Voor het oplossen van derdegraadsvergelijkingen wordt in de literatuur meestal de methode van Cardano gepresenteerd. **Jan van de Craats** kwam een andere methode op het spoor.

De derdegraadsvergelijking – een studie in symmetrie

Niet elke wiskundige weet dat we de complexe getallen eigenlijk te danken hebben aan de pogingen van Italiaanse rekenmeesters in het begin van de zestiende eeuw om een algemene oplossingsmethode te vinden voor de derdegraadsvergelijking, analoog aan de bekende *abc*-formule voor vierkantsvergelijkingen. Bij de door Scipio del Ferro en Niccolo Tartaglia gevonden oplossing van het probleem, die in 1545 door Geronimo Cardano in zijn *Ars Magna* gepubliceerd werd, bleek het noodzakelijk te zijn om op een formele wijze te rekenen met vierkantswortels uit negatieve getallen, althans in die gevallen waarin de derdegraadsvergelijking drie verschillende reële oplossingen had. In zijn in 1572 verschenen *Algebra* bracht Rafaele Bombelli enige klaarheid in de duisternis door een algemene theorie voor deze 'imaginaire getallen' te ontwikkelen. De meetkundige voorstelling van complexe getallen als punten in het vlak is pas veel later gevonden: eerst door C. Wessel (1797), daarna herontdekt door J.R. Argand (1806) en vervolgens opnieuw door C.F. Gauss, die er veelvuldig gebruik van maakte.

Nog steeds vindt men de methode die door Cardano gepubliceerd werd in de literatuur terug als de standaardmethode om derdegraadsvergelijkingen op te lossen. De presentatie is vrijwel altijd receptmatig: men voert een aantal substituties uit en verkrijgt dan, afhankelijk van het teken van een *determinant*, de oplossingen als combinatie van zekere vierkants- en derdemachtswortels, waarbij men in bepaalde gevallen via complexe getallen tot reële resultaten komt. Het is dan lastig om door de bomen het bos te blijven zien: iedere stap valt gemakkelijk te verifiëren, maar een globaal overzicht zal veelal ontbreken.

Toen ik onlangs het verzoek kreeg om een verhaal over de derdegraadsvergelijking te houden, lag het voor de hand om de methode van Cardano opnieuw te presenteren, tezamen met de vele spannende intriges en anekdotes waaraan de ontstaansgeschiedenis ervan zo rijk is. Ik was echter kort daarvoor in het boek *Inversive Geometry* uit 1933 van de meetkundige Frank Morley en zijn zoon F.V. Morley een andere aanpak tegengekomen. De substituties in die oplossingsmethode bleken, op de juiste wijze beschouwd, allerminst gekunsteld te zijn en de formules brengen op een buitengewoon fraaie wijze de innerlijke symmetrie aan het licht die er tussen de coëfficiënten van de vergelijking en de oplossingen ervan bestaat. Er zijn ook directe verbanden met Moebiustransformaties, de meetkunde van de Riemann-bol en de complexe projectieve rechte. Allemaal redenen om nu eens deze oplossingsmethode, en niet die van Cardano, in de schijnwerper te plaatsen. Het is mij overigens niet bekend of de Morley's hun methode weer aan anderen ontleend hebben; het lijkt me wel waarschijnlijk, maar ze geven geen verwijzingen.

Presentatie van de oplossingsmethode

We zoeken de wortels x_1, x_2, x_3 van de derdegraadsvergelijking

$$a_0 x^3 - 3a_1 x^2 + 3a_2 x - a_3 = 0 \qquad (a_0 \neq 0). \qquad (1)$$

Naar analogie van het kwadraatafsplitsen bij vierkantsvergelijkingen proberen we eerst 'de derdemacht af te splitsen'. Neem daartoe aan dat $a_0 = 1$ (deel anders eerst door a_0) en schrijf de vergelijking vervolgens als

$$(x - a_1)^3 + 3(a_2 - a_1^2)(x - a_1) + (a_1 a_2 - a_3) + 2a_1(a_2 - a_1^2) = 0.$$

