

De opdrachten van de Wiskunde A-lympiade worden wel gezien als voorbeelden van de toekomstige praktische opdrachten en profielwerkstukken in de tweede fase. De finale opdracht van het vorige cursusjaar, met als titel 'De verdwenen nederzettingen', zou in dit licht bezien uitstekend passen in het profiel Cultuur & Maatschappij. **Willem Hoekstra** bespreekt de opgave en het werk van de finalisten.

Wiskunde A-lympiade 1997/1998: de finale

Inleiding

Op 3 en 4 april hebben vijftien teams deelgenomen aan de finale van de Wiskunde A-lympiade: twaalf uit Nederland, twee uit Denemarken en één van Curaçao. Gewapend met computers, kaarten, overtrekpapier en een grote dosis doorzettingsvermogen zijn zij op zoek gegaan naar verdwenen nederzettingen. Het resultaat van hun zoektocht bestond uit een advies aan een groep archeologen over de plaatsen waar ze het beste konden zoeken naar resten van prehistorische nederzettingen.

Over de opbouw van de opdracht, de achterliggende ideeën en de uitwerkingen van de finalisten gaat dit artikel.

De opdracht

De opzet van de opdracht is ambitieus: het opstellen van een beslissingsmodel uit een verzameling kwalitatieve criteria die daarvoor zowel gekwantificeerd als gewogen moeten worden. Er is gekozen voor een context uit de archeologie, omdat eerder is gebleken dat modellen uit dit vakgebied over het algemeen zowel wiskundig als vaktechnisch voor leerlingen te overzien zijn.

In het kort luidt de opdracht om in een gebied van ongeveer 100 km^2 – ruwweg het gebied rondom de Gulp en de Geul in Zuid-Limburg – een aantal geschikte lokaties aan te wijzen voor de aanwezigheid van nederzettingen uit de bandkeramische cultuur. Dat zijn de eerste boeren in Noordwest-Europa, die hier rond 5300 v. Chr. woonden. De naam verwijst naar het karakteristieke aardewerk dat door deze groep gemaakt werd.

De moderne archeologie maakt gebruik van modellen die aan de hand van kenmerken in het landschap de aanwezigheid van belangrijk archeologisch materiaal proberen te voorspellen. Opgravingen zijn kostbare en tijdrovende aangelegenheden en zo'n model kan helpen te beslissen of, en zo ja waar, je gaat graven¹.

Om zo'n model op te kunnen stellen, moet je om te beginnen een beeld hebben van de cultuur waarvan je res-

tanten hoopt aan te treffen. De levensbehoeften van zo'n cultuur bepalen de landschapscriteria op basis waarvan je het model gaat bouwen. Zo lang mensen bijvoorbeeld geen waterputten hebben, zullen de nederzettingen dichtbij open water moeten liggen. En zo stellen jagers weer andere eisen aan hun omgeving dan landbouwers.

De opdracht begint dan ook met een beschrijving van de bandkeramische cultuur en een overzicht van plaatsen waar eerder nederzettingen zijn gevonden.

Op basis hiervan wordt een voorbeeldlijst gegeven van (kwalitatieve) criteria waar vindplaatsen mogelijk aan voldoen:

- in een lössgebied of op de rand ervan
- op een plateau
- op een relatief vlak terrein
- voldoende dicht bij water
- oppervlakte voldoende groot.

Het ligt niet meteen voor de hand om hieruit een goed kwantitatief model op te stellen. Er zijn aspecten die, wanneer ze buiten beschouwing worden gelaten, het geheel te sterk zouden versimpelen. Om hier enige sturing aan te geven, is de opdracht onderverdeeld in de volgende deelopdrachten.

Opdracht 1

- a. Bespreek de redelijkheid van de hiervoor genoemde criteria. Voeg eventueel zelf criteria toe, bespreek deze ook.
- b. Ga na in hoeverre de bekende vindplaatsen aan de criteria voldoen.
Je hoeft niet elke vindplaats afzonderlijk te controleren. Een globale beschrijving is voldoende.
- c. Maak elk criterium op de een of andere manier kwantitatief. Gebruik daarbij ook weer de bekende vindplaatsen.

