In de recreatierubriek geeft **Aad Goddijn** deze keer een aantal meetkundige problemen op waarbij de computer goed van pas komt.

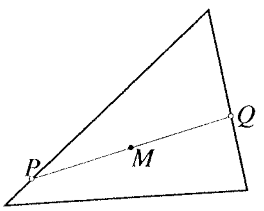
Pret op meetkundige plaatsen

Recreatierubriek

In deze puzzelrubriek neem ik een paar meetkundige problemen op, waaraan ik zelf niet zou beginnen als er geen constructieprogramma's als Cabri en Sketchpad bestonden. Enkele van deze problemen zijn ook pas bedacht of opgelost in het Cabri-en-Sketchpad tijdperk. De doelgroep is: mensen die al wat ervaring met zulke programma's hebben. Het mag natuurlijk ook zonder, mijn zegen heeft u.

Genoemde programma's zijn heel geschikt voor het opsporen van verrassende meetkundige plaatsen. In die sfeer past de eerste opgave.

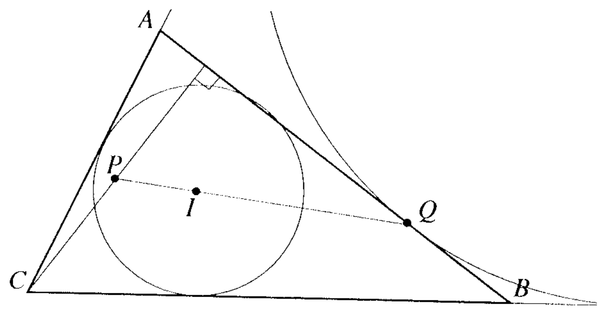
Opgave 154
Neem een vaste driehoek en een lopend punt P op de driehoek. Er bestaat een punt Q dat helemaal aan de andere kant van P ligt, dat wil zeggen PQ verdeelt de driehoek in twee delen met gelijke lengte.



Wat is de figuur der middens M van de lijnstukken PQ, als P de driehoek doorloopt?
Zelfde vraag voor oppervlakte verdelende PQ's.

Bij de klassieke vlakke meetkunde krijg je wel eens de indruk dat elk stel van drie bijzondere punten op een lijn ligt. Bekend is dat van hoogtepunt, zwaartepunt en middelpunt van de omgeschreven cirkel.
Hier volgt een wat mij betreft bizar voorbeeld.

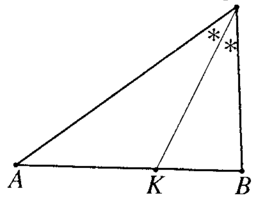
Opgave 155
In driehoek ABC is I het middelpunt van de ingeschreven cirkel, P het midden van de hoogtelijn uit C en Q het raakpunt van de aan AB aangeschreven cirkel.
Toon aan: P, I en Q liggen op één lijn.



Hoe komt een mens daar nou op?
Constructieprogramma's zijn handig om bij een driehoek allerlei punten te markeren. Ik noem maar wat: voetpunten van de hoogtelijnen, middelpunten van speciale cirkels, raakpunten met de ingeschreven cirkel, in zessen verdeelde zwaartelijnen, enzovoorts, enzovoorts.
Soms lijkt het erop dat drie daarvan op één lijn liggen, hoe je ook verschuift. Nu dus de echte opgave. Die luidt:

Opgave 156
Zoek zelf eens drie bijzondere punten bij de driehoek ABC, die op één lijn liggen en lever een bewijs.

De inleiding tot de volgende opgave is de zogenaamde cirkel van Apollonius. In onderstaande figuur is K een vast punt op het lijnstuk AB.



P ligt zodanig, dat de hoeken $\angle APK$ en $\angle KPB$ gelijk zijn. De verhouding $|AP| : |PB|$ is nu gelijk aan $|AK| : |KB|$ en P ligt op een cirkel, de cirkel van Apollonius.
Het is niet zo moeilijk de meetkundige plaats van P te construeren. Een manier, niet dé manier maar wel interessant in verband met de volgende opgave, is:
Teken een cirkel die door A en K gaat en een die door K en B gaat. Zorg dat de stralen zich verhouden als $|AK|$ en

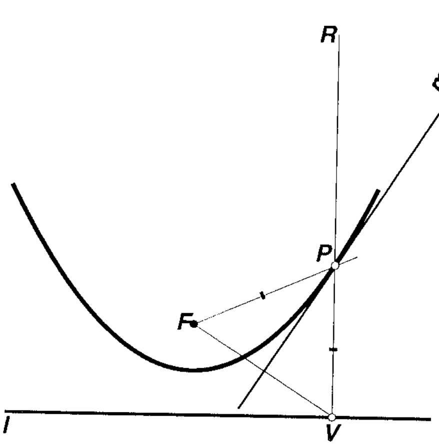
|KB|. P is nu het andere snijpunt van de twee cirkels. Laat nu de cirkels variëren en daar loopt P over de Apolloniuscirkel. Het punt waar de buitendeellijn van $\angle APB$ het verlengde van AB snijdt, is in dit verhaal ook van belang, het is ook een vast punt.

