

Onlangs haalde **Frans Keune** uit Nijmegen de landelijke pers naar aanleiding van zijn oratie *Naar de knoppen*. Een stortvloed van ingezonden brieven in de *NRC* was het gevolg. Frans Keune geeft zijn mening nog eens weer en **Martin Kindt** geeft een reactie.

Hoe realistisch is abstract?

Naar de knoppen

Per 1 september 1997 ben ik benoemd tot hoogleraar algebra aan de Katholieke Universiteit Nijmegen. Ik heb mijn inaugurele rede, getiteld *Naar de knoppen*, uitgesproken op 21 april jl. Hij ging niet over mijn specialisme, de algebraïsche K-theorie, maar algemeen over de aard van de wiskunde, de plaats die de wiskunde op grond daarvan in het onderwijs zou moeten innemen en hoe het daarmee in de huidige situatie gesteld is.

Ik geef hier een korte uiteenzetting van mijn standpunt. De volledige tekst is beschikbaar via mijn homepage, <http://www.sci.kun.nl/math/~keune/>.

De belangstelling voor bèta-vakken bij scholieren in het voortgezet onderwijs is in ons land sterk verminderd. Voor een land dat het in de toekomst moet hebben van hoogwaardige technologische kennis is dat een ernstig probleem. Naar mijn mening is er meer verband tussen wiskundeonderwijs en belangstelling voor bèta-vakken dan algemeen wordt aangenomen.

Een kenmerk van wiskunde is dat het abstract is, het gaat over door de mens beoachte zaken. Abstract is overigens niet hetzelfde als moeilijk: getallen zijn abstract en een kind weet wat een getal is. Juist in dit abstracte karakter ligt de kracht van de wiskunde.

- Doordat de begrippen absoluut helder zijn, zijn ze geschikt voor logisch redeneren. Bij het toepassen van wiskunde gaat het om heldere wiskundige modellen van realistische zaken.
- De abstractie maakt het mogelijk dat eenzelfde wiskundige theorie vele toepassingen heeft, met andere woorden de wiskunde is zo goed toepasbaar juist omdat hij abstract is.

Het is het samenspel van abstractie, deductie en toepassing dat de wiskunde zo krachtig maakt. Goed wiskundeonderwijs is gericht op dit samenspel van deze aspecten van de wiskunde. Vroeger lag de nadruk op abstractie en deductie en liet men de toepassing geheel over aan andere vakken, voornamelijk aan de natuurkunde. Tegenwoordig worden in het voortgezet onderwijs abstractie en de-

ductie grotendeels genegeerd en heeft men alleen oog voor het gebruik van de wiskunde. Dit wiskundegebruik is door gebrek aan abstractie en deductie noodzakelijkerwijs van een laag niveau.

Door het wegwerken van abstractie en deductie, twee wezenskenmerken van de wiskunde, blijft iets over dat geen wiskunde meer is. Toch is dit precies wat in de realistische wiskunde gebeurt. Abstracte zaken worden vervangen door zaken uit de leefwereld. De deductie is vervangen door waarnemen. Realistische wiskunde is dus geen wiskunde. Men doet er beter aan om te spreken van rekenen.

Vooraf het veronachtzamen van abstractie en deductie in de onderbouw van het voortgezet onderwijs heeft ongewenste gevolgen. Ik geef een opsomming:

- goede leerlingen krijgen te weinig uitdaging
- leerlingen krijgen een verkeerd beeld van wiskunde
- het keuzegedrag van leerlingen in de bovenbouw wordt in negatieve zin beïnvloed
- er is geen training in logisch redeneren, hetgeen ook maatschappelijke consequenties heeft: logisch kunnen denken is voor iedereen van grote waarde
- leerlingen die een exact pakket (of profiel) kiezen, hebben daarvoor niet de gewenste bagage
- het niveau van schoolvakken die wiskunde gebruiken, wordt teveel onder druk gezet
- universitaire bèta-opleidingen worden voor de keuze geplaatst iets aan het wiskundig inzicht van de studenten te doen of op hetzelfde lage niveau door te gaan; wiskundeopleidingen kiezen voor het eerste, maar de andere gewoonlijk voor het laatste.

Omdat het in de wiskunde gaat om heldere begrippen, is het wiskundeonderwijs bij uitstek geschikt om het logisch denken te leren. De wiskunde is er zo ongeveer voor uitgevonden. In het wiskundeonderwijs wordt dit aspect dermate verwaarloosd dat er inmiddels wordt geëxperimenteerd met 'denklessen' buiten het wiskundeonderwijs om, zie daarvoor het blad *Van twaalf tot achttien* van mei 1998.

Zeker leerlingen met enige aanleg voor exacte vakken krijgen al vanaf de brugklas niet geboden wat hen toe-

komt. Dat betekent verspilling van talent. Talent waar de maatschappij nu juist behoefte aan heeft. Om het tijt te keren, heb ik het plan gelanceerd om in Nijmegen een groep te starten die een lesmethode gaat ontwikkelen waarin het samenspel van abstractie, deductie en toepassing centraal staat. Het is daarvoor niet nodig dat het examenprogramma wordt gewijzigd. De methode zal geschikt moeten zijn voor verschillende vormen van gebruik: zelfstudie, als vervangende methode voor leerlingen met aanleg voor bèta-vakken of als methode voor het vwo. Gedacht wordt aan een methode op niet-commerciële basis. Van de mogelijkheden die Internet biedt, zal zeker gebruikgemaakt worden. Ik zal mij inspannen om dit plan gefinancierd te krijgen.