Voor deze analyses zijn gedetailleerde topografische kaarten van het gebied bijgeleverd en een kaart met de bodemgesteldheid en met de lokaties van bekende vindplaatsen (figuur 1).

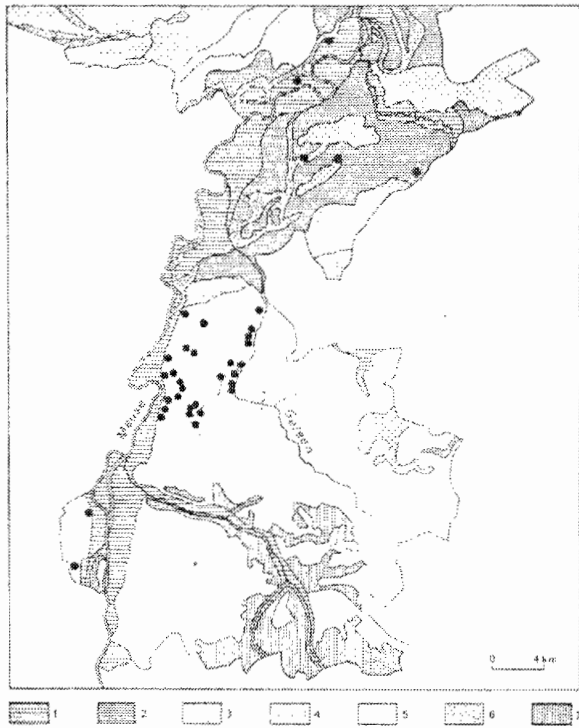


fig. 1 Plaatsen in Limburg waar resten van bandkeramische nederzettingen zijn aangetroffen

Door de bekende vindplaatsen te toetsen aan de lijst criteria komt een belangrijk aspect naar boven: vindplaatsen voldoen niet noodzakelijk aan alle criteria. Om te beginnen kan het landschap in de loop van de tijd veranderd zijn. Daarnaast kan het voorkomen dat een lokatie aan een bepaald (belangrijk) criterium zo goed voldeed, dat het niet voldoen aan een ander (minder belangrijk) criterium geen reden genoeg was om er geen nederzetting te bouwen. Door op een kaart alleen de doorsnede te bepalen van de gebieden die aan alle criteria voldoen, wordt het model wel erg grof.

Daarom moeten de criteria behalve gekwantificeerd ook gewogen worden. In de weging moet rekening gehouden worden met het belang dat aan een criterium gehecht zal zijn en de zekerheid dat het criterium in de loop van de tijd niet veranderd is.

De tweede deelopdracht geeft hiertoe een aanzet.

Opdracht 2

Bepaal op basis van de reconstructie van het leven van de bewoners van de nederzettingen en de vindplaatsen van die nederzettingen welke criteria je het belangrijkste vindt en welke het minst belangrijk. Toets je keuze aan de hand van de reeds gevonden nederzettingen.

Met de informatie uit opdracht 1 en 2 kan nu een methode ontwikkeld worden om in het gegeven gebied potentiële vindplaatsen aan te wijzen. Daarnaast moet de robuust-

heid van het model onderzocht worden.

Opdracht 3

Wat je nodig hebt, is een aanpak waarmee je tot een gefundeerde mening kunt komen over welke plaatsen in dit gebied het meest in aanmerking komen als vindplaats. (Zoekplaats is eigenlijk een betere term.)

