Onlangs promoveerde Lodewijk van Schalkwijk op het proefschrift *Onderzoekend wiskunde leren.* Onderwerp van studie was leren bewijzen. De studie was opgezet rond een cursus 'Hogere Wiskunde' voor leerlingen uit 5 vwo. **Monique Pijls** bespreekt het resultaat.

'Ja..., er brandt een lampje!'

Inleiding

Op 16 juni 1998 promoveerde Lodewijk van Schalkwijk op het proefschrift *Onderzoekend wiskunde leren.* Zijn onderzoek is gebaseerd op de cursus 'Hogere Wiskunde' voor leerlingen uit 5 vwo die aan de Katholieke Universiteit Nijmegen jaarlijks werd gegeven van 1994 tot en met 1997. De leerlingen waren afkomstig uit de omgeving van Nijmegen. Het *doel* van de cursus was:

1. de leerlingen inwijden in de wiskunde achter die mooie plaatjes die zij als 'fractals' hebben leren kennen
2. de leerlingen leren bewijzen
3. de leerlingen een indruk geven van datgene wat er bij een wiskundestudie, en in bredere zin ook bij een exacte studie, van studenten gevraagd wordt.

Het onderzoek van Van Schalkwijk was gericht op het tweede doel: *leren bewijzen.*

Bewijzen in de wiskunde

Voordat je kunt uitzoeken hoe je leerlingen kunt leren bewijzen, moet je eerst vaststellen wat je precies onder wiskunde verstaat. Van Schalkwijk kiest met het oog op leren bewijzen voor de 'strikte' definitie van wiskunde: wiskunde als wereld van abstracties (definities, stellingen, bewijzen) die gescheiden is van de leefwereld. Wiskunde als een bouwdoos, waarvan de onderdelen *kunnen* lijken op objecten uit de werkelijkheid. Leren bewijzen is als spelen met de bouwdoos. Toch is een bewijs meer dan alleen een afleiding van een stelling uit eerder bewezen stellingen en definities. Een bewijs is gericht op degenen die het zullen lezen. Bewijzen is een op de gemeenschap gerichte activiteit. De gewenste graad van nauwkeurigheid is niet absoluut, maar hangt af van de behoefte van het publiek. Het hanteren van de juiste vaktaal is hierbij van groot belang. Leerlingen zullen dat ook moeten leren.

Leren bewijzen

Uit eerder onderzoek naar 'leren bewijzen' is gebleken dat het niet zinvol is om teveel de nadruk te leggen op de formele kant van het bewijzen. Je moet leerlingen duidelijk maken wat het betekent om een bewijs te geven. Bewijzen moet voor leerlingen een zin- en betekenisvolle bezigheid zijn.

Nakahara & Koyama ontwikkelden een benadering van het leren van wiskunde die zij 'assentive constructivism' noemen: iedere leerling bouwt zijn eigen kennis op, maar doet dat in overleg met anderen. Het groepsoverleg moet tot resultaat hebben dat elk afzonderlijk lid van de groep met de conclusies kan instemmen. De individuele kennis van iedere leerling moet aansluiten bij de groepskennis. Bovendien zal de kennis van de leerlingen moeten aansluiten bij de bestaande kennis. De docent is daarom ook bij het overleg betrokken en vertegenwoordigt de 'wiskundige wereld'.

Opzet van de cursus

Per cursus waren er veertien lesmiddagen van twee uur, gegeven door drie docenten. Ook maakten de leerlingen huiswerk. Iedere cursusmiddag bestond uit een hoorcollege en een werkcollege. De onderwerpen die in het hoorcollege behandeld werden, waren onder andere: de zeef van Sierpinski, de Cantorverzameling, fractals, getalrijen en limieten, dynamische systemen, complexe getallen. Tijdens het werkcollege deden leerlingen een eigen onderzoek dat min of meer aansloot bij dat wat er aan theorie was behandeld. Hierbij konden zij gebruik maken van de computer. Voor de cursus zijn speciale computerprogramma's ontwikkeld: 'IFS (= *itererend functiesysteem*) laboratorium' en 'Funiter' (een itererend functiesysteem waar ook zogenoemde 'tentfuncties' ingebouwd zijn). Het leerlingonderzoek was gebaseerd op de principes van het assentive constructivism.