Opgave 157

Gegeven vier punten A, S, R en B. Waar liggen de punten P waarvoor $\angle APS$ en $\angle RPB$ gelijk zijn?

De cirkel van Apollonius is hiervan een bijzonder geval: de vier punten liggen dan op één lijn en S is gelijk aan R. Andere bijzondere gevallen zijn goed onderzoekbaar:
a. A, S, R en B op één lijn, maar S niet gelijk aan R
b. S gelijk aan R, maar A, S, R en B niet op één lijn.
Bij het algemene geval is het maken van een goede tekening met de volledige meetkundige plaats al heel wat!

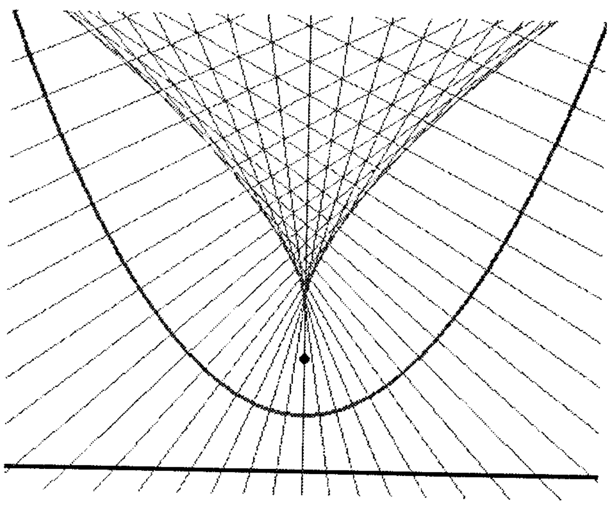
In de nieuwe meetkunde voor VWO-B komt de parabool weer voor als verzameling punten die gelijke afstanden hebben tot een gegeven punt en lijn; brandpunt en richtlijn. Natuurlijk wordt dat met Cabri geconstrueerd:



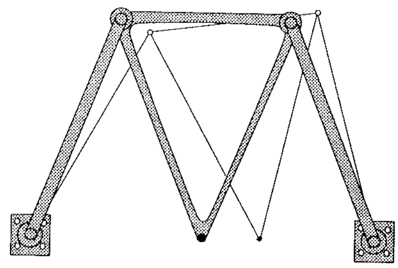
Hier is F het brandpunt en l de richtlijn. Op de richtlijn l ligt een (lopend) punt V. VR is de loodlijn in V op l en ook de middelloodlijn van FV is te zien. P is hun snijpunt. P ligt op de parabool, dat spreekt. De parabool wordt zo als meetkundige plaats geconstrueerd en er is een bonus: die middelloodlijn blijkt de raaklijn in P te zijn.
Waar raaklijnen zijn, kunnen normalen getekend worden, die staan er loodrecht op.
In de figuur in de volgende kolom ziet u wat er gebeurt als een serie van die normalen getekend wordt. Het netwerk is een selectie uit de meetkundige plaats van de normalen als V l doorloopt. U mag aannemen dat Cabri eindig veel punten op l kiest, die op onderling gelijke afstanden liggen en dat één zo'n sample V op de as van de parabool ligt.

Opgave 158

In de illustratie is er een gebied waar steeds drie normalen door gaan.
Toon aan dat onder deze omstandigheden de selectie van de normalen inderdaad doet wat er schijnt te gebeuren: er gaan er steeds drie door één punt.



Onder andere voor het verbeteren van de stoommachine werd in de achttiende en negentiende eeuw naarstig gezocht naar stangenmechanieken die een punt in een rechtlijnige beweging brachten. Dat is niet zo makkelijk als je je moet beperken tot scharnierende stangen en schuiven niet is toegestaan. Dan is het cirkels alom, maar lijnen: zelden of slechts in benadering.
Een van de pogingen(?) was het mechanisme van Robert Manchester, zoals beschreven in de negentiende-eeuwse klassieker *How to draw a straight line* van A. B. Kempe:



Er zijn twee vaste punten onderaan. Die liggen op afstand $2a$ van elkaar. Aan die vaste punten zitten draaibare staven van lengte b; aan hun einden zit, ook weer draaibaar, een driehoek met twee zijden b en een zijde a. Het is duidelijk dat het geheel nog flexibel is.
Kijk nu naar het zwarte punt van de driehoek. Dat kan zich midden tussen de twee vaste punten bevinden, maar ook naar de vaste punten toe bewegen. Het ligt voor de hand te veronderstellen dat de baan die dat punt beschrijft, recht is.

Opgave 159

Zoek door het mechaniek te maken uit of dat inderdaad zo is.

Succes!
Een nog niet vermelde mogelijkheid om reacties in te sturen is natuurlijk e-mail, ook met Cabri- of Sketchpad files: *a.j.goddijn@fi.ruu.nl*