- Ontwerp een methode waarmee je kunt bepalen hoe geschikt een lokatie is als vindplaats voor een nederzetting. Combineer hierbij je resultaten uit opdracht 1 en 2. Geef duidelijk aan hoe en waarom jullie methode werkt.
- Bepaal met je methode tien mogelijke vindplaatsen in het bedoelde gebied. Laat duidelijk zien waarom deze plaatsen kansrijk zijn als vindplaats.
- Het kan zijn dat je methode gevoelig is voor kleine veranderingen. Dat betekent dat als je iets verandert aan je methode, je ineens hele andere resultaten krijgt. Ga na of dit zo is door iets in je methode, bijvoorbeeld in de (kwantitatieve) criteria of in de weging of ordening, te veranderen en na te gaan of je tien vindplaatsen nog steeds geschikt zijn. Als je methode na verandering ineens heel andere vindplaatsen geeft, is het misschien verstandig je methode aan te passen.

Bovenstaande deelopdrachten leiden tot de uiteindelijke opdracht: een goed onderbouwd adviesrapport aan een groep archeologen.

Eindopdracht

Schrijf een rapport voor de groep archeologen waarin je ze adviseert op welke vijf plaatsen in het bedoelde gebied ze het beste kunnen gaan graven met de meeste kans om resten van bandkeramische nederzettingen te vinden.

Geef een beargumenteerde volgorde binnen die vijf plaatsen aan.

Een gedetailleerde beschrijving van je criteria en je methode kun je als bijlage bijvoegen.

Het terugbrengen van het aantal lokaties van tien naar vijf geeft de mogelijkheid om aspecten die niet in het model zijn verwerkt, in het advies mee te nemen. Bijvoorbeeld de geografische spreiding van de lokaties (is het wel zinvol om vijf opgravingen vlak naast elkaar te doen?) of de huidige functies van de lokaties (wat doe je als je een potentiële vindplaats midden op een camping hebt?).

Uitwerkingen

Al met al een opdracht vol mooie bedoelingen, maar hoe hebben de finalisten het ervan afgebracht?

Om te beginnen komt elk team bij het bespreken van de criteria op ongeveer hetzelfde uit. De belangrijkste criteria zijn de aanwezigheid van water en vruchtbare grond (löss).

Een aantal teams komt met een opvallend nieuw crite-

c. De criteria in cijfers

De bij **1a** vermelde criteria zijn niet exact omschreven. De bevindingen van **1b** berusten daarom ook op globale studie van de vindplaatsen. Op basis van de bekende vindplaatsen worden nu de criteria kwantitatief gemaakt. De motivering van de gekozen getallen wordt in **opdracht 2** nader toegelicht.

- ◆ in een lössgebied of op de rand ervan: de afstand van de nederzetting tot het lössgebied mag niet groter dan 1500 meter zijn.
- ◆ op een plateau (d.w.z. hoog genoeg): 25 meter boven de bodem van de rivierbedding.
- ◆ op een relatief vlak terrein: een vlak terrein wordt gedefinieerd als een gebied waarop een cirkel met een straal van honderd meter het hoogste en het laagste punt niet meer dan 5 meter in hoogte verschillen.
- ◆ voldoende dicht bij water: de afstand van de nederzetting tot het dichtbijzijnde water mag ongeveer 500 meter bedragen.
- ◆ oppervlakte voldoende groot: de oppervlakte die voldoet aan bovenstaande criteria moet minimaal 2 ha bedragen.

fig. 2 Kwantitatieve uitwerking van de criteria door het team van het Lorentz Casimir Lyceum, Eindhoven

rium, namelijk de aanwezigheid van stedelijke bebouwing. Hierbij gaan ze er (niet ten onrechte) van uit dat nederzettingen vaak gesticht worden op de restanten van oude bebouwing. Immers, die bebouwing was daar niet voor niets.

Er zijn vervolgens grofweg twee verschillende methodes van aanpak die de teams volgen bij het ontwerpen van hun model: tekenen en rekenen.

Kwalitatieve analyse van de criteria.

