Tegelijk met het gewone wiskunde B examen vwo is op twee scholen het eerste experimentele examen wiskunde B Profi afgenomen. Een belangrijk moment bij de ontwikkeling van de nieuwe wiskunde voor de profielen N&T en N&G. **Martin Kindt** schetst de eerste indrukken.

Proeve van een examen Wiskunde B vwo

Gegeven

In het kader van het Project Profi is dit jaar op twee scholen, het Cals College te Nieuwegein en het Liemers college te Zevenaar, een examen wiskunde B afgelegd over nieuwe leerstof. Op beide scholen is namelijk gewerkt aan een groot deel van het door de voormalige vakontwikkelgroep wiskunde voorgestelde programma voor het profiel Natuur & Techniek. Het betreft hier om te beginnen de complete leerstofdomeinen 'Differentiaalrekening met toepassingen', 'Integralen en toepassingen', 'Periodieke bewegingen' en 'Vlakke Meetkunde'. De domeinen 'Voortgezette Analyse' en 'Meetkunde & Analyse' zijn gedeeltelijk aan bod geweest. De 'Voortgezette kansrekening' (wachttijden) is alleen op het Liemers behandeld en uitsluitend in het schoolonderzoek getoetst; op het Cals is daarentegen meer aan 'Voortgezette Analyse' gedaan. Het domein 'Continue Dynamische Modellen' is pas voor de tweede lichting aan de orde geweest en zal in '98 op het wiskunde B Profi-examen een rol kunnen spelen. Op beide scholen is, als voorbereiding op het schriftelijk examen, een bundel van 75 opgaven doorgewerkt, ondermeer om een zekere mate van integratie tussen de diverse domeinen gestalte te geven. Tijdens de examenzitting hadden de leerlingen de beschikking over een grafische rekenmachine (de TI 82) en een kaart met formules.

Te bewijzen

Zoals eerder in dit tijdschrift vermeld (zie bijvoorbeeld *Nieuwe Wiskrant 15*(2)), wordt in het Profi-project onderzocht of de VWO-kaart, zoals die nog niet zo lang geleden door de vakontwikkelgroep is voorgesteld, een haalbare is. Dat nog niet alle troeven uitgespeeld zijn, is natuurlijk jammer, maar anderzijds geeft dit een indicatie over de omvang van de programma's. Op het moment dat ik dit schrijf, wordt in twee decimalen achter de komma berekend welk omvang het definitieve programma mag hebben. Natuurlijk is het niet alleen een kwestie van rekenen, maar zal terdege worden gelet op de ontvangst door de leerlingen van de diverse onderdelen. Daarbij is dit proefexamen een van de graadmeters.

Bewijs?

Op het examenformulier staat Wiskunde B Profi. De leerlingen zal het niet opgevallen zijn, die hadden wel iets anders aan hun hoofd. Zowel in Zevenaar als Nieuwegein worden ze bij de uitgang opgewacht door leden van het Profi-team en mogen ze heet van de naald reageren.
Nu is het moment voor de lezer gekomen om de bijgevoegde opgaven goed te bekijken of, liever nog, de sommen te maken.

...

Zacht muziekje, bijvoorbeeld.

...

Hoe ging het?

Rianne: In het begin wel goed, maar daarna kwam die vraag met e en die functies, en daar kwam ik echt niet uit. Die met die drukpers vond ik wel te doen. Daarvoor zat er een met die rij, die convergeerde naar iets, die vond ik wel te doen.
En op de vraag 'Die vond jij makkelijk?':
Misschien heb ik 'm helemaal fout...

Irene (goede leerling, een half uur voor tijd buiten): Ik vond het niet echt veel, maar ik vond er wel moeilijke stukjes tussen zitten, maar ik heb ze wel allemaal afgekregen. Het ging naar mijn idee wel goed. Ik wist sommige dingetjes niet, maar dat wist ik toch wel dat ik daar niet achter zou komen, dus dat heb ik maar laten zitten. Maar dat waren er niet veel, som 2 ... .

