een isofoon verbindt alle paren (*frequentie*, *uitgezonden geluidsniveau*) die als even luid worden ervaren. Kennelijk wordt (zie grafiek) een lage toon van 20 Hz gehoord op een geluidsniveau van 20 dB als hij op een geluidsniveau van 80 dB wordt uitgezonden. Een toon van 1000 Hz op het niveau van 20 dB wordt echter als zodanig ook gehoord. De gehoorgrens ligt bij 4 dB: de onderste kromme is dus de 4-foon. Aan de bovenkant is de 120-foon getekend; daar ligt de pijngrens. De horizontale as heeft duidelijk een logaritmische schaling. Met een beetje creativiteit is bij deze grafiekenbundel een aardig wiskunde A-vraagstuk te maken.

Complexe grafieken

In figuur 5 wordt nog een fraai staaltje grafiekenkunst gepresenteerd, die je in gewone wiskundeboeken niet snel zult tegenkomen. In de bouwkundewereld wordt flink veel beton gestort. Uit eigen (slechte) ervaring weet ik dat daarbij een zekere zorgvuldigheid moet worden betracht. Het uitharden van een betonnen vloertje moet niet te snel, maar ook niet te langzaam gaan. Voor een goed hardingsproces moet je rekening houden met een aantal factoren. Afgaande op het plaatje in figuur 5 zijn dat de betontemperatuur, de omgevingstemperatuur, de luchtvochtigheid en de windsnelheid. De erbij gestelde vragen richten zich voornamelijk op de globale structuur en op de kwalitatieve aspecten van zo'n grafische voorstelling.

Techniek voor de Wiskunde

Binnen TWIN is nadrukkelijk de keuze gemaakt dat de wiskunde van het basisprogramma niet het struikelblok mag worden voor leerlingen die wel goed zijn in de technische vakken. Al te vaak verworden de vakken wis- en natuurkunde in de huidige praktijk tot oneigenlijk selectiemiddel. Meestal ligt het probleem bij het gebrek aan enthousiasme om met moeilijke algebraïsche vormen te willen exerceren. In de techniekboeken komen die exotische vormen echter vrijwel niet voor. Als er bijvoorbeeld tussen twee grootheden een kwadratisch verband bestaat, dan is dat nooit van de vorm

$$y = ax^2 + bx + c$$

maar hoogstens van de vorm

$$y = a(x - b)^2 + c.$$

Bij meer ingewikkelde rekenschema's, zoals de al eerder genoemde

$$x \xrightarrow{\text{min } 3} x-3 \xrightarrow{\text{kwadrateer}} (x-3)^2 \xrightarrow{\text{maal } 0{,}5} 0{,}5(x-3)^2 \xrightarrow{\text{plus } 4} 0{,}5(x-3)^2+4$$

gaat het terugrekenen op een zelfde manier. Er zijn nu alleen meer stappen nodig.

137 a. Maak het terugrekenschema bij bovenstaande vorm en laat daarmee zien dat bij de formule $y = 0{,}5(x-3)^2 + 4$ de volgende terugwerkformule hoort:

$$x = \sqrt{\frac{y-4}{0,5}} + 3 \quad \text{of} \quad x = \sqrt{2(y-4)} + 3$$

b. Bereken x als $y = 10$. Gebruik terugrekenschema of terugwerkformule.

Je hebt nu twee verschillende manieren gezien waarop vragen over 'welke invoer hoort bij een gegeven uitvoer' kunnen worden aangepakt.
Beide methoden worden hier nog eens herhaald, om de vraag

voor welke invoer x geldt dat de uitvoer is $y = 16$, voor de formule $y = 0{,}5(x-3)^2 + 4$

te kunnen beantwoorden.
De methode met de grafische rekenmachine is eigenlijk de makkelijkste: als je de machine goede instructies geeft, doet hij het lastige rekenwerk wel.
Voer als formules in **Y1 = 0.5(X–3)^2 + 4 en Y2 = 16**
Gebruik **INTERSECT** om het snijpunt van de twee grafieken te vinden.
De schermafdruk in figuur 4.16 toont het snijpunt.