Voldoende dicht bij een rivier

Tabel 1. Afstand tot nabije rivier in meters (gerekend vanaf het midden van een stip)

Afstand [m]	200-400	400-800	800-1200	1200-1800	1800-3400
Aantal	10	12	4	4	5

Tabel 2. Gegevens voor de verwerking van het gemiddelde

Klassemidden	Frequentie	K*F
300	10	3000
600	12	7200
1000	4	4000
1500	4	6000
2600	5	13000

(K=Klassemidden, F = Frequentie)

Som van de laatste kolom : 33200
 Aantal opgravingen : 35
 Gemiddelde (afgerond) $33200/35=950 = G$

Tabel 3. Gegevens voor de verwerking van de standaarddeviatie

Klassemidden	Frequentie	$F*(G-K)^2$
300	10	4225000
600	12	1470000
1000	4	10000
1500	4	1210000
2600	5	13612500

Som van de laatste kolom 20527500
 Aantal opgravingen : 35
 Standaarddeviatie: $20527500^{1/2} / 35 = 130$

Het bestreken gebied door het gemiddelde is dus ongeveer 820 tot 1080 meter van de rivier.
 Als we de som van de afstanden die wel in dat gebied liggen delen door de totale afstand, krijgen we een kans van ongeveer 0.34 dat zo'n punt in dat gebied ligt.
 (Ruime marges van c.a. 200 meter nemen, omdat een meetfout door de kleine schaal veel invloed heeft.)

fig. 3 Team van de CSG Willem van Oranje, Oud Beijerland

Methodes 1: tekenen

Deze methode sluit aan bij wat de leerlingen hebben geleerd bij lineair programmeren. Om te beginnen leiden ze voor elk criterium uit de bekende vindplaatsen een grenswaarde af.

Sommige teams doen dit vrij intuïtief (figuur 2), andere proberen het statistisch te onderbouwen met de gegevens van de bestaande vindplaatsen (figuur 3). Vervolgens worden op een kaart de bijbehorende toegestane gebieden aangegeven. Het wegen van de criteria bestaat nu uit een keuze in welke volgorde je de toegestane gebieden over elkaar heen legt (figuren 4 en 5).