Raymond: Nou kijk ik moet het eigenlijk niet van wiskunde hebben, ik blijf op een vier staan, maar ik had een 3.1 nodig en die heb ik wel, denk ik. Misschien heb ik wel een vijf. Ik heb altijd goed mijn best gedaan, het bijgehouden, maar ik kan het gewoon niet, makkelijk zat. Elke dag wel twee uur huiswerk gemaakt enzo, serieus.

Rinske: Ik vond het vrij makkelijk, ik had veel moeilijker verwacht, ik zag er eigenlijk wel tegenop. In die boekjes af en toe van die vragen waarvan ik denk 'jeetjemina'.
En op 'Had je dat ook bij dat laatste boekje, die 75 opgaven?':

Ja, bij heel veel van die opgaven had ik zoiets van ja het zal wel, maar dit viel reuze mee.

Heb je wat aan de GR gehad?
Irene: Daar heb ik wel wat aan gehad. Gewoon, cirkeltjes tekenen (opgave 6) enzo, het is wel handig om te kijken, om te controleren of het allemaal klopt.

Dirk: Die is zeer gemakkelijk, vooral bij het controleren van opgaven. Er was een opgave over integreren, en dat is met die grafische rekenmachine heel makkelijk te controleren, of je de juiste uitkomst hebt. Daar had ik wel wat aan. Verder viel het me toch een beetje tegen bij het examen dat je de rekenmachine niet echt veel hoefde te gebruiken. Ik heb 'm maar één keer gebruikt, en dat was om een opgave te controleren, die oppervlakte wat ik net zei. Dus eigenlijk had ik de grafische rekenmachine bij het examen niet echt nodig.

Heb je wat aan de formulekaart gehad?
Irene: Ja, daar heb ik heel vaak op gekeken, die heb ik wel veel gebruikt, want al die formules weet ik meestal niet uit mijn hoofd en dan kijk ik ze toch maar effetjes na. Misschien dat als ik hem er niet naast had liggen dat ik er ook wel genoeg had geweten maar toch effe als controle toch kijken.

Dennis: Alleen toen ik op een gegeven moment met de ln *iets moest differentiëren om te bewijzen dat ze allemaal door 0 liepen, dat was wel gemakkelijk, dan hoef je niet alles uit je hoofd te doen, dan pak je gewoon de kaart erbij.*

Wat vond je de moeilijkste opgave?
Floor: Sommige dingen zoals die limieten dat gaat gewoon helemaal niet, dan kan ik heen en weer rekenen en omdraaien en nog een keer rekenen.

Dennis: Dat bewijzen vind ik echt moeilijk, daar ben ik niet goed in, ook al heb ik het zo vaak aan Stroomer gevraagd. Vandaag zat er ook een opgave in, die driehoek met die drie cirkels. Ik had wel een idee hoe het moest, maar dat vond ik zo uitgebreid, toen ben ik eerst verder gegaan, en aan het einde had ik te weinig tijd. Toen heb ik gewoon gezegd, ene is koordenvierhoek, andere is koordenvierhoek dus die derde ook, nou ja, dan mis je zoveel... .

Wat vond je de gemakkelijkste opgave?
Irene: De eerste geloof ik.
Ingrid: De bewijzen.

Discussie

Altijd leuk, die uit (Zevenaarse) leerlingmonden opgetekende uitspraken. Zelf was ik in Nieuwegein en ook daar leken de leerlingen redelijk opgelucht en beluisterde ik soortgelijke opmerkingen over GR en formulekaart.
Inmiddels zijn de resultaten bekend en weten we dat er gemiddeld in de vier groepen 6 plus of min epsilon is gescoord en dat als uitersten 3,7 en 9,5 zijn behaald. Normaal voor wiskunde B en in vergelijking met de afgelopen jaren zelfs vrij goed.

