Het getal e komt in het wiskunde B-programma van het vwo op verschillende plaatsen voor, onder andere als uitkomst van een bekende limiet. **Josje Lodder** presenteert in dit artikel een alternatieve methode om de uitkomst van die limiet af te leiden.

Het getal e, een limiet ontrafeld

Inleiding

Vwo-leerlingen kunnen in hun laatste schooljaren het getal e op verschillende plaatsen tegenkomen: als grondtal van de exponentiële functie e^x en van de natuurlijke logaritme, maar ook als uitkomst van de limiet

$$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Deze laatste limiet hoort tot de eindtermen van het nieuwe domein 'Voortgezette analyse'. De standaardmethode om te laten zien dat deze limiet gelijk is aan e gaat in grote lijnen als volgt: neem eerst de logaritme, vervang $1/n$ door x en vat de zo gevonden breuk op als differentiequotiënt van de functie $x \to \ln(1 + x)$. Hoewel hier niets mis mee is, komt deze methode wat kunstmatig over, zeker als je hem voor het eerst ziet. Er zijn andere benaderingswijzen om de limiet

$$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

aanschouwelijker te maken.

In het artikel van Michiel Doorman en Paul Drijvers in de *Nieuwe Wiskrant* van maart 1998 is te lezen hoe je

$$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

tegenkomt wanneer je de differentiaalvergelijking $y' = y$ met beginwaarde $y(0) = 1$ met de methode van Euler benadert op $[0, 1]$. Met stapgrootte $h = 1/n$ is de benadering $y_n(1)$ gelijk aan

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Op deze manier laat je zien dat

$$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

gelijk is aan e gezien als grondtal van de exponentiële functie e^x. Deze methode sluit aan bij het domein differentiaalvergelijkingen en zou dus voor elke wiskunde B-leerling te volgen moeten zijn. Een nadeel is dat ze zwaar rust op de convergentie van de Euler-benadering naar de exacte oplossing; het bewijs van deze convergentie ligt ver buiten het bereik van de wiskunde B-leerling.

In dit artikel geef ik een alternatieve methode die niet veel voorkennis vraagt: gebruikt wordt dat $\ln x$ de primitieve is van $1/x$ en dat e^x en $\ln x$ elkaars inverse zijn. Om de convergentie aan te tonen, wordt de insluitstelling toegepast. Voor het eerste deel van het bewijs, waarin het idee gepresenteerd wordt, is het voldoende om te weten dat het getal e gekarakteriseerd wordt door de eigenschap dat de oppervlakte ingesloten door de grafiek van $y = 1/x$, de lijn $x = 1$, de lijn $x = e$ en de x-as gelijk is aan 1. (Dit kan ofwel de definitie zijn van e, ofwel een afgeleid resultaat. Voor dit verhaal is dat verder niet van belang.) De methode maakt verder gebruik van een benadering van de oppervlakte onder $y = 1/x$ met behulp van onder- en boven-sommen.

Tekenen en berekenen

In deze paragraaf tonen we aan dat de oppervlakte ingesloten door de grafiek van $y \to 1/x$, de x-as en de lijnen

$$x = 1 \text{ en } x = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

gelijk is aan 1. Hieruit volgt dat

$$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

gelijk is aan het grondtal van de natuurlijke logaritme, dus aan e. We gaan er in eerste instantie vanuit dat al aangetoond is dat de limiet bestaat. (Naderhand zal ik laten zien hoe u dit aan kunt tonen, gebruik makend van de ideeën die we ook in het vervolg van deze paragraaf toepassen.)

We zullen nu aantonen dat de oppervlakte ingesloten door de grafiek van $y \to 1/x$, de x-as en de lijnen

$$x = 1 \text{ en } x = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

gelijk is aan 1. Daartoe bekijken we voor iedere n een bovensom op $[1, (1+\frac{1}{n})^n]$. Wat we zouden willen, is dat deze bovensommen voor $n \to \infty$ naar 1 naderen. Het blijkt dat bij een geschikte keuze van de verdeling het rekenwerk onverwacht mooi uitkomt. In plaats van de gebruikelijke verdeling in n gelijke intervallen kiezen we een verdeling van het interval $[1, (1+\frac{1}{n})^n]$ met als tussenpunten $(1+\frac{1}{n}), (1+\frac{1}{n})^2, (1+\frac{1}{n})^3, \ldots, (1+\frac{1}{n})^n$.

Hieronder is dit gedaan voor $n = 10$ en $n = 20$.
Het rechtereindpunt in deze figuren is $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, met respectievelijk $n = 10, 20$. Verder is de limietsituatie getekend.

