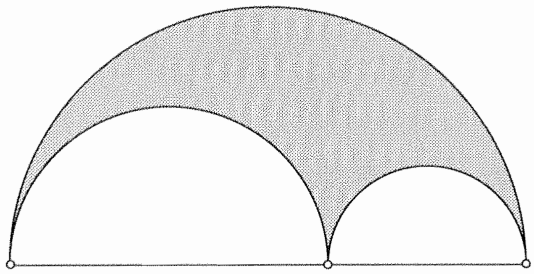
De recreatierubriek is deze keer helemaal gewijd aan de arbelos, een meetkundige figuur die Archimedes aan een schoenmakersmes deed denken. **Aad Goddijn** hanteert het mes met vaardige hand. De bewijzen mag u zelf leveren.

Een ode voor de arbelos

Recreatierubriek

Het mes voor de beginnende schoenmaker

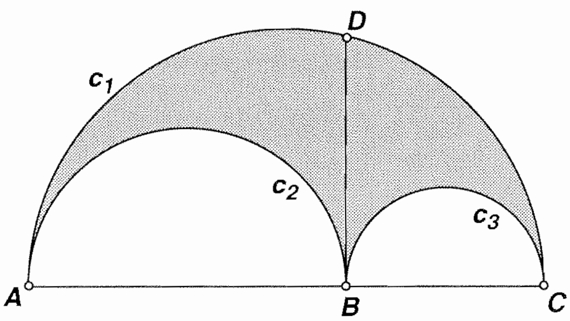
Het grijze deel van onderstaande figuur deed Archimedes aan een schoenmakersmes denken.



Sinds dat moment heet de figuur nog steeds de 'arbelos'. De figuur is in al zijn eenvoud van drie onderling rakende halve cirkels met middelpunten op één lijn een goudmijn voor meetkundige puzzels, die nog lang niet uitgeput lijkt.

In deze recreatierubriek treft u er een aantal die tot de klassieke arbelos-folklore behoren. Een enkeling lijkt nieuw, maar dat weet je op dit gebied nooit zeker. Het aardige is dat bij het bewijzen van bepaalde verbanden in de arbelos steeds weer nieuwe verschijnselen aan het licht komen. De laatste opgave van deze rubriek is dan ook bedoeld voor de eigen ontdekkingen.

Voor het gemak volgt hier dezelfde figuur, nu met belettering. In het vervolg gebruiken we deze letters.



De positie van punt B op AC is de enige vrijheidsgraad: is B bepaald, dan ligt de vorm verder vast. Slechts bij één opgave is iets vermeld over een speciale positie van B.

De cirkels hebben nu namen gekregen: c_1, c_2 en c_3. In het vervolg wordt ook wel verwezen naar 'de gehele cirkel c_1'.

BD is de gemeenschappelijke raaklijn van c_2 en c_3.

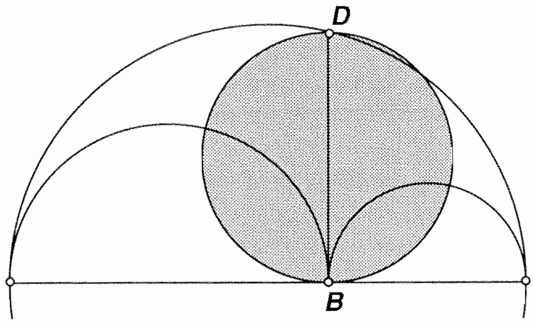
Omdat het uiterlijk van het schoenmakersmes er door deze toeters en bellen niet beter op wordt, gebruik ik de belettering alleen waar dat voor de duidelijkheid nodig is.

Het mes van de gelijke maten

In bijna alle opgaven gaat het om: te bewijzen dat ...
Zo ook hier.

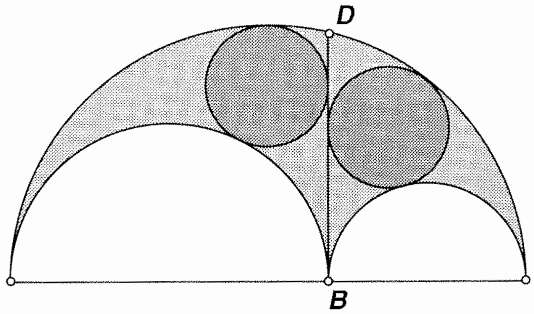
Opgave 174: De omtrek van het schoenmakersmes is gelijk aan de omtrek van de gehele cirkel c_1.