In het geval dat

$$a_2 - a_1^2 = 0$$

leidt dit direct tot succes; de oplossing is dan:

$$x = a_1 + \sqrt[3]{a_3 - a_1 a_2}$$

Een tweede situatie waarin men de wortels van vergelijking (1) gemakkelijk kan vinden, is wanneer er een meervoudige wortel optreedt. Die voldoet dan ook aan de vierkantsvergelijking die door differentiëren ontstaat, en de wortels daarvan vindt men met de *abc*-formule. Een van die wortels is dan de meervoudige wortel van de derdegraadsvergelijking en de eventueel nog ontbrekende wor-

tel vindt men door afsplitsen.
Neem in het vervolg daarom aan dat er geen meervoudige wortel optreedt en dat voldaan is aan de ongelijkheid $a_2 - a_1^2 \neq 0$. In het algemene geval dat $a_0 \neq 1$ heeft die ongelijkheid de gedaante

$$a_0 a_2 - a_1^2 \neq 0. \qquad (2)$$

We zullen laten zien dat men vergelijking (1) onder deze voorwaarden kan schrijven in de vorm

$$\lambda (x - h_1)^3 + \mu (x - h_2)^3 = 0 \qquad (3)$$

voor zekere $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ en $h_1 \neq h_2$. Later zal blijken waarom dit minder gekunsteld is dan het op het eerste gezicht misschien lijkt.
Als het inderdaad lukt om zulke getallen h_1, h_2, λ en μ te vinden, is het oplossen van vergelijking (1) niet moeilijk meer. Er geldt dan immers:

$$\frac{x - h_1}{x - h_2} = \sqrt[3]{-\mu/\lambda} \qquad (4)$$

waarbij er voor de (complexe) derdemachtswortel in het algemeen drie mogelijke keuzen zijn. Noemen we die even r_1, r_2 en r_3, dan zijn de wortels van de oorspronkelijke derdegraadsvergelijking

$$x_i = \frac{h_1 - h_2 r_i}{1 - r_i} \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (5)$$

Het is merkwaardig dat zelfs in het geval van een derdegraadsvergelijking met reële coëfficiënten en drie verschillende reële oplossingen volgens deze methode blijkbaar met complexe derdemachtswortels gewerkt moet worden (en dan zullen h_1 en h_2 dus ook complexe getallen moeten zijn). Ook de door Cardano gepubliceerde oplossingsmethode maakt voor dit geval, de zogenoemde *casus irreducibilis*, op essentiële wijze gebruik van complexe getallen.
We bepalen nu eerst h_1 en h_2. Uitwerken van de haakjes in (3) en het gelijkstellen van de coëfficiënten met die van (1) levert

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= a_0 \\ \lambda h_1 + \mu h_2 &= a_1 \\ \lambda h_1^2 + \mu h_2^2 &= a_2 \\ \lambda h_1^3 + \mu h_2^3 &= a_3. \end{aligned} \qquad (6)$$

Nu volgt een mooi staaltje van symmetrie zoeken in algebraïsche vergelijkingen. Je moet er even opkomen, maar als je het hebt gevonden, vallen alle puzzelstukjes op een schitterende manier in elkaar. En verifiëren dat het klopt, is natuurlijk niet moeilijk.

Merk eerst op dat

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)(\lambda h_1^2 + \mu h_2^2) - (\lambda h_1 + \mu h_2)^2 &= \\ &= \lambda\mu(h_1^2 + h_2^2 - 2h_1h_2) = \\ &= \lambda\mu\,(h_1 - h_2)^2 \end{aligned}$$

dus

$$a_0a_2 - a_1^2 = \lambda\mu(h_1 - h_2)^2 \qquad (7)$$

en op soortgelijke wijze

$$\begin{aligned} a_0a_3 - a_1a_2 &= \lambda\mu\,(h_1 - h_2)^2\,(h_1 + h_2) \qquad (8) \\ a_1a_3 - a_2^2 &= \lambda\mu\,(h_1 - h_2)^2\,h_1h_2. \qquad (9) \end{aligned}$$