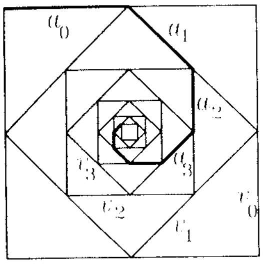
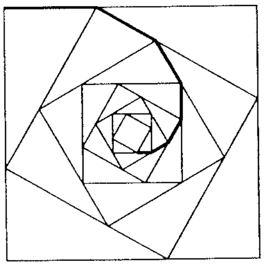
Onderzoek door leerlingen

De opbouw van het eigen leerlingonderzoek is als volgt: *brainstorm – symposium – schriftelijk verslag.* Tijdens de brainstorm werden vermoedens over een bepaald onderwerp geformuleerd. Tijdens het symposium werd geprobeerd deze vermoedens te bewijzen. In een schriftelijk verslag werden deze bewijzen vastgelegd. Met name het symposium stelde eisen die de leerlingen van de wiskundelessen op school niet kenden. De leerlingen vonden het spannend en maakten er veel werk van.

Kees en Jurrien

In de cursus 1995/'96 kregen leerlingen drie keer de gelegenheid om in groepjes een eigen onderzoek te doen. Het eerste onderzoek ging over de driehoek van Pascal, het tweede over itererende functies en bij het laatste onderzoek konden leerlingen kiezen uit een aantal onderwerpen. Vier van de zes groepjes kozen de onderstaande vraag. Zelf vond ik deze vraag ook het meest aantrekkelijk: mooie plaatjes en de opdracht ze na te tekenen en nog mooiere figuren te maken!

Voor degenen die weer eens iets heel anders willen. Met IFS-laboratorium kun je ook plaatjes tekenen zoals hieronder. (Zoek zelf maar uit hoe.)

Er zijn ook spiralen in getekend.
Kun je de lengte daarvan berekenen?
Kun je nog verder generaliseren?

Van Schalkwijk bespreekt de verslagen van de groepjes. Daarbij let hij op de volgende zaken:

1. scheiding tussen leefwereld, wiskunde en representaties
2. zin en betekenis van bewijzen
3. bewijzen en lokale ordening
4. vorming van vaktaal
5. bewijzen binnen onderzoek.

Van twee begeleidingsgesprekken staat in de bijlage van het proefschrift het protocol van het gesprek afgedrukt. Waarom juist deze twee gesprekken worden afgedrukt, wordt niet vermeld. Wel krijg ik bij het doorlezen ervan een levendig beeld van hoe de leerlingen worstelden met het bewijzen van hun vermoedens. De docent probeert hun uitspraken steeds te vertalen naar wiskunde en sluit daarbij aan bij de redeneringen van de leerlingen. Het lezen van protocollen vind ik altijd een feest!
Het liefst zou ik dan ook het vier pagina-tellende protocol afdrukken, maar dat zou wat lang worden. Daarom geef ik citaten uit het gesprek. Van de dialoog is nu weinig overgebleven, maar we krijgen wel inzicht in het verloop van het gesprek, over het berekenen van de lengte van de spiraal.

Uit het begeleidingsgesprek met Kees en Jurrien, 13 maart 1996.

Docent: *Maar hoe zou je dan beginnen met het onderzoek?*
Kees: *Nou, ik zou bijvoorbeeld eerst met één plaatje beginnen, en dan eens kijken of je daar een formule of zoiets voor zou kunnen vinden...*
(...)
Kees: *Nou, volgens mij is het gewoon, als je de a_0 hebt, dan gewoon die factor, maal n-tot-de-macht eh, ja waar je dan bent.*
Docent: *Jij veronderstelt – even voor de opname – dat de formule iets wordt van: $a_0 + C^n$.*
Kees: *Ja, nee, nee, dat veronderstel ik niet, want daar heb ik niet goed over nagedacht.*
(...)
Docent: *Als je eerst maar eens de lengte van het eerste stukje hebt.*
(...)
Kees: *Die noemen we $\frac{1}{2}$.*
Docent: *$\frac{1}{2}$, en a_1 is dan l gedeeld door $2\sqrt{2}$?*

Kees en Jurrien beamen dit.

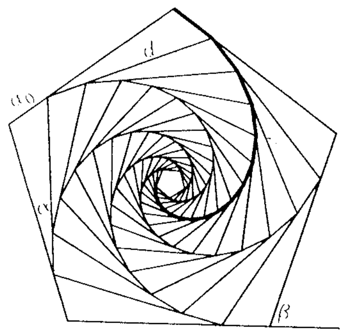
Kees: *En dan heb je die factor, en dan kun je steeds...*
(...)
Jurrien: *Ja en zo heb je dus, dus ja dan is het inderdaad wel een formule met een constante.*
Kees: *Ja en dan... ja dit was dan niet goed, maar dat moet je dan nog, dan heb je alleen de lengte van het zoveelste stukje.*
(...)
Docent: *Dan heb je alleen maar de lengte van het zoveelste stukje, en die moet je dan ook nog kunnen optellen.*
(...)
Kees: *Ja, zoiets dan $a_0 + a_0$ maal $C + a_1$ maal $C + \ldots$*
(...)
Kees: *Als ik nou bijvoorbeeld zoiets, en dan steeds daar de helft van neem, en dat erbij optel, en dan zo, wat dan de limiet is?*
Docent: *Ja, nou dat is heel makkelijk te berekenen, hè? Omdat dit toevallig een hele rij voor is, eh, rij is, een hele bijzondere rij. Die heb je al eerder gehad in deze cursus.*
Jurrien: *Ja, inderdaad.*
Kees: *Oh, wacht even ...*
Jurrien: *Eh, nu begint er iets te ... er gaat een lampje branden. Ja, er brandt een lampje!!*

