

Op 30 en 31 januari moeten de Nationale Wiskunde Dagen 1998 het wiskundeonderwijs in Nederland danig ontwricht hebben. Enkele honderden aanwezigen genoten van de vele voordrachten over de meest uiteenlopende onderwerpen. **Sieb Kemme** was erbij en doet verslag.

De wiskunde van gewone en ongewone dingen

Het is voor één mens gewoonweg ondoenlijk om een volledig beeld te geven van het rijke en gevarieerde aanbod op de Nationale Wiskunde Dagen. Bovendien zou daarmee een hele jaargang van de *Nieuwe Wiskrant* gevuld zijn. Daarom zullen de thuisblijvers het moeten zien te stellen met enkele persoonlijke impressies van voordrachten en werkgroepen.

Het programma

Naast de vier plenaire voordrachten was het programma verdeeld in de volgende thema's:

- discrete wiskunde
- wiskunde en geschiedenis
- wiskunde en taal
- wiskunde en luchtvaart
- wiskunde en medische wetenschap
- wiskunde en sterrenkunde.

Een bezoeker kon zo aanwezig zijn bij negen voordrachten of werkgroepen. Daarnaast was er een continue info-markt en een expositie over zaken die van belang zijn voor het wiskundeonderwijs, zoals: nieuwe schoolmethodes, grafische rekenmachines, ondersteunend lesmateriaal.

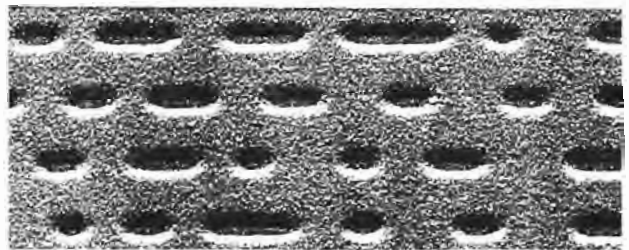
Wiskunde en de compactdisc

De compactdisc is niet meer weg te denken uit de huiskamer en de computer. Het is een gewoon ding geworden waar we bijna dagelijks mee te maken hebben. Toch zit er achter deze technologie een forse hoeveelheid wiskunde. Professor J.H. van Lint stond aan de wieg van de CD en deed het wiskundige bakerwerk.

Het spoor van een CD is een vijf kilometer lange spiraal met een spoorbreedte van 0.6 micrometer. Het spoor bestaat uit *putten* met daartussen zogenaamde *dammen*. Bij het aflezen wordt iedere overgang van een put naar een dam en omgekeerd, geïnterpreteerd als een 1. Zo ontstaat een serie van nullen en enen.

Niet iedere rij nullen en enen zal voorkomen. Bijvoorbeeld: twee enen kunnen nooit naast elkaar voorkomen

(dan zou een overgang put-dam direct gevolgd worden door een overgang dam-put zonder dat daar een dam tussen zit). De nullen en enen worden doorgaans in woorden met lengte acht gelezen. Zo'n achttal heet een *byte*. Een geluidssignaal wordt 'gedigitaliseerd' doordat het wordt omgezet in vier bytes (dat zijn dus 32 nullen of enen). Omdat op een CD-rom niet alle combinaties van nullen en enen mogelijk zijn, worden die vier bytes telkens vertaald in vier rijtjes van lengte veertien. Daartoe is in de CD-speler een woordenboek ingebouwd die iedere byte omzet in een toelaatbaar rijtje met lengte veertien.



Sporen op een CD plaat

Een van de slimste vindingen is de toevoeging van een foutenverbeterende code aan het rijtje nullen en enen. Achter een rijtje wordt een rijtje met een vaste lengte van nullen en enen gezet dat berekend is volgens een wiskundig systeem. Bij het aflezen wordt dit rijtje vergeleken met de hoofdrij. Is er geen overeenstemming, dan is met het toegevoegde rijtje te berekenen wat er fout is en waar die fout zit. Met andere woorden: de fout wordt tijdens het aflezen hersteld. Een doorsnee CD bevat zo'n 500 000 fouten. Dankzij de correcties merken we daar niets van. Achter dit foutenverbeterende systeem zit een fraai stukje discrete wiskunde. Maar ook valt er veel natuurkundigs te beleven aan de CD.