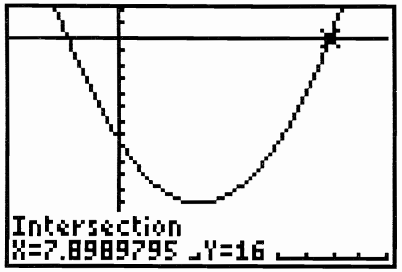


fig. 4.16

138 Wat zijn de coördinaten van het andere snijpunt?
Kun je dat zeggen, zonder dat je daarvoor **INTERSECT** gebruikt?

De methode met het terugrekenschema kan ook worden gebruikt:

$$16 \xrightarrow{\text{min } 4} 12 \xrightarrow{\text{maal } 2} 24 \xrightarrow{\text{neem de wortel}} \sqrt{24} \xrightarrow{\text{plus } 3} \sqrt{24}+3$$

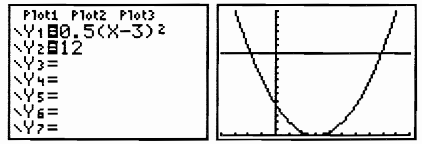
139 a. Is het eindgetal bij het terugrekenschema hetzelfde als het getal dat in figuur 4.16 wordt getoond?

b. Waarom krijg je bij het terugrekenschema niet de andere uitkomst die je op de schermafdruk wel ziet? Wat moet je veranderen in het schema, om juist wel de andere oplossing te krijgen?

Nu volgt, toegelicht met plaatjes, nog een derde manier om dergelijke vragen aan te pakken. Deze manier is eigenlijk een soort van terugredeneren bij de activiteiten van de vorige paragraaf. Daar werden de prototypen van machtsverbanden omgevormd tot ingewikkelder vormen. Hier gaat het om het terugbrengen van een ingewikkelder vorm naar het prototype.
Bestudeer de serie plaatjes goed.

Vervangende vraag nr. 1:

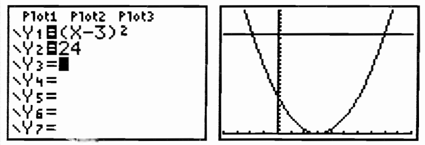
Voor welke x geldt $0{,}5(x-3)^2 = 12$?



WINDOW : [-4,10] voor x en [0,18] voor y

Vervangende vraag nr. 2:

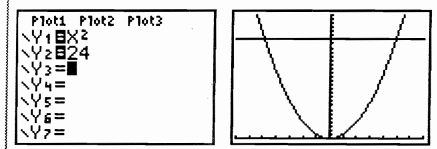
Voor welke x geldt $(x-3)^2 = 24$?



WINDOW : [-4,10] voor x en [0,30] voor y

Vervangende vraag nr. 3:

Voor welke x geldt $x^2 = 24$



WINDOW: [-7,7] voor x en [0,30] voor y

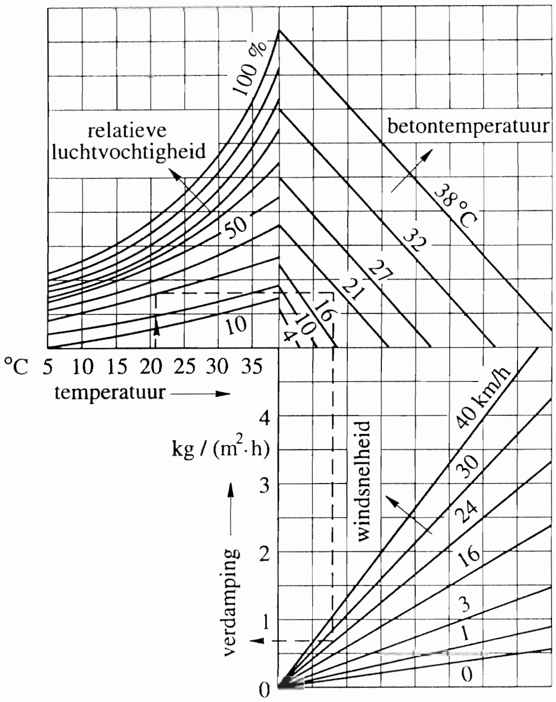
140 Bekijk vervangende vraag nr. 3 en het bijbehorende plaatje.

a. Welke waarden van x zorgen ervoor dat $x^2 = 24$?

b. Gebruik de antwoorden van vervangende vraag 3 om de antwoorden van de vervangende vragen 2 en 1 en van de oorspronkelijke vraag te vinden.

fig. 6 Enkele opgaven uit het blok 'Grafieken en Verbanden'

Tot slot een stelsel van grafieken dat het verband weergeeft tussen verdampingssnelheid van het water in pas gestort beton en een viertal factoren die invloed op die verdampingssnelheid hebben.