De rechterleden van (7), (8) en (9) zijn van de vorm γ, $\gamma\,(h_1 + h_2)$, $\gamma\,h_1h_2$, en dus zijn h_1 en h_2 de oplossingen van de volgende vierkantsvergelijking

$$(a_0a_2 - a_1^2)h^2 - (a_0a_3 - a_1a_2)h + (a_1a_3 - a_2^2) = 0. \qquad (10)$$

Die zijn gemakkelijk te vinden met de *abc*-formule. Merk op dat voorwaarde (2) garandeert dat hier inderdaad een vierkantsvergelijking staat! De wortels h_1 en h_2 zijn verschillend wanneer de discriminant

$$D = (a_0a_3 - a_1a_2)^2 - 4\,(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) \qquad (11)$$

ongelijk is aan nul. Als aan deze voorwaarde, waar we nog op terug zullen komen, is voldaan, dan leveren de eerste twee vergelijkingen van (6) vervolgens ook de verhouding $-\mu/\lambda$:

$$-\frac{\mu}{\lambda} = \frac{a_0h_1 - a_1}{a_0h_2 - a_1} \qquad (12)$$

waarna (4) en (5) de wortels van de oorspronkelijke derdegraadsvergelijking geven. De methode is eenvoudig te programmeren en ze werkt natuurlijk zowel voor reële als voor complexe coëfficiënten a_i.
Eigenlijk zouden we ons artikel hier dus af kunnen sluiten; de oplossingsmethode is gevonden en volledig beschreven. Maar we zouden ook nog wat van de achtergronden willen laten zien. Wat vertelt de methode ons bijvoorbeeld over de verschillende soorten derdegraadsvergelijkingen met reële coëfficiënten? Wanneer zijn er drie reële wortels, wanneer zijn er twee toegevoegd complexe wortels en een reële wortel? En wat is het verband met Moebius-transformaties, de Riemann-bol en de complexe projectieve rechte?

De discriminant

We komen eerst terug op de discriminant D van de vierkantsvergelijking (10), die in dit verband ook de discriminant van de derdegraadsvergelijking (1) wordt genoemd.
Enerzijds kan men de definiërende vergelijking (11) van D met behulp van (7), (8) en (9) herleiden tot

$$D = (\lambda\mu)^2(h_1 - h_2)^6,$$

maar anderzijds kan men D met behulp van de relaties

$$3a_1/a_0 = x_1 + x_2 + x_3$$
$$3a_2/a_0 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$
$$a_3/a_0 = x_1x_2x_3$$

ook uitdrukken in x_1, x_2 en x_3. Het resultaat, dat met enige vlijt of met behulp van een computeralgebra-programma als DERIVE gemakkelijk geverifieerd kan worden, is

$$D = -\frac{a_0^4}{27}(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2. \tag{13}$$

Net als bij de vierkantsvergelijking blijkt de voorwaarde $D = 0$ nodig en voldoende te zijn voor het optreden van meervoudige wortels. Wanneer er namelijk drie verschillende wortels zijn, dan volgt uit (13) dat $D \neq 0$. Anderzijds, wanneer er twee of drie samenvallende wortels zijn, dan kan men de derdegraadsvergelijking herleiden tot een vergelijking van de vorm $(x-p)^2(x-q) = 0$. Wanneer men dan de haakjes uitwerkt en de definitie (11) van de discriminant toepast, dan blijkt direct dat $D = 0$. Hiermee is de betekenis van het nul zijn van de determinant, ook in het geval van een vergelijking met complexe coëfficiënten, volledig verklaard.
Interessant is natuurlijk de situatie waarin de coëfficiënten a_i, en dus ook de discriminant D, reëel zijn. Aan vergelijking (13) kan men direct zien dat $D < 0$ is wanneer de derdegraadsvergelijking drie verschillende reële wortels x_1, x_2 en x_3 heeft. Het is ook niet moeilijk om te zien dat $D > 0$ is bij één reële wortel x_1 en twee toegevoegd complexe wortels x_2 en $x_3 = \overline{x_2}$.
In dat laatste geval is $(x_2 - x_3)$ immers zuiver imaginair, terwijl $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$ reëel is. Uit (13) blijkt dan dat $D > 0$.
De hulppunten h_1 en h_2 zijn gedefinieerd met behulp van de vierkantsvergelijking (10), die ook D als discriminant heeft. Als $D > 0$ is, dan zijn h_1 en h_2 dus reëel, en als $D < 0$ is, dan zijn ze toegevoegd complex. Samengevat geldt dus in het reële geval:

$D > 0$	één reële wortel, twee toegevoegd complexe wortels, hulppunten reëel
$D < 0$	drie verschillende reële wortels, hulppunten toegevoegd complex
$D = 0$	twee of drie samenvallende wortels, hulppunten vallen samen.