Een heel mooie combinatie van wiskunde en natuurkunde is het volgsysteem dat ervoor zorgt dat het spoor goed gevolgd wordt door de aflezende laserstraal.

Kortom: de CD vormt een rijke bron van mogelijkheden voor een profielwerkstuk in het profiel Natuur & Techniek.

Het lengen der dagen

De kortste dag in het jaar is op 21 december. Daarna worden de dagen langer. 'Maar je merkt het pas met Driekoningen', zei mijn pake, 'dan pas zie dat het 's morgens vroeger licht wordt.' Hij had gelijk. Als je de grafieken van zonsopgang en zonsondergang over een heel jaar in één figuur tekent, dan zie je dat de zon na 21 december nog steeds later opkomt, maar dat die 's avonds toch nog zoveel later ondergaat, dat je netto een langere dag overhoudt. Het is een alledaags verschijnsel dat vanzelfsprekend al eeuwenlang bekend is. Er is ook een wiskundige verklaring voor. Hans van Lint deed die haarfijn uit de doeken in zijn presentatie over de tijdsvereffening. Het is geen eenvoudig verhaal. Er komt ruimtemeetkunde, bcl-meetkunde en goniometrie bij kijken. Ook iets voor een profielwerkstuk Natuur & Techniek? Maar dan wel voor de betere leerling.

Een appel valt

Vincent Icke is hoogleraar theoretische natuurkunde. Hij houdt zich bezig met het gewone: de vallende appel, en met het ongewone: zwarte gaten. In zijn plenaire presentatie gaat het vooral over de grote lijnen in ons dagelijks bestaan. Die appel valt en wij zijn gewend om dat een kracht, de zwaartekracht, te noemen. Maar wat is dat dan voor een kracht die dwars door lichamen heengaat? Vijftig eeuwen natuurkunde laten zich volgens Icke als volgt samenvatten: 'Het heelal bestaat uit deeltjes, ruimte en tijd.' De zwaartekracht komt daar dus niet in voor. En de hamvraag na die vijftig eeuwen natuurkunde is: 'Waar is wat wanneer?'

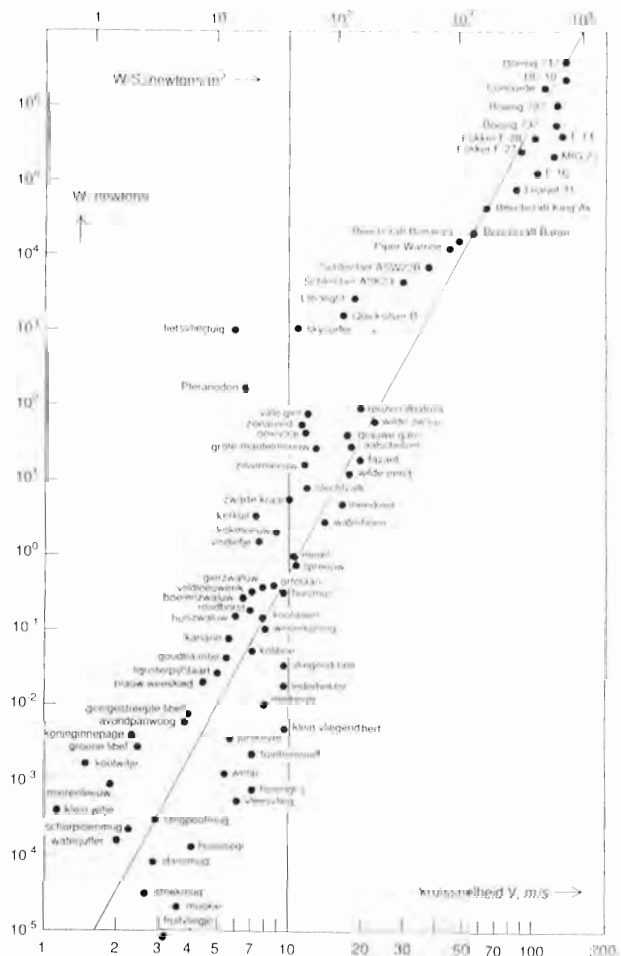
Het vallen van de appel is niets anders dan het volgen van een pad dat in de tijdruimte is vastgelegd en wordt bepaald door de kromming van die ruimte als gevolg van de aanwezige massa's. Die vorm van het pad is het duidelijkst te zien in de omgeving van zwarte gaten, dat zijn die plekken in de ruimte waar zich een grote massadichtheid bevindt.