Er heerst de opvatting dat Nederland wat wiskundeonderwijs betreft tot de top van de wereld behoort. Uit internationaal vergelijkend onderzoek is echter hooguit gebleken dat Nederlandse schoolverlaters goed scoren als het gaat om basiskennis wiskunde. Aan het internationale onderzoek naar wiskundig inzicht bij schoolverlaters met een exact pakket heeft Nederland niet meegedaan. Het ministerie vond dat niet nodig. Waarom niet? De bewindslieden op onderwijs verkeren nu over het Nederlandse wiskundeonderwijs in een juichstemming die nergens op gebaseerd is.

Frans Keune, Faculteit der Wiskunde en Informatica, Katholieke Universiteit Nijmegen

Beknopt weerwoord

Enige jaren geleden viel mij de eer te beurt mee te mogen werken aan een uitzending van de BRT over het echeq van het wiskundeonderwijs in België. De interviewer vertelde me dat hij afgestudeerd natuurkundige was die altijd hoge punten voor wiskunde had gescoord op school. Bij zijn studie had hij nimmer het gevoel gekregen dat de schoolwiskunde iets betekende voor de natuurkunde. Ook noemde hij de drie wiskundetrauma's uit zijn schooljaren:

- het bewijs van de stelling van Pythagoras met behulp van lineaire algebra ('inproduct');
- de definitie van een rotatie als product van twee lijnspiegelingen;
- de stelling van Papy (bij navraag bleek dat zoiets te zijn als het continuïteitsaxioma).

Het wiskundeonderwijs in België was jarenlang op 'bourbakistische leest' geschoeid. Voor de leerling bleef er niets anders over dan braaf uit zijn of haar hoofd te leren, pure reproductie. Ik noem nu België, maar in allerlei landen zijn (of worden) analoge ervaringen opgedaan.

Denk niet dat ik Frans Keune's opvattingen rechtstreeks wil associëren met de bourbakistische geest, maar ik voer dit voorbeeld aan tegen zijn betoog over abstractie.

Uit het 'verdriet van België' blijkt, voorzover we dat nog niet wisten, dat mensen een zeker plafond van abstractie hebben. Zo is zelfs voor de knapste VWO-leerlingen een

exacte definitie van het begrip limiet te hoog gegrepen en kunnen slechts enkelen later in het kader van een wiskundestudie de epsilon-tiek werkelijk snappen. Natuurlijk vindt er bij menigeen geestelijke groei plaats; het lijkt er nu (in het experiment Profi) op dat 17- en 18-jarige VWO-B-ers enigszins rijp zijn om bewijzen te leveren in meetkundige situaties die voor jongere kinderen bijna altijd onoverkomelijk moeilijk waren. Daarmee beweer ik niet dat jonge kinderen nooit aan bewijzen kunnen toekomen. Er bestaan aantrekkelijke 'tal-en-telproblemen' waarbij door hen behoorlijk scherp kan worden geredeneerd.

Abstract is ook een rekbaar begrip. Ik ben het met Keune eens dat getallen weliswaar abstract zijn, maar geleidelijk aan ingebed raken in de leefwereld van het kind. Juist die geleidelijkheid is een van de kenmerken van 'realistisch' wiskundeonderwijs.

Het lijkt een onuitroeibare opvatting onder wiskundigen dat realistisch wiskundeonderwijs alleen over 'wereldse' toepassingen gaat. Hans Freudenthal en Adri Treffers onder andere, hebben helder uiteengezet wat dit type onderwijs behelst. Kenmerkend voor realistisch wiskundeonderwijs is dat *inzicht wordt ontwikkeld aan de hand van probleemsituaties die door de leerling als zinvol worden ervaren*. Zo'n probleemsituatie zal dikwijls worden ontleend aan de werkelijkheid, maar ook vaak aan een inmiddels vertrouwde wiskundige context. Het hangt vooral van de doelgroep van leerlingen af hoever je met dit laatste kunt en wilt gaan. In de Freudenthalfilosofie neemt het vertalen (en het versralen) van een probleem, het zogenoemde *horizontaal mathematiseren*, een belangrijke plaats in. Dit heeft zij gemeen met de *empiristische* methode. Maar in de realistische visie moet ook voortdurend aandacht worden geschonken aan *verticaal mathematiseren*, het op constructieve wijze verdiepen van wiskundige vaardigheden en inzichten. Het heeft er de schijn van dat in de eerste uitwerking van het programma 'Wiskunde 12-16' er in de schoolboeken te weinig aandacht is voor de verticale component, waardoor het resultaat te veel op 'ervaringswiskunde' lijkt, te empiristisch is. Daar wordt een echte wiskundige niet vrolijk van, dat begrijp ik heel goed. Wat ik niet goed begrijp is dat zo'n wiskundige publiekelijk een oordeel uitspreekt over realistische wiskunde zonder zich in de theorie daarvan te verdiepen of zich te laten voorlichten door erkende deskundigen op dit terrein.

En wat de treurig stemmende interesse voor bèta-studies betreft: dat kan niets te maken hebben met new look wiskunde. Het grootste deel van de inhoud van de huidige wiskunde B is 30 jaar oud en het eerste cohort opgevoed met (pseudo-)realistische wiskunde verlaat pas in 1999 de school. Wat niet wegneemt dat het de moeite waard is te proberen via uitdagend wiskundeonderwijs iets aan de dreigende bèta-teloorgang te doen. Dat is al een poosje een van onze drijfveren.

Martin Kindt, Freudenthal Instituut