De Riemann-bol

We komen nu terug op de vraag hoe men op het idee komt vergelijking (1) in de vorm (3) te schrijven. De sleutel ligt in de uitbreiding van het complexe vlak met één extra punt, het punt ∞. Door middel van stereografische projectie kan het aldus uitgebreide complexe vlak dan worden geïdentificeerd met de bol, de zogenaamde Riemann-bol.
Via transformaties van de vorm

$$z \mapsto w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

die bekend staan als Moebius-transformaties, kan men elk gegeven drietal punten van de Riemann-bol in elk ander drietal overvoeren. Het is bekend dat zulke transformaties cirkeltrouw en conform zijn: cirkels op de bol gaan in cirkels over, en hoeken tussen cirkelbogen zijn invariant. Ze vormen een groep, want de inverse van een Moebius-transformatie is weer een Moebius-transformatie.
Een van de eenvoudigste derdegraadsvergelijkingen met drie verschillende wortels is misschien wel de vergelijking

$$w^3 = 1,$$

met als wortels de getallen 1, $\rho = e^{2\pi i/3}$, $\rho^2 = e^{4\pi i/3}$. Er is een Moebius-transformatie die de wortels (x_1, x_2, x_3) van (1) – we nemen weer aan dat ze verschillend zijn – overvoert in het drietal $(1, \rho, \rho^2)$. Stel dat die transformatie wordt gegeven door

$$w = \frac{az+b}{cz+d}.$$

De vergelijking

$$w^3 = 1$$

correspondeert onder die transformatie met de derdegraadsvergelijking

$$(az+b)^3 = (cz+d)^3.$$

Met de keuze $\lambda = a^3$, $\mu = -c^3$, $h_1 = -b/a$ en $h_2 = -d/c$ is dit precies vergelijking (3). Hierbij correspondeert $z = h_1$ met $w = 0$, en $z = h_2$ met $w = \infty$.

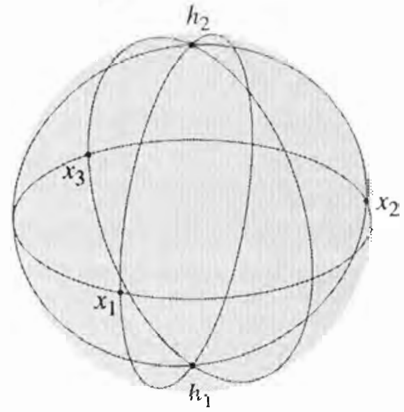

fig. 1 De Riemann-bol met daarop de punten 1, ρ, ρ^2 op de equator, en de punten 0 en ∞ als zuid- en noordpool. De equator en de drie meridiaancirkels door deze punten verdelen de Riemann-bol in twaalf congruente boldriehoeken met hoeken van 90, 90 en 60 graden.

Op de Riemann-bol zijn de punten 0 en ∞ de zuidpool en de noordpool. De punten 1, ρ en ρ^2 zijn drie punten op de equator met onderling gelijke boogafstanden. De equator en de meridiaancirkels door 1, ρ en ρ^2 verdelen de bol in twaalf boldriehoeken met hoeken van 90, 90 en 60 graden. In de noordpool en de zuidpool snijden de drie meridiaancirkels elkaar onder hoeken van 60 graden (zie figuur 1). In het algemene geval kan men de ligging van de punten h_1 en h_2 ten opzichte van de punten x_1, x_2 en x_3 dus ook karakteriseren door de voorwaarde dat er drie cirkels door h_1 en h_2 zijn die de omgeschreven cirkel van driehoek $x_1x_2x_3$ loodrecht snijden en die onderling hoeken maken van 60 graden. Omdat stereografische projectie ook hoek- en cirkeltrouw is, geldt hetzelfde voor de ligging van h_1 en h_2 ten opzichte van x_1, x_2 en x_3 in het complexe vlak, met dien verstande dat men rechte lijnen in dat geval als 'cirkels door oneindig' moet zien. In figuur 2 zijn drie gevallen in het complexe vlak getekend. Eerst de 'standaardvorm' met $x_1 = 1, x_2 = \rho, x_3 = \rho^2$ zodat $h_1 = 0$, $h_2 = \infty$. Vervolgens een situatie waarin x_1, x_2 en x_3 reëel zijn, en ten slotte een situatie met x_1 reëel en x_2 en x_3 toegevoegd complex. Vanuit het standpunt van de 'Moebius-meetkunde' op de Riemann-bol zijn al die gevallen equivalent.