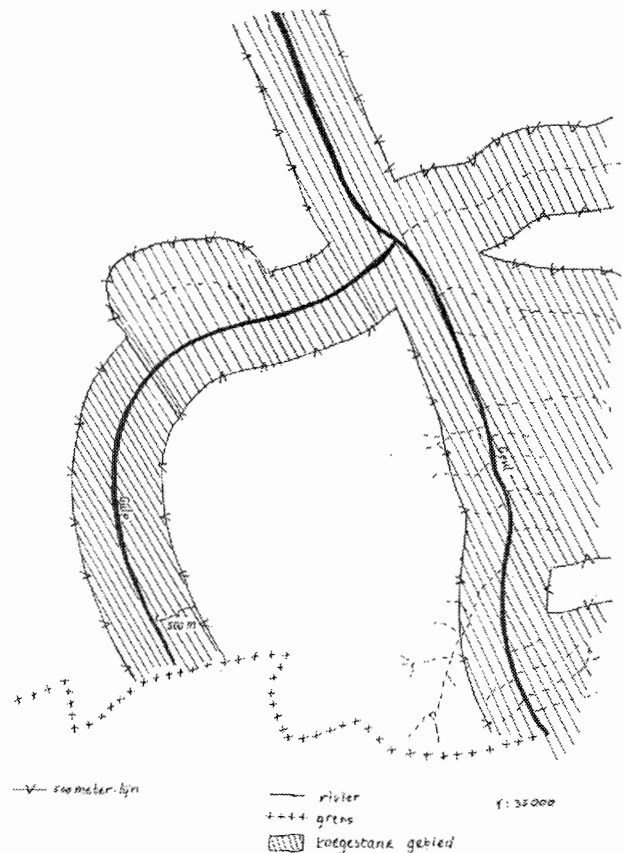


fig. 4 Lorentz Casimir Lyceum, Eindhoven

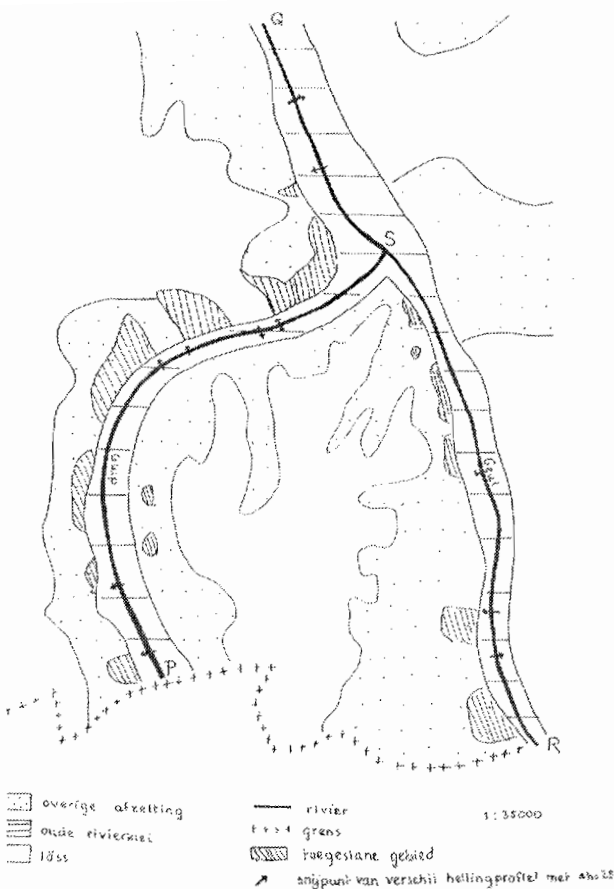


fig. 5 Lorentz Casimir Lyceum, Eindhoven

De weging speelt hier eigenlijk een ondergeschikte rol. Deze methodes zijn ook moeilijk op hun robuustheid te onderzoeken.

Zonder het te weten, bevinden de teams zich met deze methode in goed gezelschap. Binnen de archeologie is de methode vrij gangbaar, ondanks het feit dat er zo rigide met de criteria wordt omgegaan.

Eén team beschrijft nog hoe ze een computerprogramma een weging zou laten uitvoeren door te werken met verschillen in de grijs tinten bij het arceren. Met behulp van zogenaamde GIS-systemen (Geografische Informatie Systemen) zou het inderdaad mogelijk zijn een dergelijke methode te implementeren

Methode 2: rekenen

Bij deze aanpak benaderen de teams het probleem van een andere kant. Voor elke lokatie wordt een score berekend die iets moet zeggen over de waarschijnlijkheid dat daar een nederzetting is.

Om te beginnen maken ze voor elk criterium een schaalverdeling die aangeeft in welke mate de lokatie aan dit criterium voldoet. Net als bij de vorige methode zijn de meer intuïtieve kwantificeringen vaak minstens zo goed als de pogingen om ze statistisch te baseren op de gegevens uit de bekende vindplaatsen.

Vervolgens wegen ze de criteria, hetzij door belangrijke criteria op een grotere schaal de scores, hetzij door de scores te vermenigvuldigen met een voor elk criterium vastgestelde wegingsfactor. Dit laatste werkt over het algemeen overzichtelijker.

Dit alles heeft bijvoorbeeld bij het winnende team geleid tot de volgende 'vestigingskansdeterminatietabel' (figuur 6).