Kees en Jurrien hebben hun resultaten verwerkt in een schitterend verslag. Daarbij zijn ze duidelijk alweer veel verder gekomen dan tijdens bovenstaande bijeenkomst. Ze hebben ook de lengte van spiralen in andere veelhoeken berekend. Hier is thuis hard aan gewerkt, mogelijk met hulp van anderen.

De lengte van de spiraal (A) is:

$$A = a_0 \cdot \frac{1}{1-r} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)\cos(a) + \sin(\alpha)(1 - \cos(\beta)) - \sin(\beta)}$$



Fragment uit het verslag van Kees en Jurrien

Hypothesen toetsen

De resultaten van de cursus worden ook in een experimenteel onderzoek getoetst. Door middel van voor- en natoets wordt nagegaan in hoeverre de leerlingen vooruit zijn gegaan voor wat betreft hun vaardigheid in het bewijzen. De rapportage van dit onderzoek is, vind ik, veel te uitgebreid. Alsof de lezer een basiscollege 'Statistische methoden' volgt, licht Van Schalkwijk toe dat een som vanwege de Centrale Limietstelling mag worden benaderd door een normale verdeling en dat we dan een standaardprocedure hebben voor het toetsen van hypothesen. Bij het toetsen van hypothesen wordt telkens een schema afgedrukt dat me doet denken aan wiskunde A-boeken waarin deze stof wordt uitgelegd. De onderzoeker zou in dit opzicht wat meer aan moeten sluiten bij de sociaalwetenschappelijke wereld.

Aanpassingen

Hoe dan ook: de conclusie van het eerste experimentele onderzoek is dat de leerlingen niet significant vooruit zijn gegaan in het leren bewijzen. Daarom worden er een aantal aanpassingen gedaan in het materiaal. In de cursus van het volgende jaar worden er vooral in de werkvorm aanpassingen gedaan. Er wordt meer nadruk gelegd op leren bewijzen. De docent doet meer voor hoe je van een vaag vermoeden een wiskundig verifieerbaar vermoeden kunt maken. Er wordt een voorbeeld gegeven van een verslag waarin het 'lagere' niveau (daar waar je inspiratie krijgt) en het 'hogere' niveau (daar waar je het allemaal uitwerkt) van wiskunde bedrijven zijn weerslag vindt. Deze aanpassingen blijken succesvol: uit het experimentele onderzoek blijkt dat leerlingen na deze cursus wel significant beter kunnen bewijzen dan de leerlingen uit de controlegroep.

Conclusie

Zoals één van de conclusies van het onderzoek ook luidt, is hier een 'krachtige leeromgeving' gecreëerd: drie docenten verzorgen samen met veel aandacht een college met verschillende werkvormen. De leerlingen hebben er behoorlijk wat tijd voor over om de cursus te volgen. Ze kunnen samenwerken, hun ideeën worden serieus genomen en ze leren echt iets nieuws. Dat zo'n cursus in de Tweede Fase een onderdeel van het studieprogramma zou kunnen worden in de vrije ruimte van het profiel Natuur & Techniek is een aanwinst voor zowel middelbare school als universiteit!

Monique Pijls, Instituut voor de Lerarenopleiding, Universiteit van Amsterdam

auteur: *Schalkwijk, L.J.T.M. van*
titel: *Onderzoekend leren*
uitgever: *Katholieke Universiteit Nijmegen, 1998*

Het proefschrift Onderzoekend leren *is voor iedereen toegankelijk via de homepage van de Universiteitsbibliotheek van de Katholieke Universiteit Nijmegen: www.kun.nl/ub/*
Vervolgens aanklikken 'WebDOC', gevolgd door 'Elektronische publicaties KUN'. Kies nu 'Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica'. Door de juiste titel aan te klikken, kunt u het proefschrift downloaden (ongeveer 250 pagina's).

Rectificatie
Bij het verslag van de Sporen conferentie in het vorige nummer van de *Nieuwe Wiskrant* staat in een voetnoot dat de video 'Over het Spoor' is gemaakt door Pieter van der Zwaart. Dat moet zijn: Pieter de Graaf van het ROC Eindhoven.