Als illustratie bedacht Icke een bouwplaat voor zwarte gaten. Ook schreef hij een computerprogramma voor het drie-lichamen probleem. Drie lichamen bewegen volgens voorgeschreven banen. Nog geen vijftig jaar geleden waren die banen nauwelijks uit te rekenen. Nu kan het gewoon op een PC worden gesimuleerd. Het resultaat is onverwacht grillig en opwindend. In bepaalde gevallen kan één van de drie lichamen door de andere twee als een raket in de ruimte worden geschoten. Zon, aarde en maan vormen zo'n stelsel van drie lichamen. Tot nu toe ging alles goed.

Huismus, knobbelzwaan en jumbojet

Kan iemand een uur lang een voordracht houden over één grafiek? Ja, professor H. Tennekes kan dat. Maar de gra-

fiek is dan ook een heel bijzondere. Horizontaal staat de 'kruissnelheid' uitgezet en verticaal het gemiddelde gewicht van vliegende wezens en objecten. Onderaan staan de fruitvliegen en bovenaan de Boeing 747's. Beide schalen zijn logaritmisch.



Verband tussen gewicht en snelheid bij vliegende wezens en objecten

Het getransformeerde verband is duidelijk lineair. In formule: het gewicht is evenredig met het kwadraat van de snelheid.

Tennekes bespreekt vervolgens de afwijkingen van deze lijn. De gierzwaluw heeft eigenlijk te grote vleugels, maar moet die wel hebben om rustig een nest te kunnen aanvliegen. Wat de gierzwaluw wel kan, kan de Concorde niet. De Concorde heeft ook grote vleugels nodig om onder de 300 km/uur te kunnen landen. Maar de gierzwaluw kan de vleugels naar achteren strekken en zo het oppervlak aanzienlijk verkleinen, om daarmee toch hoge snelheden te maken. De Concorde moet de hoge snelheid halen uit een overdosis van motorgeweld en zal dus nooit zuinig kunnen vliegen. In dat opzicht is het ontwerp van een Boeing 747 het meest revolutionair, aldus Tennekes.

Het is het meest economische toestel. Hoe zwaarder, hoe hoger de kruissnelheid. Zwanen zijn grote zware vogels. Ze landen met een flinke snelheid en hebben daarom ook het water nodig als landingsbaan. Boven een massa van tien kilo (gewicht van 100 Newton) zijn er geen vliegende vogels meer. Dan nemen de vliegtuigen het over. Onderin de grafiek zitten de insecten en de kleine vogels. Die gaan onmerkbaar in elkaar over. En de mens? Die komt in het verhaal nauwelijks voor. Met het vermogen dat we kunnen leveren (250 watt) komen we niet hoger dan de snelheid van een fiets. We zullen dus hele grote vleugels moeten hebben om bij deze lage snelheid voldoende draagkracht te kunnen leveren. Pas in 1988 is het een nieuwe Dædalus gelukt om de vliegtocht van zijn voorganger uit de Griekse oudheid op een lucht fiets na te doen.

Het hele verhaal biedt meer dan voldoende materiaal voor een profielwerkstuk Natuur & Gezondheid of Natuur & Techniek waarin wiskunde, biologie en/of natuurkunde samengaan.