Bij zo'n eerste experimenteel examen neem je natuurlijk niet al te veel risico. Bewust is er gekozen voor een flinke spreiding in moeilijkheidsgraad. Opgave 1 (een weggevertje volgens veel leerlingen) gaf een lekker begin en zo hoort het ook. Al zijn er toch nog een paar leerlingen geweest die als primitieve functie de logaritme-van-wortel-x hebben gekozen. Overigens is het goed om te weten dat deze groep leerlingen aanzienlijk minder integraaltjes heeft uitgerekend dan de kandidaten voor het 'gewone' B-examen.
Ook op vraag 5 ('teken de iso-afstandslijn op 1 cm') is zeer hoog gescoord. Verder kwamen er in het examen geen weggevertjes voor.
De laatste opgave werd door de meerderheid van de leerlingen (en ook door de betrokken leraren) als moeilijkste gekwalificeerd en ook dat hoort zo.
De iteratie-opgave (nummer 5) was riskant en is qua resultaat behoorlijk tegengevallen. Leerling Danny (Cals college) zei na afloop zoiets als: 'Die zal wel slecht gemaakt zijn, daar hebben we bijna niet op geoefend'. Op de vraag of zij die gekund had, maakte ze met haar vinger de beweging van een trappetje, maar voegde er aan toe: 'Je kan ook gewoon beginnen met rekenen en dan die waarden tekenen en dan zie je het wel'.
Over de limiet bij opgave 4 (vraag 8) was er na afloop een stevige discussie. Niels betoogde dat die 6 opgeslokt wordt door de naar oneindig lopende r en had $2\frac{1}{3}\pi$. René had gezien dat twee van de drie cirkelbogen van middelpuntshoeken veranderen bij voortschrijdende r en kwam tot $6 + 2\pi$. Hadden ze maar samen mogen werken!
Over het bewijs (opgave 2) werd heel verschillend geoordeeld. Eén meisje hoorde ik zeggen: Ik heb wel bewezen dat het een koordenvierhoek is, maar dan ben je er toch nog niet; ik wilde toen bewijzen dat er een punt M is met gelijke afstanden tot de vier hoekpunten, maar dat kon ik niet ... . Zij wilde dus afdalen tot de bodem (= definitie van de cirkel) en vergat te accepteren dat 'vier punten zijn de hoekpunten van een koordenvierhoek' synoniem is met 'vier punten liggen op een cirkel'.

Een voorzichtige conclusie die ik durf te trekken, is dat belangrijke delen van de nieuwe wiskunde B-stof niet te hoog gegrepen zijn voor de leerlingen. Daarbij moeten we bedenken dat het examen sterk N&T gekleurd was, terwijl misschien de helft van deze leerlingen in een profielsituatie wellicht voor N&G zou hebben gekozen.
Wat me vooral gesterkt heeft, is dat ze het werk leuk vonden. Niet saai, maar gevarieerde en interessante stukjes.

Opgave 1

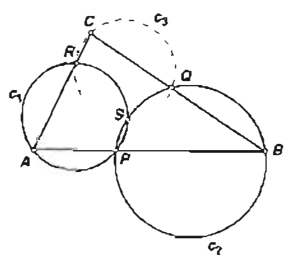
Er is één positieve waarde van a waarvoor geldt: $\int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 10$.

5p 1 □ Bereken deze waarde.

Opgave 2

Op de zijden van driehoek ABC liggen de punten P, Q, R.
De punten A, P en R bepalen een cirkel c_1 en de punten B, Q en P bepalen een cirkel c_2.
Deze twee cirkels snijden elkaar binnen de driehoek in een punt S. Zie figuur 1.

figuur 1



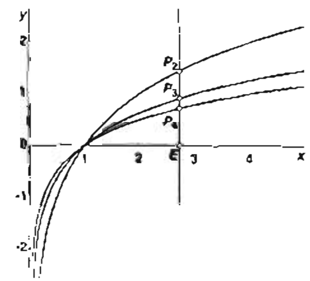
De punten C, R en Q bepalen een cirkel c_3.