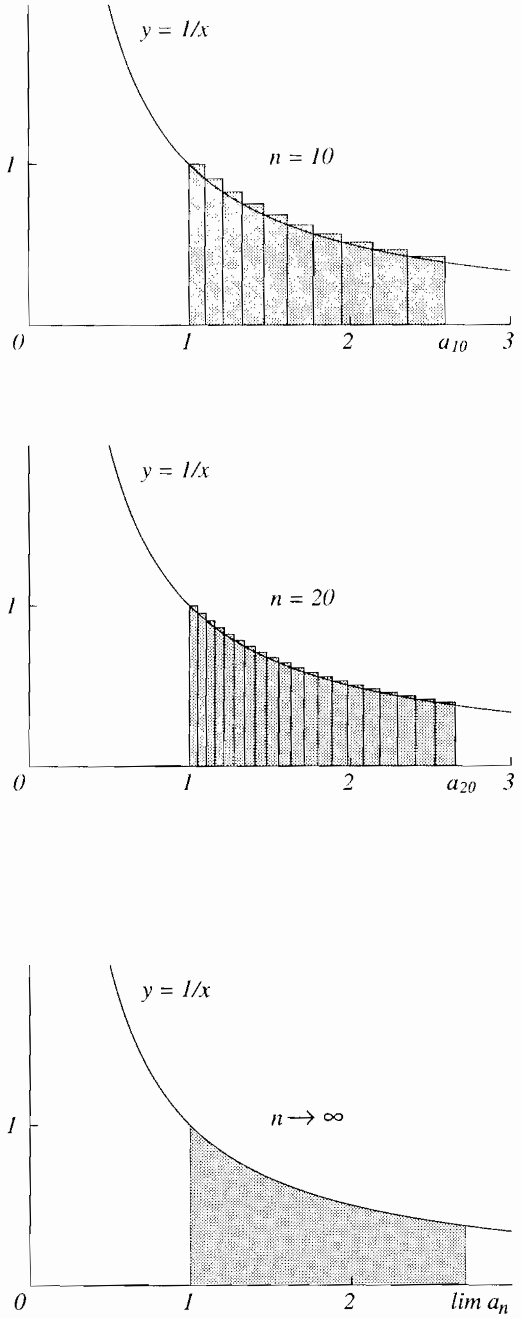

fig. 1 De benadering met bovensommen voor n = 10, n = 20 en de limietsituatie

De bijbehorende bovensom noemen we S_n. Wanneer we nu deze bovensom gaan berekenen, valt iets op: de oppervlakte van elk van de rechthoeken is $1/n$. Voor de meest linkse rechthoek is dit direct duidelijk. De breedte van de aangrenzende rechthoek is $(1+\frac{1}{n})$ maal de breedte van de eerste rechthoek en de hoogte is een factor $1/(1+\frac{1}{n})$ kleiner, zodat de oppervlakte gelijk is. Steeds geldt dat de volgende rechthoek ontstaat uit de vorige door vermenigvuldiging met een factor $(1+\frac{1}{n})$ in de breedte en een factor $1/(1+\frac{1}{n})$ in de hoogte. Elk van de rechthoeken heeft dus oppervlakte $\frac{1}{n}$.

De totale oppervlakte van deze rechthoeken is dus $S_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1$.
Laten we nu n naar oneindig gaan, dan zullen de rechthoeken steeds beter de oppervlakte onder de grafiek van $1/x$ benaderen. Ondertussen nadert het punt $(1+\frac{1}{n})^n$ naar

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

In de limietsituatie vinden we op deze manier de oppervlakte tussen

$$x = 1 \text{ en } x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ onder } y = 1/x,$$

en nog steeds zal gelden dat deze oppervlakte gelijk is aan 1. De conclusie is dat

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

Mogelijk hebt u bij de voorlaatste stap behoefte aan een extra rechtvaardiging, omdat we gebruikmaakten van een interval met een schuivende rechtergrens. Wat zou er bijvoorbeeld gebeuren wanneer dit rechtereindpunt niet monotoon zou stijgen? Het is, denk ik, een uitdaging om hier ook uw leerlingen over na te laten denken. Het probleem is op te lossen door aan de gegeven verdeling het punt

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

als rechtereindpunt toe te voegen. We werken dit hier niet uit, maar laten in plaats daarvan zien dat

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

zonder aanname van de convergentie aangetoond kan worden als we naast de bovensommen ook de ondersommen gebruiken.

Bij het berekenen van de ondersommen maken we gebruik van de eigenschap die ook gold voor de rechthoeken van een bovensom: van twee aangrenzende rechthoeken heeft de rechter een breedte die $(1 + \frac{1}{n})$ maal de breedte van de linkerrechthoek is en een hoogte die gelijk is aan $1/(1 + \frac{1}{n})$ maal de hoogte van de linker. Ook hier hebben alle rechthoeken dus dezelfde oppervlakte. De oppervlakte van de meest linkse rechthoek is gelijk aan

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$$

zodat de totale oppervlakte van de ondersom gelijk is aan

$$s_n = \frac{n}{n+1}.$$

Onder- en bovensommen vindt u afgebeeld in figuur 2.

