

In het profiel N&T voor het vwo is een belangrijk nieuw domein de VOORTGEZETTE MEETKUNDE. De computer speelt hierbij een belangrijke rol. Aad Goddijn bespreekt enkele meetkundeprogramma's en voert een vergelijkende warentest uit.

Construeren met button en muis

Perdix en de passer

Volgens Ovidius vond Perdix, het slimme twaalfjarige neefje van Daedalus, de passer uit:

... die voor het eerst twee staafjes in één draaipunt bijeenbracht; zo, terwijl de ene poot blijft staan, beschrijft de tweede 'n cirkel, mits ze maar gelijke afstand houden. Daedalus werd jaloers en duwde hem hals over kop Athene's vrome burcht af, roepend dat hij was gestruikeld.

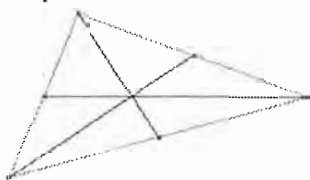
(Metamorfosen, boek VIII, 247-249, vertaling M. d'Hane-Scheltema).

Daedalus zou het ook nu moeilijk gehad hebben met zijn zelfbeheersing; zijn neefje zou rap ongedroomde constructies neerzetten op een computerscherm, waar de passerpunt nooit meer uitschiet en het tweede staafje feilloos gelijke afstand houdt.

Op de experimenteerscholen van het Profi-project is het bij voortgezette meetkunde alweer bijna gewoon, het zelfstandig gebruiken van een krachtig constructieprogramma om meetkundige relaties op het spoor te komen. Intussen is ook duidelijk geworden dat uitgevers niet meer aarzelen dergelijk IT-gebruik op bescheiden wijze, maar wel structureel, in de nieuwe methodes voor het vwo op te nemen.

Het basisprincipe van zo'n programma kan snel uit de doeken worden gedaan aan de hand van een eenvoudig voorbeeld: de zwaartelijnen van een driehoek.

Op een of andere manier (daarover straks meer dan genoeg) wordt een driehoek op het scherm getekend en worden de middens van de zijden met de overstaande hoekpunten verbonden. Bij deze driehoek gaan de zwaartelijnen door één punt.



Tot zover geen noemenswaardig verschil met de meetkunde op zandtafel of papyrusvel.

Onze computertekening kunnen we echter nog aanpas-

sen: we kunnen de hoekpunten van de driehoek naar believen verschuiven. Hoe, daarover weer later. Twee varianten van de driehoek, steeds gaan de zwaartelijnen door één punt:



In plaats van één driehoek, zoals op papier, blijken we als het ware *alle* driehoeken getekend te hebben.

De vraag die blijft, is: waarom gaan die lijnen altijd door dat ene punt?

In het Profi-project is in vwo 5 en 6 met aanzienlijk lastiger problemen gewerkt. Het antwoord op de waaromvraag was daar nooit: dat kun je toch zien op het scherm. De verrassing dat bijzondere lijnen door een punt gaan, dat een of ander punt een cirkelbaan beschrijft, het gaf juist meer impuls om te gaan redeneren. Het computerprogramma geeft zelf geen enkel antwoord op de waaromvraag.

Welk programma en hoe?

In dit artikel laat ik één wat uitvoeriger voorbeeld zien uit het Profi-materiaal. Wie nog nooit eigenhandig met zo'n computerprogramma gewerkt heeft, moet er op zijn minst de indruk van overhouden dat zo'n programma iets wezenlijk nieuws aan het oude – de klassiek vlakke meetkunde – kan toevoegen. Ik richt het artikel echter hoofdzakelijk op de gebruiker die zijn eerst klap met de digitale liniaal al gehad of gegeven heeft, bijvoorbeeld op een nascholingscursus of in een werkgroep van de NVvW.

Verschillende malen werd daar gevraagd: moet het per se programma X zijn, zoals dat in het Profi-project is gebruikt?

In dit artikel worden drie digitale vervangers van passer en liniaal naast elkaar gezet:

- GeomeTricks (Viggo Sadelin)
- Cabri Geometry II (Jean-Marie Laborde en Franck Bellemain)

– The Geometer's Sketchpad (Nicolas Jackiw).