De wiskunst van het jongleren

Voor de plenaire avondvoordracht zijn de verwachtingen altijd hoog gespannen. Bij de eerste NWD waren er de boemerangs en andere wonderlijke beweges, bij de tweede de zeepvliezen, bij de derde de klokkenluiders. Zou het de organisatie lukken om weer iets op het podium te krijgen dat even verwonderlijk en toch wiskundig is? Colin Wright, geboren in Australië, studeerde wiskunde in Cambridge en wist zich tegelijkertijd te bekwaamen in het ballroomdansen, het één-wiel fietsen en het jongleren. In zijn voordracht ging het om het laatste.

Bijna iedereen zal in zijn jeugd verwoede pogingen hebben gedaan om meer dan één bal in de lucht te houden. Wel of niet gesteund door een muur waartegen gekaatst mag worden. Met twee ballen is het nog wel te doen. Er zijn verschillende manieren om te jongleren met twee ballen. Je gooit ze bijvoorbeeld kruiselings over, dus van de linker- in de rechterhand en tegelijk van de rechter- in de linker. Of je gooit ze gelijktijdig per hand gewoon recht omhoog en vangt ze met dezelfde hand weer op. Of je gooit een bal van de linker- in de rechterhand en geeft die vervolgens door van de rechter- naar de linkerhand. De andere bal gooi je op dezelfde manier daar achteraan. Deze manier van gooien heet een 'shower'. Bij deze shower hebben de handen een verschillende functie: de linkerhand gooit en de rechterhand vangt alleen maar. Daarom is deze manier niet toegestaan in de officiële jongleerkunde. Van de twee resterende manieren is alleen het kruiselings overgooien echt interessant.

Maar er kan veel meer met twee ballen. Je kunt ook beginnen met de bal in de linkerhand heel hoog te gooien. Ondertussen gooi je de bal in je rechterhand van rechts naar links naar rechts naar links en vang je de eerste bal rechts op, vervolgens gooi je de rechter hoog op, enzovoorts ...



Colin Wright, jonglerend tijdens zijn plenaire voordracht

Bij drie ballen ontstaat weer een nieuwe situatie. Ook hier doet de 'shower' weer niet mee. Colin Wright liet een groot aantal variaties met drie ballen zien. Hij begon echter pas goed op gang te komen met vier en vijf ballen. Het zal inmiddels duidelijk zijn dat de verschillende manieren van jongleren vol zitten met wiskundige patronen die vragen om een systematische beschrijving. Zowel met schema's als met getallen liet Colin zien wat er allemaal mogelijk is. Tot slot mocht de zaal zelf een patroon kiezen met vijf ballen dat natuurlijk door Colin perfect werd uitgevoerd.

Schoolleven in Babylonië

Eleanor Robson studeerde wiskunde en Oosterse talen. Een dergelijke combinatie leidt al gauw tot de geschiedenis van de wiskunde in Babylonië. Ze heeft de zaal ingericht als een klaslokaal met voor iedere leerling-schrijver een eigen kleitablet en schrijfstift. De leerlingen worden opgedeeld tot 'schrijvers'. Ze moeten ook het nodige aan wiskunde doen. Op het rooster staat het leren schrijven van de getallen in het spijkerschrift. Eén verticale spijker is natuurlijk de 1. Twee spijkers naast elkaar is 2, drie naast elkaar 3 en dan wordt eronder verdergegaan met

weer bundeltjes van drie. Het getal 9 wordt geschreven als 3 bundeltjes van 3 onder elkaar. De 10 is één spijker horizontaal gezet en links van de eenheden. Dat gaat door tot 60. Dan wordt er weer verticaal, links verder geschreven. Het systeem wordt daarmee 60-tallig.