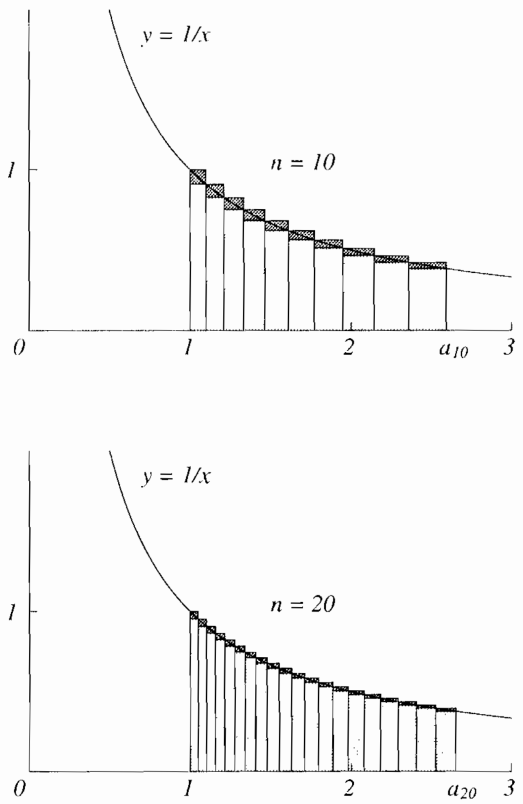

fig. 2 Onder- en bovensommen

We hebben nu de volgende ongelijkheden afgeleid:

$$\frac{n}{n+1} = s_n < \int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{1}{x}\,dx < S_n = 1$$

ofwel

$$\frac{n}{n+1} = s_n < \ln((1+\tfrac{1}{n})^n) < 1$$

zodat

$$e^{\frac{n}{n+1}} < (1+\tfrac{1}{n})^n < e$$

Deze ongelijkheid wordt geïllustreerd in figuur 3 waarbij

$$a_n = (1+\tfrac{1}{n})^n \text{ en } b_n = e^{\frac{n}{n+1}}$$

(meetkundig: het punt waarbij de oppervlakte onder $y = 1/x$ tussen $x = 1$ en $x = b_n$ gelijk is aan de ondersom s_n). Uit de insluitstelling volgt nu dat $(1+\frac{1}{n})^n$ convergeert met

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

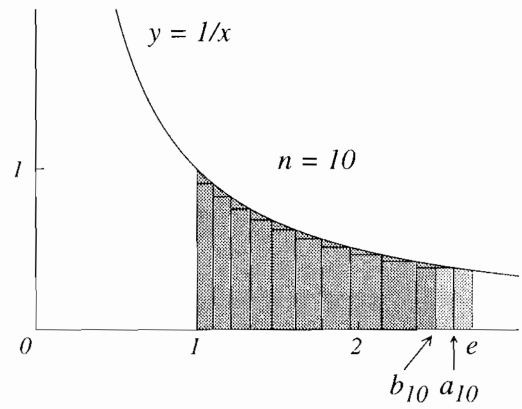

fig. 3 De rij a_n, ingesloten door b_n en e

Monotonie en convergentiesnelheid van de rij $(1+\frac{1}{n})^n$

Het aardige is dat de vermenigvuldigingseigenschap die we in de vorige paragraaf gebruikten om boven- en ondersommen te berekenen, ook gebruikt kan worden om heel eenvoudig andere afschattingen te maken. Als toegift vindt u in deze paragraaf twee extra resultaten, die met wat scherpere afschattingen eenvoudig te behalen zijn. Bij de constructie uit de vorige paragraaf ziet u (zie figuur 1) voor toenemende n het punt $(1+\frac{1}{n})^n$ naar e schuiven. Dat de rij dus monotoon stijgt, is geenszins een verrassing. We hebben dit echter tot nu toe niet aangetoond. Ter afkorting schrijven we

$$a_n = (1+\tfrac{1}{n})^n.$$

Definieer bij de gegeven verdeling op $[1, (1+\frac{1}{n})^n]$ de rest R_n door:

$$R_n = S_n - \int_1^{a_n} \frac{1}{x}\,dx = 1 - \int_1^{a_n} \frac{1}{x}\,dx$$

We zullen laten zien dat R_n monotoon dalend is. De monotonie van a_n is hier een gevolg van. We maken twee afschattingen voor R_n. Een ondergrens verkrijgen we door op elk van de segmenten van de verdeling de koorde tussen de randpunten op de grafiek te trekken. De som van de oppervlaktes van de zo geconstrueerde driehoeken vormt een ondergrens voor R_n (zie figuur 4, koordes en grafiek vallen bijna samen).