Tel de waarden van de verschillende kolommen op	Totaal
Hoe ver ligt het gebied van het water af? Vermenigvuldig met 0,40: 0-500meter → 1,0 (Dus: 0,40*1,0) 1000-2000meter → 0,4 (Dus: 0,40*0,40) 500-1000meter → 0,7 (Dus: 0,40*0,7) >2000meter → 0 (Dus: 0,40*0)	
Wat is de grondsoort van het gebied? Vermenigvuldig met 0,18: Het is een lössgebied, of een randgebied → 1,0 1-2,5km van lössgebied → 0,50 1000m of minder van een lössgebied → 0,75 >2,5km van lössgebied → 0,25	
Hoe vlak is het terrein? Vermenigvuldig met 0,12: Praktisch geheel vlak → 1,0 Zeer oneffen terrein → 0 Eenigszins hellend vlak → 0,5	
Is er een plateau aanwezig bij de vestigingsplaats? Vermenigvuldig met 0,10: Er is een groot plateau aanwezig → 1,0 Er is geen plateau aanwezig → 0 Eenigszins verhoogd terrein/onbeduidend plateau → 0,5	
Is er een groot laag oppervlak, met bos vlak in de buurt, aanwezig? Vermenigvuldig met 0,08: Er is een groot open terrein, benevens bos → 1,0 Voel ruimte, weinig bos → 0,6 Er is weinig ruimte, maar wel veel bos → 0,8 Geen ruimte, geen bos → 0	
Is er genoeg klei in de buurt? Vermenigvuldig met 0,05: Er is stromend water, dus klei, in de buurt → 1,0 Geen klei aanwezig → 0 Er is stromend water op meer dan 5 km afstand → 0,5 (>5km)	
Is er nu stedelijke bebouwing in de omgeving van de vestigingsplaats? Vermenigvuldig met 0,05: Er is een veel bebouwing → 1,0 Er is geen bebouwing (gewoest) → 0 Er is wel flinke bebouwing gewoest → 0,3	
Wat is het klimaat bij de vestigingsplaats? Vermenigvuldig met 0,02: Er is een goed klimaat, zoals in de meeste delen van Limburg → 1,0 Er is een (negatief) afwijkend klimaat, bijv. door een naburig moeras → 0,2	
alles optellen +	
vermenigvuldig met 100% *100%	
Het uiteindelijke resultaat, de 'nederzettingkans'	

fig. 6 Een van de teams van het Greydanus College, Zwolle

Het volgende team gebruikt in zijn methode een *conditio sine qua non*: wanneer er geen water is binnen een straal van 500 meter, stopt het algoritme en wordt er niet meer verder gekeken (figuur 7).

Uiteindelijk kiezen de teams op de kaart mogelijk geschikte lokaties, berekenen de bijbehorende scores en adviseren de lokaties met de hoogste score.

Slotopmerkingen

De opzet van de opdracht is geslaagd. De meeste teams hebben uit de kwalitatieve informatie een kwantitatief model kunnen opstellen. De daarbij benodigde wiskundige technieken konden elementair zijn. Sommige groepen voelden een noodzaak om zwaarder geschut in te bren-

Model:	
1 Water	A: nee ⇔ stop B: ja binnen 250 m ⇔ 10 punten C: 250 m - 500 m ⇔ 0 punten
2 Plateau	A: nee ⇔ stop B: nee 0 m - 5 m erboven ⇔ 0 punten C: ja 2,5 m - 5 m boven rivierniveau ⇔ 5 punten D: 5 m - 20 m boven rivierniveau ⇔ 10 punten E: 20 m - 50 m boven rivierniveau ⇔ 5 punten F: > 50 m boven rivierniveau ⇔ 0 punten
3 Löss	A: ja ⇔ 30 punten B: nee ⇔ 0 punten
4 Klei	A: ja ⇔ 12 punten B: nee ⇔ 0 punten
5 Zand	A: ja ⇔ 2 punten B: nee ⇔ 0 punten
6 Overig	A: ja ⇔ 2 punten B: nee ⇔ 0 punten
7 Oppervlak	A: < 20000 m ² ⇔ stop B: 20000 m ² - 25000 m ² ⇔ 0 punten C: 25000 m ² - 30000 m ² ⇔ 10 punten D: > 30000 m ² ⇔ 25 punten
8 Vlake	A: < 2,5 m hoogteverschil ⇔ 25 punten B: 2,5 m - 5 m hoogteverschil ⇔ 10 punten C: > 5 m hoogteverschil ⇔ 0 punten
9 Vee	A: binnen een straal van 1 km ⇔ 15 punten B: straal 1 km - 2 km ⇔ 12 punten C: straal 2 km - 4 km ⇔ 8 punten D: straal > 4 km ⇔ 0 punten

fig. 7 Libanon Lyceum, Rotterdam

gen, maar vaak had dit een averechts effect. De kern van de opdracht was namelijk het vertalen in verantwoorde