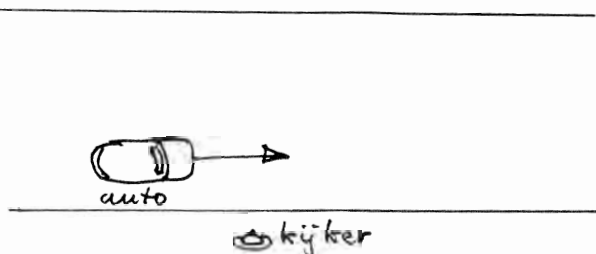
Een lesje spijkerschrift

Als een echte juf loopt Eleanor door het lokaal. Links en rechts helpt ze en deelt ze complimentjes uit. Tussendoor vertelt ze allerlei wetenswaardigheden over de wiskunde uit die tijd. De klas werkt leergierig. Het optellen, vermenigvuldigen en de breuken (ook 60-tallig) komen aan bod. En dat in maar drie kwartier.

De hele les is een prachtig voorbeeld van een presentatie van een profielwerkstuk over geschiedenis en wiskunde uit Cultuur & Techniek.

Meetkunde van de passerende auto

Gerrit Krol is een bekend schrijver van literaire werken. Als jong student schreef hij *Het gemillimeterde hoofd*. Een fantasievol boek over andere wiskunde. Daarna verdiende hij de kost als programmeur, maar bleef schrijven en zich verbazen over de relatie tussen wiskunde en het dagelijks leven. Zo viel het hem op dat een passerende auto heel anders voorbijrijdt dan we dat doorgaans tekenen. Meestal tekenen we zoiets:



Maar eigenlijk zien we dit:



Het viel Krol in een bioscoop op. Een passerende auto komt recht op je af gestormd en maakt dan een scherpe hoek. Dat is dus een ander soort meetkunde.

Zo blijft Krol zich verbazen over bestaande gewone zaken die toch ongewoon zijn en over onbestaanbare dingen, zoals complexe getallen en onmogelijke figuren, waar we toch over kunnen denken en praten alsof ze echt bestaan. Over de complexe getallen zei hij: 'Ze houden me bezig, maar ik heb er geen gemak van.'

Sneeuw is wit. Maar wit is het ontbreken van kleur. De oude Griek Anaxagoras vroeg zich af wat de echte kleur van sneeuw is. Volgens hem is water zwart, zoals gemakkelijk valt na te gaan als je in een sloot of vijver kijkt. Vallende sneeuwvlokken tegen een lichte hemel zijn grijs. Sneeuw moet dus wel zwart zijn. 'Als je je geest wilt voorbereiden op het onmogelijke, zijn dit nuttige oefeningen.'

Gewone dingen in een schilderij

De laatste plenaire voordracht gaat al drie jaar over kunst. Dat lijkt een traditie te worden. Mevrouw Field heeft uitgebreid onderzocht hoe de Renaissance schilder Piero della Francesca de techniek van het perspectief ontwikkelde. Piero della Francesca was naast schilder ook wiskundige. Hij schreef het oudst bekende boek over perspectief. Dit boek diende als voorbeeld voor veel boeken daarna. Daarnaast schreef hij nog twee boeken over meetkunde en schilderen. Opvallend daarin is zijn voor die tijd bijzondere mate van ruimtelijk inzicht. De voordracht van mevrouw Field was rijk geïllustreerd met afbeeldingen van de schilder.

Er zit geen ruimtemeetkunde in het profiel van Cultuur & Maatschappij. Een profielwerkstuk rondom dit onderwerp zit er dus niet in. Maar een zebra met een voorzichtige benadering van perspectief zou toch moeten kunnen.

Wat verder nog aan de orde kwam

Het is ondoenlijk een volledig overzicht te geven van alle werkgroepen en presentaties. Daarom volgt hier zomaar een greep uit die grote verscheidenheid.

Anne Zijlstra, wiskundedocent te Harderwijk, leidde een werkgroep over magische getallen. Hij maakte daarover een mooi klein boekje, vol met getallenleer, meetkunde, formules, toepassingen en bewijzen. Wat mij betreft is hiermee de eerste zebra, in een nog wat onwennige vorm, geboren.