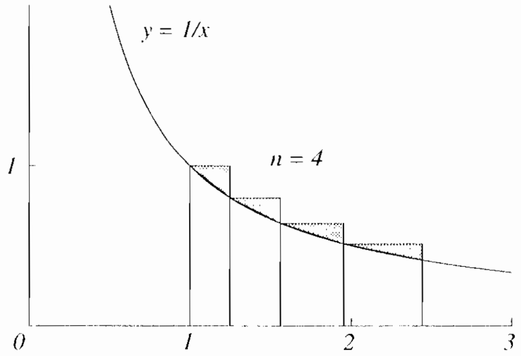

fig. 4 Benadering met behulp van koordes

Met behulp van de berekening voor de bovensom en ondersom uit de vorige paragraaf kunnen we snel deze ondergrens bepalen:

$$R_n^{\text{koorde}} = \frac{1}{2}(S_n - s_n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{2n+2}.$$

Een bovengrens voor R_n vinden we door in het midden van elk segment de raaklijn aan de grafiek te tekenen en de oppervlaktes van de bovenste trapezia bij elkaar op te tellen. In plaats hiervan kunnen we ook de midpointrechthoeken tekenen (zie figuur 5).

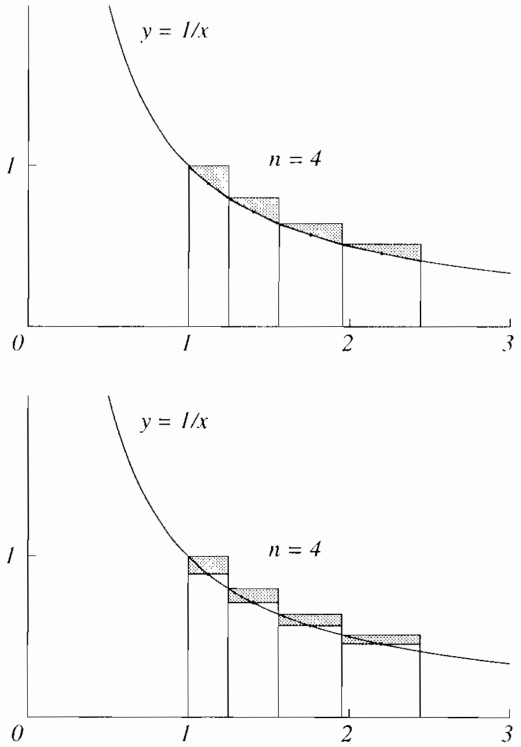

fig. 5 Benadering met behulp van trapezia of met midpoint-rechthoeken

Ook voor deze rechthoeken geldt dat ze allemaal dezelfde oppervlakte hebben. De oppervlakte van het meest linkse rechthoekje is gelijk aan

$$\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2n}}\right) = \frac{1}{n}\,\frac{1}{2n+1}.$$

De bovengrens is dus gelijk aan

$$R_n^{\text{midpoint}} = \frac{1}{2n+1}.$$

Voor R_n hebben we hiermee de volgende grenzen afgeleid:

$$\frac{1}{2n+2} < R_n < \frac{1}{2n+1}.$$

Nu blijkt uit de zo afgeleide grenzen dat de bovengrens voor R_{n+1} kleiner is dan de ondergrens voor R_n:

$$\frac{1}{2n+4} < R_{n+1} < \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+2} < R_n < \frac{1}{2n+1}.$$

Omdat zowel de bovensom voor de verdeling op $[1, a_n]$ als die op $[1, a_{n+1}]$ gelijk zijn aan 1 en $R_{n+1} < R_n$ volgt nu dat a_{n+1} een betere benadering is voor e dan a_n, dus dat $a_{n+1} > a_n$. Hiermee is de monotonie van a_n aangetoond.

Ten slotte kunnen we nu ook een schatting geven voor het verschil $a_n - \mathrm{e}$: de oppervlakte onder de grafiek $y = 1/x$ tussen $x = a_n$ en $x = \mathrm{e}$ is gelijk aan R_n. Dat betekent dat

$$a_n - \mathrm{e} \approx \mathrm{e} \cdot R_n = \frac{\mathrm{e}}{2n+1}.$$

De convergentie van a_n verloopt dus heel traag.

Met dank aan Jan van de Craats voor redactionele adviezen en het vervaardigen van de illustraties.

Drs. J. S. Lodder is verbonden aan de Open Universiteit te Heerlen. Het idee voor bovenstaand artikel ontstond tijdens het werken aan de cursus Continue Wiskunde 1, die recent verschenen is.

Literatuur

Doorman, Michiel en Paul Drijvers (1998). 'Continue Dynamische Modellen'. *Nieuwe Wiskrant 17*(3) pp. 22-25.