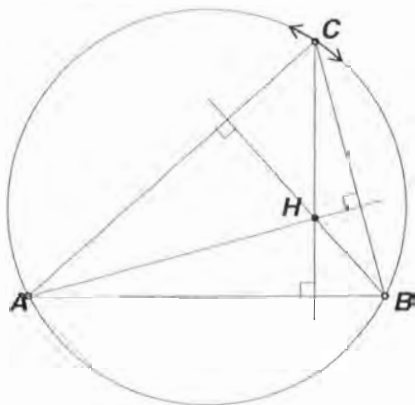
Ik zal mijn persoonlijke voorkeur niet proberen te verbergen, maar men kiest uiteraard zelf; dit artikel geeft echter wel een aantal criteria aan en enkele minimumeisen waaraan voldaan moet worden, wil het programma niet alleen de eerste les goed functioneren, maar ook op het eind van de VWO-meetkunderit nog zijn diensten bewijzen.

De baan van het hoogtepunt

De demonstratie-opgave is deze:

Gegeven is een vaste cirkel en een driehoek, waarvan de hoekpunten A , B en C op die cirkel liggen. Het hoogtepunt van de driehoek noemen we H .

Hoe beweegt H als C de cirkel doorloopt?



Ons doel is die beweging in beeld te brengen. In de baan van H herkennen we vast wel een of andere bekende figuur, die tot bewijzen uitnodigt.

Drie constructieverhalen

De programma's heten voortaan CABRI, SKETCHPAD en TRICKS.

We starten ze en gaan kijken wat we ermee kunnen doen. Alle drie vertonen nu om te beginnen een leeg tekenvel en daarboven of daarnaast een menubalk met buttons waarop geklikt kan worden. De menubalk van CABRI ziet er zó uit.



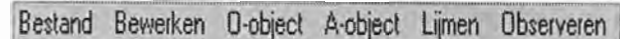
Omdat we met de cirkel willen beginnen, klikken we op de button met de cirkel. Die licht op. De cirkel ontstaat nu door op het tekenvel een middelpunt en een randpunt aan te geven door muisklikken.

Bij SKETCHPAD is het nauwelijks anders. Hier zitten vergelijkbare buttons links, zoals hiernaast. Alleen nu moeten we niet klik-los-beweeg-klik doen, maar klik-houd vast-beweeg-los. Dat is een minuscule verschil en met de muis in de hand vind je dat snel uit. Dit zijn niet de verschillen die tellen, behalve voor mij op dit moment, nu ik steeds heen en

weer stap tussen drie programma's.

TRICKS doet het echt anders.

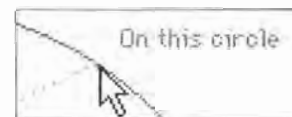
De menubalk vertoont tekst en het is niet zonder meer duidelijk wat er gedaan moet worden.



Bij aanklikken van zo'n button verschijnt een lijstje. Onder A-object zit wel *cirkel(middelpunt, punt)* maar daar mag ik nog niet op klikken. Dan maar onder O-object kijken, daar mag ik met Vrij punt punten maken op het scherm. Zodra die er zijn, mag ik wel *cirkel(middelpunt, punt)* gebruiken. Het is even wennen, maar het lukt.

Fase twee: de driehoek met hoekpunten op de cirkel.

Bij CABRI zit naast de cirkelbutton een button met een lijntje. Als ik erop klik, blijkt ik ook 'triangle' te kunnen kiezen. Vooruit maar. Bij het plaatsen van het derde punt op de cirkel zie ik, als ik met de muis vlakbij de cirkel kom, dit:



Blijkbaar vermoedt CABRI dat ik het punt op de cirkel wil hebben en houden. Het blijkt achteraf te kloppen: als ik de cirkel versleep, gaan de punten mee en ik kan de punten alleen over de cirkel bewegen. Precies wat ik wilde. Een lesse driehoek had ook gekund, met even weinig moeite.

SKETCHPAD laat mij de driehoek uit drie segmenten opbouwen. Ook SKETCHPAD weet, zo blijkt weer achteraf, dat ik de driehoekspunten aan de cirkel wil vastmaken. Een minuscule, maar in de praktijk belangrijk verschil: SKETCHPAD laat *niet* zien of het punt aan de cirkel vast komt te zitten. Bij een vaste hand gaat het echter zelden mis.

Bij TRICKS moet ik:

- eerst drie nieuwe vrije punten maken
- die punten via *lijnen* aan de cirkel vastmaken
- drie segmenten tekenen door de gemaakte punten.

En dan heb ik weer dezelfde tekening.

Het positieve dat ik hierover kan zeggen, is: dat is achteraf allemaal heel expliciet duidelijk. Ik moest expliciet aangeven dat de punten op de cirkel moeten liggen, dat was immers een aparte handeling.