Opgave 175: De oppervlakte van het mes is gelijk aan de oppervlakte van de cirkel met middellijn BD.



Het mes van de Archimedische tweeling

DB deelt het mes in twee delen. In elk van de delen kan een rakende cirkel aangebracht worden; rakend aan BD, aan c_1 en aan c_2 of c_3. Zie de figuur.

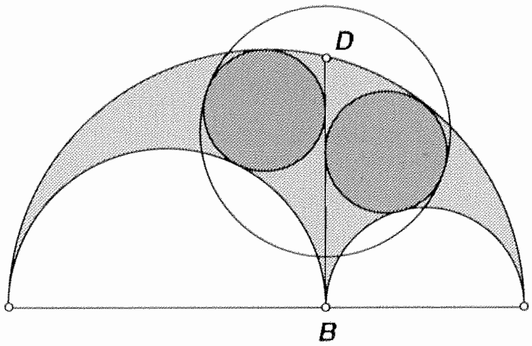


Aan Archimedes zelf danken we het volgende:

Opgave 176: Deze twee cirkels zijn even groot.

Het mes van de knellende band

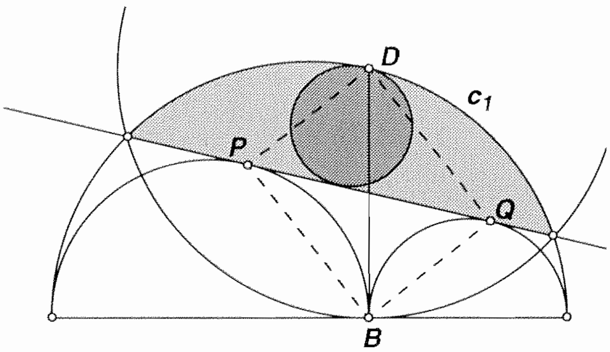
De tweelingcirkels van Archimedes passen in een omhullende cirkel, die we zo klein mogelijk kiezen.



Opgave 177: De diameter van de omhullende cirkel is gelijk aan BD.

Het mes van de uitgesloten derde

Hieronder is nog een gemeenschappelijke raaklijn aan c_2 en c_3 getekend; de raakpunten zijn P en Q. Deze snijdt als het ware een stuk van het mes af.

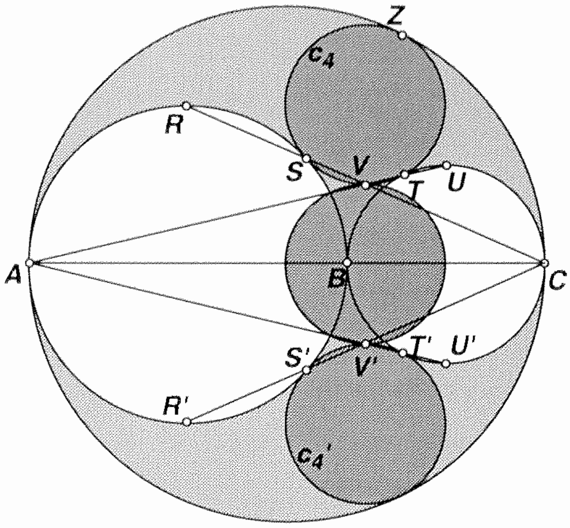


$PBQD$ is een rechthoek. Spectaculairder zijn de feiten over de grootste cirkel die in het afgesneden deel past:
Opgave 178: Die grootste cirkel is even groot als de tweelingcirkels van Archimedes en raakt c_1 in D.

De raaklijn zelf snijdt c_1 in bijzondere punten:
Opgave 179: De cirkel met middelpunt D die door B gaat, gaat ook door de snijpunten van PQ met c_1.

Het mes van het driespan

De beurt is nu aan de cirkel die raakt aan c_1, c_2 én c_3. Deze cirkel geven we de naam c_4. Een van de schoonheden van c_4 openbaart zich door de arbelos te spiegelen in AC. Zie de figuur in de volgende kolom.
Opgave 180: Tussen c_4 en zijn spiegelbeeld past nu precies nóg een kopie van c_4. Met precies bedoelen we natuurlijk: onderling rakend en middelpunten op één lijn. De raakpunten van c_4 met c_2 en c_3 heten S en T. Ook nog gemarkeerd zijn de punten R, U en V. R en V zijn de 'toppen' van c_2 en c_3. V is het 'laagste' punt van c_4; c_4 en c_1 raken elkaar in Z. Verder zijn een aantal spiegelbeelden in AC aangegeven.
Deze notities zijn van belang bij de volgende opgaven.