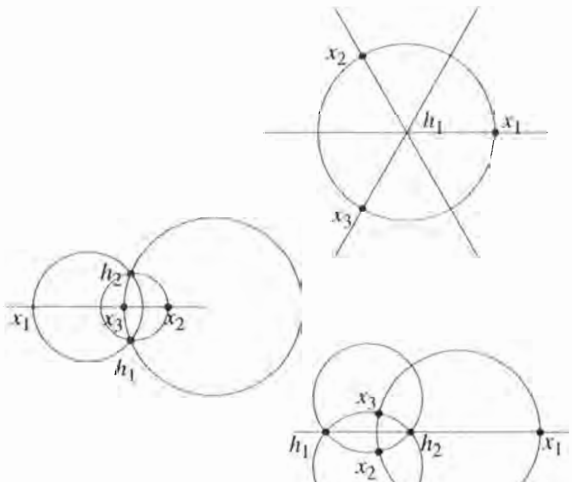

fig. 2 Drie gevallen voor de derdegraadsvergelijking. Telkens zijn getekend de wortels x_1, x_2, x_3, de punten h_1 en h_2 en de 'cirkels' die het complexe vlak verdelen in twaalf 'cirkeldriehoeken' met hoeken van 90, 90 en 60 graden.

De complexe projectieve rechte

Men kan de Riemann-bol ook opvatten als een meetkundige voorstelling van de complexe projectieve rechte, dat wil zeggen de verzameling van alle paren complexe getallen $(z_1, z_2) \neq (0,0)$, waarbij men twee paren identificeert wanneer ze een (complexe) factor verschillen. Met andere woorden: als $\lambda \neq 0$ dan stellen (z_1, z_2) en $(\lambda z_1, \lambda z_2)$ hetzelfde punt voor.
Een punt $z \neq \infty$ op de Riemann-bol laat men dan corresponderen met het paar $(z,1)$ en het punt ∞ met $(1,0)$. De Moebiustransformaties corresponderen met de projectieve transformaties van de projectieve rechte en het is een van de fundamentele stellingen uit de projectieve meetkunde dat elk drietal punten op een projectieve rechte door een projectieve transformatie overgevoerd kan worden in een willekeurig ander drietal punten. Met andere woorden, alle puntendrietallen op de projectieve rechte zijn projectief equivalent.
Als men in de oorspronkelijke derdegraadsvergelijking (1) in plaats van x het quotient z_1/z_2 substitueert en vervolgens de noemers wegwerkt, krijgt men de derdegraadsvergelijking in termen van homogene projectieve coördinaten:

$$a_0 z_1^3 - 3a_1 z_1^2 z_2 + 3 a_2 z_1 z_2^2 - a_3 z_2^3 = 0. \qquad (14)$$

Nu behoeven we slechts te veronderstellen dat niet alle coëfficiënten a_i nul zijn. Er staat dan altijd een derdegraadsvergelijking met drie 'oplossingen' (z_1, z_2), die echter met twee of drie tegelijk kunnen samenvallen. Onder een oplossing van de vergelijking verstaat men nu dus een punt op de (complexe) projectieve rechte. Vanuit dit projectieve standpunt bekeken zijn er dus slechts drie soorten derdegraadsvergelijkingen: (1) met drie verschillende wortels, (2) met twee samenvallende wortels en een derde enkelvoudige wortel en (3) met drie samenvallende wortels.

De hierboven behandelde oplossingsmethode voor het eerste geval komt er op neer dat men uit de coëfficiënten a_i expliciet de Moebiustransformatie bepaalt die vergelijking (14) overvoert in de 'standaardvorm' $z_1^3 = z_2^3$. Bij zo'n beschouwingswijze mist men echter de meetkundige aspecten van cirkels en hoeken op de Riemann-bol en de meetkundige interpretatie van de hulppunten h_1 en h_2. Maar er is wel een andere interpretatie van deze punten. Noem daartoe het linkerlid van (14) even $F(z_1, z_2)$, en laat H_F de Hessiaan zijn van F, dat wil zeggen de volgende determinant van de 2e partiële afgeleiden van F.

$$H_F = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} \end{vmatrix}$$

Dan is de vergelijking (10), waardoor de punten h_1 en h_2 gedefinieerd worden, niets anders dan de vergelijking $H_F = 0$, vandaar dat men de punten h_1 en h_2 ook wel de *Hessiaanpunten* noemt.