Oda Wijers is radiologe. De radiologie houdt zich bezig met kankerpatiënten die bestraald moeten worden of bestraald zijn. Ze liet de aanwezigen iets zien van de wiskunde in haar beroep. Dat zijn onder andere: curves, vergrotingsfactoren, ruimtemeetkunde, doorsneden, enzovoorts. Wie meer over haar werk wil lezen, kan terecht in de bundel *Wiskunde en Werk* van Vrouwen en Wiskunde.

Hoe zorg je ervoor dat de kans op een botsing tussen twee vliegtuigen in de lucht zo klein mogelijk is? Geert Moek van het Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium liet zien hoe een model van vliegtuigseparatie een oplossing kan bieden.

Sterrenkunde is altijd een dankbaar onderwerp geweest voor veel wiskunde. Misschien is het wel de oorsprong van alle wiskunde. Wim Nobel van de Volkssterrenwacht in Amsterdam liet de wiskunde zien achter twee dubbelsterren die elkaar beurtelings bedekken. Het model is een mooie combinatie van meetkunde, grafieken, periodieke

functies en een beetje gonio.

Hoe test je een nieuw ontwerp van een vliegtuig? De gebroeders Wright bouwden er een en probeerden het uit. Ze bleven in de lucht. Voor en na hen zijn er velen naar beneden gevallen. Dat is gevaarlijk en kostbaar. Arthur Veldman, hoogleraar Technische Mechanica in Groningen, houdt zich onder andere bezig met het simuleren van luchtstromingen rond vliegtuigontwerpen. Dergelijke simulaties vragen speciale rekentechnieken. Daarmee is inmiddels een heel nieuw vakgebied binnen de wiskunde ontstaan: de numerieke stromingsleer. Met de komst van de grote en snelle computers is deze aanpak tot grote bloei gekomen.

Ten slotte

Eén ding is inmiddels wel duidelijk. De Nationale Wiskunde Dagen zijn en blijven een belangrijke bron voor inspiratie. De onderwerpen voor praktische opdrachten, profielwerkstukken en zebra's liggen hier voor het oprapen. Bovendien leer je nog het een en ander bij over de recente ontwikkelingen in je vak. En vergeet de contacten met collega's niet.

Kortom: de thuisblijvers kregen weer ongelijk.

Sieb Kemme

Historische kring reken- en wiskunde onderwijs Symposium 1998

Het vierde symposium van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs (HKRWO) heeft als onderwerp *Leren door doen. Historische reflecties op het activiteitsprincipe in het reken- en wiskundeonderwijs.*

Datum: 30 mei 1998

Plaats: Hogeschool Domstad te Utrecht

Tijd: 10.15-16.00 uur

Programma:

- *Tekenen en construeren, leren door doen dat blijft. De metamorfose van 75 jaar meetkundige activiteiten in de hoogste (16-18 jaar) klassen van de Vrije School Annemieke Zwart, Hogeschool Helicon, Zeist*
- *De mensen worden Meetkunstenaars geboren. De Maatschappij tot Nut van 't Algemeen en de wiskundendidactiek in de eerste helft van de 19-de eeuw. Denny Beckers, Katholieke Universiteit, Nijmegen*
- *Friedrich Fröbel, uitvinder van het speel-leermateriaal. Ed de Moor, Freudenthal Instituut, Utrecht*

- *Concepten van zelfwerkzaamheid vanuit de pedagogische Reformbeweging*

Prof. Britta Rang, Goethe Universität, Frankfurt

- *Posterpresentatie*

Iedere deelnemer kan een poster over een historisch-didactisch onderwerp presenteren.

Deelname door overmaking van f 35,- op giro 4657326 t.n.v. HKRWO te Amsterdam (koffie, thee en lunch inbegrepen).

Inlichtingen bij E. de Moor: tel. 020-6121382.

Het symposium wordt mede mogelijk gemaakt door subsidies van het Landelijk Werkcontact Geschiedenis en Maatschappelijke Functie van de Wiskunde (GMFW), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars (NVVW), de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO) en ondersteuning van het Freudenthal Instituut (FI).