In mijn domheid en na de ervaringen met de andere programma's, pakte ik natuurlijk meteen de *lijnstuk(punt, punt)* optie en kwam bedrogen uit. Ik klikte op twee plaatsen op de cirkel en kreeg een lijn van middelpunt naar eerste randpunt van de cirkel in beeld. Waarom? Omdat dat de enige punten waren die TRICKS kende! De stand van zaken is kortweg dit:

CABRI denkt bij het aankoppelen van de driehoek met je mee, SKETCHPAD ook. Beide programma's hebben in de

gaten dat je dat wilt. Bij CABRI kun je iets beter zien dat er meegedacht wordt en kun je ook ingrijpen, indien nodig. TRICKS kiest voor volledig expliciteren van het feit dat je driehoekspunten afhankelijk zijn van de cirkel. Die helderheid is misschien wel mooi, maar het gevolg is dat je veel meer acties moet uitvoeren en voornamelijk op een zeer elementair niveau. Het lijkt er een beetje op of je typemachine ineens geen letters meer heeft en dat je zelf elke letter uit rondjes en streepjes moet opbouwen. Ja, dat kan.

TRICKS heeft ook storend weinig objecten die je zomaar kunt maken. Voor de cirkel er was, moesten er twee punten zijn. In feite zijn alleen losse punten en losse lijnen de basisobjecten. Bij de andere twee programma's vind je in de tekenmenu's meestal direct iets van je gading.

Maar het ligt er natuurlijk ook aan wat je eigenlijk wilt met de meetkunde. TRICKS ademt nog het zuiverst de sfeer van Euclides; het derde axioma van de *Elementen* is bijvoorbeeld: bij elk centrum en elke straal kan een cirkel getekend worden. Dit programma heeft inderdaad de optie *cirkel(middelpunt, straal)*, maar voor gebruik daarvan moeten middelpunt en straal al aanwezig zijn. Zomaar een cirkel die uit de lucht valt, dat kwam ook bij Euclides eigenlijk niet voor.

Fase drie, het tekenen van de hoogtelijnen

De leerlingen van Euclides moesten een hoogtelijn volledig met passer en liniaal construeren. Drie cirkels zijn er nodig.

Onze programma's – ook TRICKS, en dat is gezien het voorgaande toch opmerkelijk – bieden de loodlijn vanuit een punt op een lijn voor veel lagere prijs aan: er is een button voor en alleen punt en lijn hoeven nog maar aangewezen te worden. Natuurlijk moeten die twee dingen er dan ook zijn, anders gaat het niet. De drie programma's hebben ieder hun eigen lijstje met op deze manier direct construeerbare objecten. Middelloodlijnen, deellijnen, parallelle lijnen, enzovoort; en het gaat allemaal heel makkelijk.

Maar bij deze constructies openbaren zich ook nieuwe verschillen.

Bij SKETCHPAD moet ik *eerst* op de *aanwijspijl* (zie het menuhalkje hiervoor) klikken, pas dan kan ik de bedoelde lijn en het punt *aanwijzen*. Het tweede object nog met *Shift-klik* ook, anders is het eerste object weer vergeten. Daarna wordt in het constructiemenu de optie *Perpendicular Line* aangeklikt. Klaar.

CABRI kiest voor de volgorde: opdracht eerst, lijn en punt later. Dat kan dus altijd direct. CABRI heeft bovendien *keep-in-tool* bediening. Dat wil gewoon zeggen dat je de hamer die je gebruikt na het slaan nog in de handen hebt voor de volgende klap. Gevolg: door nogmaals lijnstuk-punt en lijnstuk-punt aan te klikken, ben ik al drie hoogtelijnen verder.

SKETCHPAD heeft bij construeren geen *keep-in-tool*, dat kan namelijk niet vanwege de gekozen volgorde *argu-*

menten, opdracht. Na een constructie-opdracht ben je meteen terug in de aanwijstoestand. Bij de buttons waaronder de vrij maakbare objecten zitten, geldt wel *keep-in-tool*.

TRICKS lijkt hier sprekend op CABRI: volledig *keep-in-tool* en eerst opdracht geven, dan punt en lijn aanklikken. Toch is TRICKS weer wat rigide: je moet echt punt-lijn in deze volgorde aanwijzen, andersom geeft soortgelijke ongelukken als eerder gemeld bij het tekenen van de driehoek.