Vergelijkingen van graad 4 en hoger

Het probleem om de wortels te bepalen van de algemene vierdegraadsvergelijking

$$x^4 - b_1 x^3 + b_2 x^2 - b_3 x + b_4 = 0$$

kan worden teruggevoerd tot het bepalen van de wortels van een derdegraadsvergelijking en een aantal vierkantsvergelijkingen. Stel dat x_1, x_2, x_3, x_4 de wortels van deze vergelijking zijn, dan geldt dus

$$\begin{aligned} b_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ b_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ b_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\ b_4 &= x_1x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

Beschouw nu de drie uitdrukkingen

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \\ \xi_2 &= (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) \\ \xi_3 &= (x_1 + x_4)(x_2 + x_3). \end{aligned}$$

Het is duidelijk dat

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 2b_2$$

terwijl men ook gemakkelijk verifieert dat

$$\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1 = b_2^2 + b_1b_3 - 4b_4$$

en

$$\xi_1\xi_2\xi_3 = b_1b_2b_3 - b_1^2b_4 - b_3^2.$$

Hiermee zijn ξ_1, ξ_2 en ξ_3 dus te vinden als de wortels van de derdegraadsvergelijking

$$\xi^3 - 2b_2\xi^2 + (b_2^2 + b_1b_3 - 4b_4)\xi - (b_1b_2b_3 - b_1^2b_4 - b_3^2) = 0.$$

Vervolgens merken we op dat de uitdrukkingen $s_{12} = x_1 + x_2$ en $s_{34} = x_3 + x_4$ voldoen aan $s_{12} + s_{34} = b_1$ en $s_{12}s_{34} = \xi_1$, zodat men ze kan vinden als de wortels van de vierkantsvergelijking

$$s^2 - b_1s + \xi_1 = 0.$$

Op dezelfde wijze bepaalt men de andere uitdrukkingen $s_{ij} = x_i + x_j$, waarna via $2x_1 = s_{12} + s_{13} - s_{23}$, enzovoort, de vier gezochte wortels x_1, x_2, x_3 en x_4 kunnen worden gevonden.

De Galois-theorie leert dat er voor hogeregraadsvergelijkingen geen algemene algebraïsche oplossingsmethode bestaat. Het al dan niet algebraïsch oplosbaar zijn van zo'n vergelijking is namelijk afhankelijk van de 'oplosbaarheid' van een zekere bij die specifieke vergelijking behorende permutatiegroep, de zogenaamde Galois-groep, en voor elke $n > 4$ bestaan er n-degraadsvergelijkingen met een Galois-groep die niet 'oplosbaar' is.

Jan van de Craats is verbonden aan de Universiteit van Amsterdam en aan de Open Universiteit.

Literatuur

Een beknopte behandeling van de bovenstaande oplossingsmethode voor de derdegraadsvergelijking is te vinden op pagina 81 van Frank Morley & F.V. Morley, *Inversive Geometry*. Ginn, Boston, 1933, heruitgegeven door Chelsea, New York, 1954.

De traditionele oplossingsmethode van Cardano voor de derdegraadsvergelijking en de hierboven gegeven oplossingsmethode voor de vierdegraadsvergelijking vindt men in veel elementaire algebraboeken, bijvoorbeeld in B.L.van der Waerden, *Algebra I*, 8. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 1971, p.191-197.

In het bekende boek van D.J. Struik, *Geschiedenis van de Wiskunde* (Aula paperback 178), staat het een en ander over de intriges en de ruzies waarmee de ontdekking van de oplossingsformules voor de derdegraadsvergelijking in het Italië van de zestiende eeuw gepaard is gegaan (p.116-118).

Zie ook het artikel van A. Hof en J. van Dijk: Een drama van de derde graad in *De Nieuwe Wiskrant 12(3)*, 1993, pp. 19-23. ❑