6p 2 □ Bewijs dat ook cirkel c_3 door punt S gaat.
Opmerking:
Figuur 1 staat ook twee keer op de bijlage. Je kunt deze tekeningen gebruiken bij het zoeken naar of geven van het bewijs.

Opgave 3 Een rij van logaritmische functies

Voor $k = 2, 3, 4, \ldots$ en voor $x > 0$ zijn gegeven de functies $f_k(x) = {}^k\log x$.
De lijn $x = e$ snijdt de x-as in het punt E en de grafiek van f_k in het punt P_k.
In figuur 2 zie je de grafieken van f_2, f_3 en f_4 met daarop de punten P_2, P_3 en P_4.

figuur 2



In de punten $P_2, P_3, P_4, \ldots$ worden de raaklijnen aan de grafieken van $f_2, f_3, f_4, \ldots$ getekend

7p 3 □ Bewijs dat al deze raaklijnen door het punt $(0, 0)$ gaan.

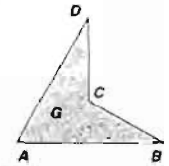
Het midden van lijnstuk EP_k noemen we M_k.
Zo ontstaat de rij van middens $M_2, M_3, M_4, \ldots$.
Figuur 2 wekt de indruk dat het midden M_2 hetzelfde punt zou kunnen zijn als punt P_4.

7p 4 □ Toon aan dat elk van de middens $M_2, M_3, M_4, \ldots$ op de grafiek van een functie f_k ligt.

Opgave 4 Een pijlvormig gebied

In figuur 3 zie je een gebied G in de vorm van een gelijkzijdige driehoek ABD waaruit driehoek BCD is weggehaald.
Daardoor is de inham bij C ontstaan.
Punt C is het snijpunt van de deellijnen van de oorspronkelijke driehoek.
De lengte van AB is 3 cm.
Figuur 3 is ook twee keer afgebeeld op de bijlage. De ene figuur is bestemd voor de beantwoording van vraag 5. De andere figuur kun je gebruiken bij de vragen 6, 7 of 8.

figuur 3



5p 5 □ Teken in de figuur op de bijlage de iso-afstandslijn op 1 cm van gebied G.

Vanaf een bepaalde afstand r (in cm) bestaan de iso-afstandslijnen van G uit twee rechte lijnstukken en drie cirkelbogen.

5p 6 □ Hoe groot is deze afstand r? Licht je antwoord toe.

7p 7 □ Toon aan dat de iso-afstandslijn de lengte $6 + 2\frac{1}{3}\pi\ r$ heeft voor deze afstand r.

We letten nu op de verhouding tussen de lengte van de iso-afstandslijn en de afstand r tot de rand van het gebied G.
Deze verhouding heeft bij onbeperkte toename van r een limiet.

6p 8 □ Hoe groot is deze limiet? Licht je antwoord toe.

Opgave 5 Iteratie

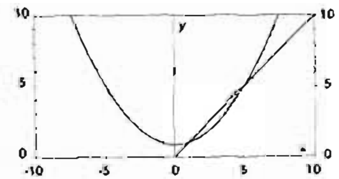
De rij $u_1, u_2, u_3, \ldots$ is gegeven door:

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_n = f(u_{n-1}) \end{cases}$$

waarbij $f(x) = \frac{x^2 + 5}{6}$.

In figuur 4 zie je twee grafieken, de grafiek van f en de lijn $y = x$.
Figuur 4 is ook afgebeeld op de bijlage.

figuur 4



5p 9 □ Teken in de figuur op de bijlage de plaats van u_5 op de x-as. Gebruik hierbij alleen de getekende grafieken en niet de formules.

De rij $u_1, u_2, u_3, \ldots$ convergeert.

5p 10 □ Bereken de limiet van de rij.