56 a. Welke vier factoren zijn dat?
b. Welke daarvan kun je zelf beïnvloeden?

57 Bekijk de eenheid die bij de verdampingssnelheid hoort: kg / ($m^2 \cdot$ h).
Wat stelt verdampingssnelheid = 4 precies voor?

In de figuur staat een stippellijn (met pijlen) getekend. Kennelijk is die bedoeld om aan te geven hoe je informatie uit deze grafieken kunt halen.

58 Volg de lijn en beschrijf in woorden de informatie die daarbij hoort.

59 Is de windsnelheidslijn van 0 km/h nu het horizontale lijntje of de eerste schuine lijn? Verklaar!

60 Onderzoek of verdampen inderdaad langzamer gaat bij een hogere relatieve luchtvochtigheid. (Welke factoren houd je constant om dat te onderzoeken?)

61 Om een pasgestorte betonvloer goed te laten uitharden, mag de verdampingssnelheid niet boven 1 kg/($m^2 \cdot$ h) komen.
a. Welke factor heeft daarop de meeste invloed?
b. Is die factor makkelijk uit te schakelen?

fig. 5 Uit het blok 'Grafieken en Verbanden'

Kwadratische verbanden worden binnen TWIN dan ook verkend vanuit het prototype 'de grootheid y is evenredig met het kwadraat van de grootheid x' (oftewel: $y = ax^2$) en die verbanden worden gegeneraliseerd met behulp van transformaties van de grafiek.
Bij de begripsvorming kan de grafische rekenmachine goed van pas komen. Algebraïsch kan volledig gesteund worden op de structuur van de formule: als je weet hoe die is samengesteld, dan kun je er ook mee heen en weer rekenen. Een formule omzetten in een 'rekenschema' en daarna ook in een 'terugrekenschema' garandeert dat je alle vragen over die formules aankunt. Een andere aanpak steunt meer op de vermogens die de TI-83 al standaard in zich heeft: het bepalen van een snijpunt van twee grafieken via INTERSECT. Tenslotte is er ook nog de aanpak die iets doet met de getransformeerde grafieken.
Figuur 6 laat zien hoe deze drie verschillende aanpakken in het experimentele lesmateriaal zijn uitgewerkt.

Ten slotte

Het probleem bij het testen van dit nieuwe curriculum is dat er materiaal ontworpen wordt voor een nieuwe groep leerlingen, terwijl we in de testfase nog te maken hebben met leerlingen die het oude programma MAVO D hebben gedaan. Dat geeft gegarandeerd klachten: waarom zo veel leestekst, waarom ingeklede sommetjes, waarom geen lekkere rijtjes van allemaal identieke oefeningen, waarom altijd maar moeten nadenken, waarom wordt er niets uitgelegd, wanneer gaan we nou eens wiskunde doen, ... Het zijn de bekende verzuchtingen. De docenten die het nieuwe materiaal uitproberen, zijn echter over het algemeen positief: de leerlingen zijn zelf erg actief bezig met kennisverwerving en uitwisseling daarvan en ze zijn vaak veel gemotiveerder bezig dan voorheen. Op drie van de kernscholen zijn leerlingen te vinden die van W12-16 experimenteerscholen komen. Geruststellend is het te horen dat zij geen enkel probleem hebben met deze aanpak van de wiskunde: 'Zo doen we het al vier jaar'.

Noot

[1] Het Wiskunde ontwerpteam bestaat uit Tom Goris, Jacob Hop, Jelle Kat, Henk van der Kooij (coördinatie) en Wim Laaper. Hans Wisbrun (SLO) is, in samenwerking met het docentenplatform (Michel van Glabbeek en de drie eerstgenoemden) de producent van eindtermen (juli 1995) en adviesleerplan (juli 1996). De vijf TWIN-kernscholen waar al wordt gewerkt met het nieuwe materiaal voor zowel Wiskunde als Natuurkunde zijn: Alfa-Aa-College in Groningen, CBZ in Zwolle, Randmeer College in Harderwijk, St Lucas College in Boxtel, TLE in Eindhoven. Daarnaast hebben een twintigtal ROC's ingetekend op het materiaal en studiebijeenkomsten rond het TWIN-project.