Wiskunde A-lympiade

Het Freudenthal Instituut organiseert dit jaar voor de tiende keer de Wiskunde A-lympiade. Vorig jaar hebben ruim 4000 leerlingen deelgenomen, waaronder ook leerlingen van de Nederlandse Antillen en Denemarken.

De A-lympiade vindt plaats binnen een netwerk. Op vrijdag 6 november is er een netwerkbijeenkomst voor de docenten die zich daarvoor hebben aangemeld.

De voorronde vindt plaats op vrijdag 20 november op de scholen; de finale is op 26 en 27 maart in Garderen.

Informatie en aanmeldingsformulieren zijn begin september naar alle scholen verzonden.

Inlichtingen: Ank van der Heiden
tel. 030-2611611, fax 030-2660430
email: alympiade@fi.uu.nl

wiskunde van de vaak onzekere en voorwaardelijke gegevens. De verschillen tussen de werkstukken liggen dan ook voornamelijk op dit terrein.

Naast de gekozen context is het met name dit aspect dat de opdracht geschikt zou maken voor het C&M profiel, hetzij als praktische opdracht, hetzij als component van een profielwerkstuk, waarvan verder bijvoorbeeld geschiedenis en/of aardrijkskunde deel uitmaken.

Voor die tijd zal er dan wel aandacht besteed moeten worden aan het schrijven van een helder en goed gefundeerd adviesrapport. Het is vrijwel alle teams ontgaan dat het adviesrapport de werkelijke opdracht was, het kader van het werkstuk waarin de bevindingen van de deelopdrachten verwerkt moesten worden. De meeste werkstukken bestaan nu uit de resultaten van de deelopdrachten, genummerd en wel, gevolgd door een eindopdracht, waarin het voorgaande summier wordt samengevat. De deelopdrachten, die bedoeld waren als steun, bleken onverwacht een keurslijf. Eén team heeft zich op originele wijze van dit keurslijf weten te ontdoen. Hun verslag bestaat uit een serie brieven waarin ze, refererend aan vragen van de archeologen, hun bevindingen en adviezen presenteren.

Wanneer we leerlingen willen leren hoe wiskunde een maatschappelijke functie kan vervullen, zal dit aspect dus nog de nodige aandacht behoeven.

Willem Hoekstra, Commissie Wiskunde A-lympiade

Noot

[1] De archeologische onderbouwing van de opgave is tot stand gekomen dankzij de hulp van Dr. H. Kamer-mans, wetenschappelijk medewerker aan de Faculteit Archeologie van de Rijksuniversiteit Leiden.

Verder is dankbaar gebruikgemaakt van M.E.Th. de Groot en G.J. Verwers, *Op goede gronden* (1984).

www-Alympiade 1999

De www-Alympiade wordt in 1999 voor de vierde keer georganiseerd. Het is een variant van de Wiskunde A-lympiade, waarbij een opgave via internet aangeboden wordt en het gebruik van internet een belangrijke rol speelt.

De wedstrijd is bedoeld voor leerlingen uit 5/6 vwo, die in groepjes van drie of vier een schoolweek lang aan de opdracht kunnen werken, waarbij ook thuis doorgewerkt kan worden.

De www-Alympiade vindt plaats van 8 tot en met 12 februari 1999.

Voorbeelden van opgaven staan op de homepage van de Wiskunde A-lympiade:

<http://www.fi.uu.nl/Alympiade>