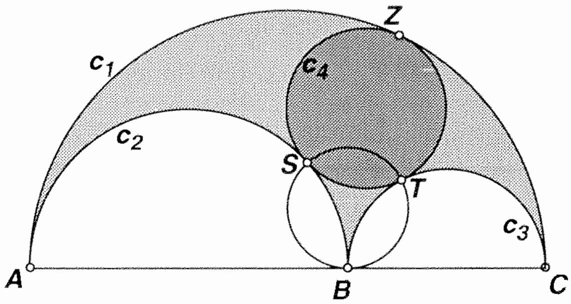


Het mes van de strakke teugels

In de figuur is al te zien dat de lijnen RC, AU, $R'C$ en AU' een mooi stel strakke teugels voor het cirkeldriespan vormen. Er zijn vier teugels, maar één bewijs voldoet:
Opgave 180: R, S, V en C liggen op een rechte lijn.

Het mes van de verborgen vierde

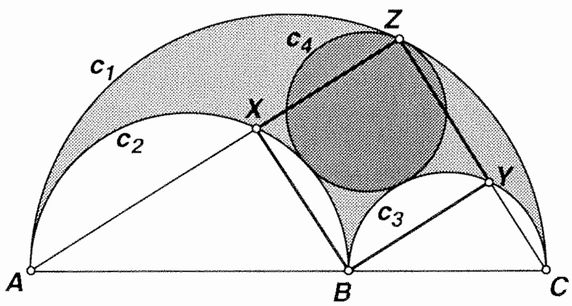
Onderstaande figuur bevat een selectie van de lijnen, cirkels en punten van de vorige. Maar ook iets nieuws!



Nu wordt onthuld dat Archimedes een vierling schiep:
Opgave 181: De cirkel door B, S en T is juist zo groot als de tweelingcirkels van Archimedes.

Het mes van het schuine kwadraat

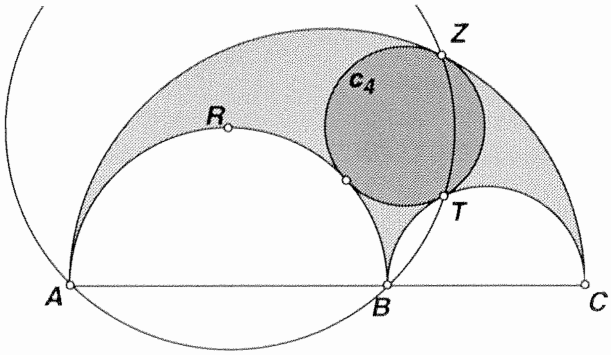
Verbinden we Z met A en C, dan ontstaat uiteraard een rechthoekige driehoek. Maar AZ en CZ snijden c_2 en c_3 nog in twee andere punten: X en Y.



Opgave 182: $BYZX$ is een vierkant.

Het mes van vier in de kring

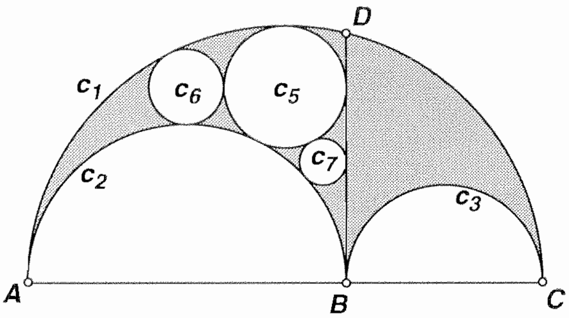
Cirkel c_1 raakt aan c_2, c_2 raakt aan c_3, c_3 raakt aan c_4 en ten slotte c_4 weer aan c_1. In zo'n viercyclus van rakende cirkels liggen de vier raakpunten altijd zelf ook op één cirkel.



Opgave 183: In deze speciale ligging is R het middelpunt van de cirkel die door A, B, T en Z gaat.