CABRI heeft bij alle constructies nog het volgende extra voor op de anderen. Je kunt bij loodlijn bijvoorbeeld elk punt aanwijzen wat je wilt. Dat punt kan een bestaand getekend punt zijn, maar ook een punt op een lijn of cirkel, of een snijpunt dat wel te zien is, maar nog niet expliciet gemaakt. Door deze soepelheid gaat het werken met CABRI extra makkelijk, zonder dat er – in mijn ervaring – problemen met zijn vooruitziende blik ontstaan, doordat het programma iets doet wat je nou net niet had gewild.

In alle stadia van het construeren bieden de programma's hulp, door aan te geven wat wel en niet kan. SKETCHPAD laat na het aangeven van de argumenten punt-lijn zien welke opdrachten er gegeven kunnen worden. CABRI helpt na het geven van de opdracht op de eerder beschreven manier: het laat zien op het tekenscherf wat mogelijk is.

TRICKS is hierin weer de mindere: alleen wordt aangegeven welke opdrachten mogelijk zijn, verder niet.

Mijn voorlopige slotsom is dat met alle drie de programma's de gezochte figuur op het scherm kan worden gebracht. Via een gericht practicum, waar de bediening via opgaven duidelijk wordt gemaakt, zal het allemaal wel gaan.

TRICKS is in zekere zin het helderst, maar ook het meest rigide. Je moet érg veel acties op laag niveau doen en dat blijft zo. CABRI geeft de helderste en soepelste begeleiding, zonder die op te dringen. Wat de opdrachtvolgorde bij *Sketchpad* betreft: dat kan een kwestie van smaak zijn.

Ik herhaal voor mezelf nog even de drie constructies en tel het totaal aantal muis-acties per programma. Ik weet nu alle opties en doe het zonder fouten en zo snel mogelijk; CABRI: 15, SKETCHPAD: 19, TRICKS: 34.

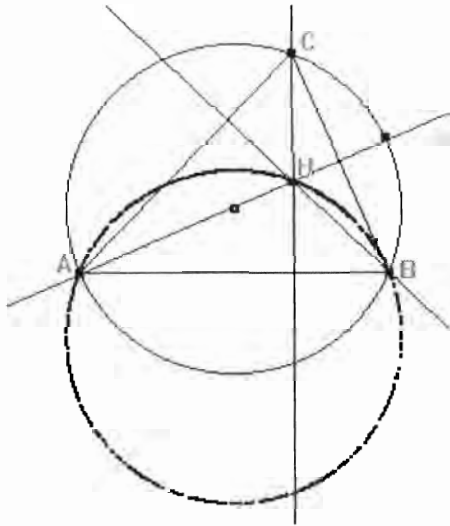
Op de drie schermen gaan wel steeds de hoogtelijnen door één punt. Dat blijft. Dat punt markeren we nu even echt, want het was nog niet te zien, we dossen de tekeningen ook uit met letters zoals in het voorbeeld. Ook dit gaat op drie verschillende manieren, uiteraard.

Op naar de volgende ronde: de dynamiek!

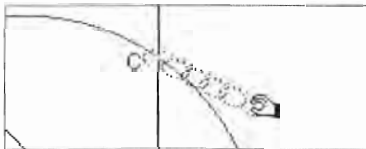
Dynamiek

Met de formulering in de opgave '*Hoe beweegt H, als C de cirkel doorloopt*' wijk ik af van de klassieke formulering '*Wat is de meetkundige plaats van ...*'. Die dynamische formulering past goed bij de computerprogramma's waar we mee werken. Daar is de meetkundige plaats geen statische verzameling van punten met een bepaalde eigenschap, maar kan dynamisch ontstaan.

Bij alledrie de programma's kunnen we het hoogtepunt als het ware een lekkende verfpot meegeven en daarna punt C bewegen over de cirkel. H laat dan een spoor na, zoals hier in de TRICKS-versie.



En dat is toch wel een verrassend gezicht. SKETCHPAD en CABRI kennen de optie *animate* of *animation*. De bedoeling is de computer het bewegen zelf te laten doen, de kunst is dat handig voor elkaar te brengen. Bij SKETCHPAD maak je er eigenlijk zelf een button bij en je geeft aan wat waarover en hoe moet bewegen bij klikken op die button. Dat is even werk, maar het ziet er fraai uit, vooral voor demonstraties. CABRI is het simpelst en als je het een keer gezien/gevoeld hebt, vergeet je het niet meer. Je kiest de optie *animation* uit een van de menu's (wel even weten waar het zit, maar dat wijst zich snel) en probeert aan punt C te trekken met de muis. Je krijgt nu het gevoel dat je een flipperkast bedient: je trekt als het ware aan een veer. Dit zie je name ijk:



Na loslaten, afschieten bijna, beweegt C over de cirkel. De cirkel zelf en A en B blijven stil, maar driehoek ABC met hoogtelijnen en H glijden mee en met de verfpot aan H erbij zien we de baan die we willen zien. De bewegende beelden zijn even mooi als bij SKETCHPAD. Dit is nauwelijks na te vertellen: dit kan alleen gezien worden. Je ziet H een cirkel beschrijven, H blijft daarbij op een vaste afstand van C meelopen. Dat geeft misschien wel een tip voor het vinden van een bewijs voor de bewering over de cirkelbaan. Kijkend naar het bewegende beeld: die hoogtelijn uit C schuift heen en weer en heeft nog een tweede snijpunt van de cirkel, zeg D . HD en AB hebben zo te zien iets met elkaar. Weer een bewijstip?

Kortom: een sterke optie bij het zoeken naar bewijzen. Het nagelaten spoor gedraagt zich echt zoals ik het beschreven heb. Het is alleen maar een spoor. Als je de cirkel verschuift of vergroot, beweegt het spoor niet mee. Bewegend punt H blijft wel een spoor achterlaten, tenzij je dat spoorzetten uitschakelt.

De baan van H kan – niet door elk lid van ons trio – ook ineens getekend worden en beweegt dan later mee als geconstrueerd object. Willen we bijvoorbeeld weten hoe de baan van H van de cirkel en van A en B afhangt, dan willen we die baan als afhankelijk object laten meebewegen. CABRI en SKETCHPAD hebben hiervoor de constructie-opdracht meetkundige plaats aan boord, in hun taal: locus. Dat kleine beetje Latijn houden we er ook zonder Ovidius maar in.

In het CABRI-geval: klik op de locus-optie, op H en daarna op C . Klaar, de locus staat er, en beweegt mee als we A , B of de oorspronkelijke cirkel veranderen. Nu valt duidelijk waar te nemen: de baan van H is een cirkel die even groot is als de eerste cirkel en door A en B gaat.

SKETCHPAD maakt op zijn eigen manier net zo eenvoudig een locus.

Slotstom: De mogelijkheden van TRICKS zijn hier beperkt. Omdat juist het beïnvloeden van de locus zo interessant is (en dus ook in de Profi-meetekundige regelmatig gebruikt wordt, vooral bij de kegelsneden verderop) is dat toch wel een (te) groot gemis.

SKETCHPAD en CABRI zijn nog steeds gelijkwaardig in hun prestaties, al is de bediening van CABRI naar mijn smaak duidelijk soepeler.

Andere mogelijkheden

Eigenlijk hebben we aan de hand van het ene voorbeeld de drie belangrijkste zaken gezien: tekenen, construeren en dynamiek gebruiken.

Uitdossing

Natuurlijk is het mogelijk tekeningen aan te kleden met kleur, dikke lijnen, dunne lijnen, stippellijnen, teken-tjes in de hoeken, enzovoort. Op het markeren van hoekpunten met letters na is het in de klas allemaal niet zo hard nodig, maar voor demonstraties wel. De kwaliteit en mogelijkheden van gespecialiseerde tekenprogramma's, zoals waarin dit artikel de voorbeeldfiguur mee gemaakt is, wordt natuurlijk niet gehaald. Dat hoeft ook niet natuurlijk.

Metten

De drie programma's bezitten allemaal meetinstrumenten. Je kunt om lengtes, hoeken, soms ook oppervlakken, booglengtes en dergelijke vragen. Soms is verder werken met die getallen mogelijk. Zo kun je in CABRI de lengte van een stuk cirkelboog uitleggen langs een rechte lijn. Wie handig is, kan nu de baan van een buitenpunt van een rollend wiel, de cycloïde, construeren; dat is iets wat met passer en liniaal compleet uitgesloten is.

Analytische meetkunde

Alle programma's kunnen coördinatenstelsels laten zien en van lijnen en cirkels de vergelijkingen vertonen. Als je een cirkel verschuift, zie je de coëfficiënten van diens vergelijking veranderen. De vergelijking is dus een afhankelijke object. Gevolg: het is niet mogelijk een vergelijking te geven en daarvan de bijhorende figuur in beeld te brengen.