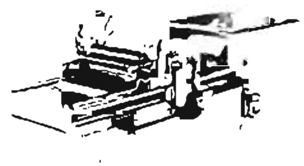
Ook voor een andere startwaarde dan $u_1 = 4$ kan de rij $u_1, u_2, u_3, \ldots$ convergeren.

7p 11 □ Onderzoek voor welke startwaarden de rij convergeert. Je mag hierbij gebruik maken van tekeningen op de bijlage

Opgave 6 Draaiende cilinders

Een drukpers (zie foto) is een voorbeeld van een machine waar een draaibeweging wordt omgezet in een rechtlijnige beweging.
We bekijken het volgende model van zo'n omzetting.

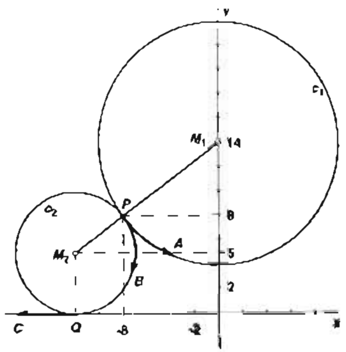
foto



In een machine draait een cilinder C_1 met constante snelheid. Een tweede cilinder C_2 drukt zowel tegen deze cilinder als ook tegen een vlakke plaat. Zo wordt de draaibeweging van cilinder C_1 via cilinder C_2 omgezet in een schuifbeweging van de plaat. De onderdelen drukken zo stevig tegen elkaar dat ze niet slippen.

In figuur 5 is de situatie schematisch weergegeven. De beweging van de cilinders en de plaat wordt weergegeven door de beweging van de punten A, B en C.
A en B bewegen over respectievelijk de cirkels c_1 en c_2 en C beweegt over de x-as.
De cirkel c_1 heeft middelpunt M_1 (0, 14) en straal 10.
De cirkel c_2 heeft middelpunt M_2 (−12, 5) en straal 5.
De twee cirkels raken elkaar in punt $P(-8, 8)$. Cirkel c_2 raakt in punt Q aan de x-as.

figuur 5



Op tijdstip $t = 0$ bevinden de punten A en B zich in positie P en punt C in positie Q.
Voor het beschrijven van de bewegingen van de punten A, B en C kunnen we gebruik maken van parametervoorstellingen.
De beweging van punt A wordt beschreven door:

$$\begin{cases} x_A(t) = 10\cos(t + \varphi) \\ y_A(t) = 10\sin(t + \varphi) + 14 \end{cases}$$

waarbij $\varphi = 3{,}785$ radialen.

Door de beweging van A liggen ook de bewegingsrichting en de snelheid van B vast.

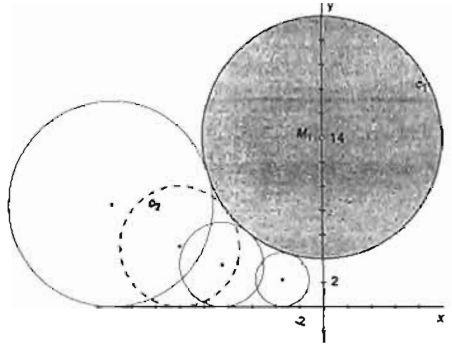
9p **12** □ Geef bewegingsformules van de beweging van punt B.

In punt Q wordt de draaibeweging omgezet in een rechtlijnige beweging.

5p **13** □ Met welke snelheid beweegt punt C over de x-as? Licht je antwoord toe.

Voor het omzetten van de draaibeweging van cilinder C_1 in een rechtlijnige beweging van de plaat kunnen ook cilinders met een andere diameter worden gebruikt.
In figuur 6 zijn schematisch enkele mogelijkheden weergegeven. Bij elke geschikte cilinder hoort een cirkel (zoals c_2 hoort bij cilinder C_2).

figuur 6



De middelpunten van alle geschikte cirkels liggen op een kromme.

6p **14** □ Stel een vergelijking op van deze kromme en vermeld de soort van de kromme.

Einde