Het gouden mes

Het mes is goud waard als B het lijnstuk AC in de gulden snede verdeelt.
In de figuur zijn ook nog c_5, c_6 en c_7 getekend; c_5 is een van de tweelingen.



Aan gouden verhoudingen is nu geen gebrek meer:
Opgave 184: De verhoudingen der diameters van de cirkels

c_1 en c_2, c_2 en c_3, c_3 en c_5, c_5 en c_6, c_6 en c_7,

zijn dan allemaal gelijk aan de gulden verhouding

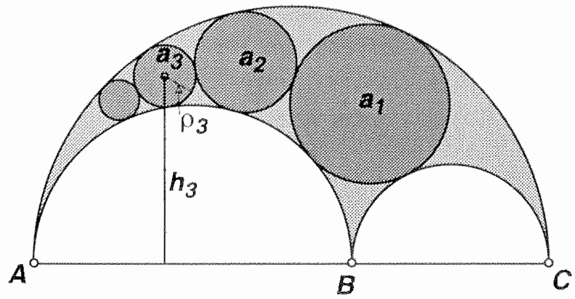
$$\tfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{5}+1):1$$

Het mes van eigen makelij

Tijdens het werken aan de voorgaande opgaven komen ongetwijfeld andere eigenschappen van de arbelos aan het licht. Ook deze spin-off heeft waarde:
Opgave 185: Formuleer een nieuwe opgave over de arbelos.

De bronnen van het mes

Leon Bankoff is tussen 1953 en 1959 bezig geweest met een boek over de arbelos. Het boek zou tien hoofdstukken moeten bevatten. Hij geeft een kort uittreksel in:
Leon Bankoff, 'The Marvelous Arbelos', opgenomen in: *The Lighter Side of Mathematics*, Richard K. Guy e.a. ed., Proceedings of the Eugène Strens Memorial Conference on Recreational Mathematics & its History, 1986.
De meeste voorbeelden uit deze recreatierubriek zijn daar te vinden. De teugels, het verborgen kwadraat en de precieze ligging van de uitgesloten derden zijn spin-off bij het doornemen van Bankoff's artikel, dat geen bewijzen bevat.
Opgave 175 en 176 zijn van Archimedes. Archimedes drukte ook de straal van de tweelingcirkels en de straal van c_4 in de stralen van c_2 en c_3 uit, hoewel hij bij dat laatste slechts een voorbeeld uitwerkt.
Als AB : $BC = 3 : 2$, dan is de straal van c_4 volgens Archimedes $\frac{6}{19}$ keer die van c_1.
Het driespan (ongeteugeld) is een bijzonder geval van een beroemde vondst van Pappus. Pappus maakt cirkel c_4 tot begin van een hele rij cirkels in het schoenmakersmes. In de onderstaande figuur zijn ze iets anders genummerd: a_1, a_2, a_3 enzovoort.



Cirkel a_1 hoort bij een driespan, a_2 bij een vijfspan, a_3 bij een zevenspan, enzovoort. Gebruikelijk is de afstand h_n van het midden van cirkel a_n tot de lijn AC in de straal ρ_n van cirkel a_n uit te drukken. Er geldt:

$$h_n = 2n\rho_n$$

Pappus bewees dit zonder gebruikmaking van inversie, maar in de meeste moderne behandelingen wordt de techniek van inversie hier ingezet.
Een goed leesbare uiteenzetting over inversie, inclusief de toepassing op de arbelos, staat in:
S. Stanley Ogilvy, *Excursions in Geometry*, Dover, 1990.
De werkwijze van Pappus zelf is beschreven in:
T. Heath, *A History of greek Mathematics, Volume II*. Dover, 1981.

Het mes op het web

Op de locatie
http://www.astro.virginia.edu/~eww6n/math/math0.html
staat een uitgebreide wiskundige encyclopedie. Klik door de A naar de *Arbelos*. Er staan daar nog andere eigenschappen vermeld. Indien de nood hoog is, kan men daar ook bewijzen vinden. Er is ook een literatuurlijst.
Een java-applet bij de Pappus-figuur met veel meer cirkels, waarbij B over AC versleepbaar is, staat op:
http://www.adelaide.net.au/~allanson/arbelos.html
Gewoon zoeken naar 'arbelos' werkt ook goed.

Aad Goddijn, Freudenthal Instituut