Kegelsneden

CABRI kan een kegelsnede tekenen als vijf punten gegeven zijn. Je kunt deze kegelsneden onderling, met cirkels en met lijnen snijden en vergelijkingen van kegelsneden vragen. Mooie mogelijkheden voor projectieve meetkunde!

SKETCHPAD levert een slim script mee, waardoor je ook een kegelsnede door vijf punten kan tekenen, maar het blijft een locus. Dus geen snijden met lijnen, enzovoort.

Grafieken

SKETCHPAD laat je vrij gemakkelijk een grafiek maken van twee metingen, bijvoorbeeld de lengte van de hoogtelijn uit C in ons voorbeeld, uitgezet tegen hoek CAB . Je plot eigenlijk een coördinatenpunt en doet met trace de rest (het spoor met de verfpot). Fraai.

In CABRI doe je het met iets meer moeite na, assenstelsels zijn er namelijk wel.

Eindoordeel

De belangrijkste boodschap uit het voorgaande is: kies een programma dat handig te bedienen is en de mogelijkheden heeft die je nodig hebt, dat enigszins meedenkt bij wat je doet, niet te star is, dat je met gemak makkelijke dingen laat doen in het begin en dat toch voortdurend nieuwe mogelijkheden voor je heeft.

Mijn eindoordeel: GEOMETRICKS is helder, maar te rigide en te beperkt. CABRI en SKETCHPAD zijn wat betreft de nieuwe VWO-meetkunde inhoudelijk ruim voldoende, maar het bedienen van CABRI lijkt mij soepeler te gaan, zowel in het begin als bij fanger gebruik.

Info

Cabri II

Msdos-programma, Windowsversie in voorbereiding.

Bestellen via:

Candiensten
Kruislaan 419
NL-1098 Amsterdam
Tel: 020-5608400

<http://www.candiensten.nl/cabri/index.shtml>

(Ook voor downloaden demoversie)

Single-user licentie: onder de 400 gulden.

Schoollicentie: ongeveer 1700 gulden.

Let op bijzondere aanbiedingen, ook in combinatie met andere programma's, schoolboeken.

Sketchpad

Windows-programma.

<http://www.nchs.hc.edu.tw/~ylyen/sketch-d.htm>

(Downloaden demo Sketchpad)

Distributie-informatie:

<http://www.solutions.ibm.com/k12/solutions/midhigh/geosk1.html#1>

(Frijs wordt daar niet vermeld.)

GeomeTricks:

Msdos-programma.

Prijs: Schoollicentie: kr. 1080 (Deense kronen; $\pm f 400$).

<http://www.orfeus.dk/oversigt/orlkat/geotrick.htm>

Verwante programma's

Zwaardere wiskundeprogramma's zoals MATHEMATICA en MAPLE hebben ook veel mogelijkheden voor meetkunde. Deze programma's geef je in principe opdrachten via het toetsenbord, dus geen construeren met button en muis. Daar kunnen fantastische meetkundige constructies mee in beeld gebracht worden, vooral gecombineerd met uitgebreid rekenwerk, maar deze werkwijze is echt heel anders.

Een andere familie programma's vervangt de tekenafel van architect en technisch ontwerper: CAD-programma's. Ook daar kan heel wat dynamische meetkunde mee bedreven worden, omdat er ook koppeling van objecten (de sleutel voor alles van hier boven) aanwezig is. In het MTO wordt er hier en daar gebruik van gemaakt.

Zie ook:

<http://home.t-online.de/home/elschenbroich/geomet.htm>

(Duitstalig, ook over andere programma's.)

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>

De Elementen van Euclides (met dynamische, in Java uitgevoerde figuren).

<http://forum.swarthmore.edu/~sarah/HTMLthreads/articleocs/tool.object.html>

(Discussies over bediening van deze programma's.)

Hoe nu verder met Perdix?

Zo:

Maar Pallas – hoedster van talent – greep in en maakte hem tot vogel, midden in zijn val kon hij op vleugels vliegen: de eerst zo snelle kracht van zijn verstand verplaatste zich naar vleugelpaar en poten, maar hij hield zijn naam van vroeger.

Perdix veranderde in een patrijs.

Maar voor de echte meetkunde blijft de snelle kracht van het verstand nodig: Die baan van dat hoogtepunt, daar hoort nog een bewijs bij. Heeft u dat al? Ga dan door naar de puzzelrubriek van deze *Nieuwe Wiskrant*, waar een aantal lastiger opgaven staan die om onderzoek met een of ander constructieprogramma vragen.

Aad Goddijn, Profi-team, Freudenthal Instituut

