Het Profi-experiment met het nieuwe wiskunde B-programma vwo bereikte dit jaar een nieuwe mijlpaal. Na twee examenjaren met twee proefscholen hebben dit jaar elf scholen meegedaan aan het Profi examen. **Irene Gosselink** en **Martin Kindt** woonden de besprekingen bij van de elf en noteerden een aantal indrukken.

# Wiskunde B Profi Examen 1999

Op 1 juni kwamen de docenten van de elf Profi-scholen bijeen in het gebouw van het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum (APS) in Utrecht. Meteen bij binnenkomst werd voor iedere school het aantal leerlingen en het gemiddelde eindcijfer genoteerd. Men kon constateren dat het goed is afgelopen: het voorlopig gemiddelde (de examens moesten nog naar de tweede corrector) was 6.3.
Geen slecht resultaat, gezien het feit dat met experimenteel lesmateriaal werd gewerkt en het gedurende het schooljaar steeds spannend was of alle stof op tijd behandeld kon worden. Een ander positief resultaat is dat de examencijfers goed correleren met de cijfers van het schoolonderzoek.
De docenten waren over het algemeen tevreden over het eindexamen. Leek het sommigen op het eerste gezicht knap lastig, voor de leerlingen bleek het toch erg mee te vallen. Het is geschreven in prettig Nederlands, zonder onnodig formeel taalgebruik. Ook over de opbouw van het examen was men tevreden. Opgaven over meetkunde en analyse wisselden elkaar af. Op de bespreking passeerden de opgaven in volgorde de revue.

***opgave 1 Burendiagram***

De eerste vraag van opgave 1 was erg eenvoudig: het tekenen van een Voronoi-diagram met vier centra. Goed om er even in te komen. Vraag 2 bleek een stuk moeilijker. Tijdens de discussie over de beoordeling kwam naar voren dat de opdracht 'teken op de bijlage' ruim kan worden opgevat: leerlingen die de goede cirkel hebben getekend en daarbij de opmerking hebben gemaakt dat het om de boog $C_2C_3C_4$ gaat, krijgen (terecht) het volle pond.
Dat de tweede vraag voor een aantal (te) moeilijk was, heeft de leerlingen niet al te veel parten gespeeld, omdat de daaropvolgende vragen van opdracht 2 weer voldoende mogelijkheden boden.

***opgave 2 Tetra Brik***

Een contextopgave over kartonnen verpakkingen voor dranken, bestaande uit vijf sterk sturende vragen. Niet erg in de geest van een examen over Tweede Fase-wiskunde, vonden een aantal docenten. Kees Lagerwaard van het Cito vertelde welke afweging werd gemaakt. Doordat bij het experimentele examen van vorig jaar een paar opgaven volledig mis gingen, is men dit jaar met het formuleren van de vragen extra voorzichtig geweest. Bij vraag 6 levert de vergelijking die ontstaat door het nul stellen van de functie $O$ één positieve oplossing voor $a$. De vraag rijst of leerlingen verplicht zijn ook de negatieve oplossing voor $a$ te noemen en te vermelden waarom deze in de context niet van betekenis is ($a$ is de breedte van de verpakking). Een aantal docenten vindt dat niet nodig: het is toch vanzelfsprekend dat $a$ positief is. Anderen willen toch wél dat de leerling zegt waarom hij de negatieve oplossing van de vergelijking buiten beschouwing laat.

Het viel de docenten op dat weinig leerlingen bij opgave 2 gebruik maakten van de grafische rekenmachine (GR). De algebraïsche vergelijkingen werden over het algemeen 'ouderwets' op papier opgelost; de GR werd vaak hooguit als controlemiddel gebruikt. Bij vraag 6 moest het trouwens op die manier, want daar werd gevraagd naar de exacte waarde. Het signaal dat van het woordje *exact* uitgaat is duidelijk: er moet algebra worden bedreven. Het slaat dus meer op het afdwingen van een zekere oplossingsmethode dan op de schrijfwijze van de uitkomst, in dit geval $\sqrt[3]{2}$. Die vorm doet in relatie tot de context trouwens vreemd aan en eigenlijk zou je als slotconclusie 1,26 dm verwachten.

Hoe dan ook, de docenten constateren bij de leerlingen een zekere schroom bij het gebruik van de GR: een oplossing met de GR kan toch nooit zo goed zijn als een oplossing met de hand? Overigens wekken sommigen de indruk dat ze het op dit punt roerend met hun leerlingen eens zijn ...

Een leerling die bij vraag 5 wél de GR gebruikte, schreef alleen het antwoord op. Heeft hij dan recht op het volledig aantal punten voor deze vraag? Volgens het antwoordmodel niet, dat vereist een toelichting bij het gebruik van de GR. De docent van deze leerling vond echter van wel. Het bepalen van het minimum van een functie is een eenvoudige handeling op de GR. Een leerling hoeft toch ook niet te verantwoorden hoe hij $2 \times 3$ berekent?

*opgave 3 Cirkelbundel met evenwijdige koorden*

Een meevaller voor veel leerlingen die hadden opgezien tegen de meetkunde. Er zijn leerlingen die veel overbodige informatie in hun bewijs opschrijven, maar wel duidelijk aangeven op welke gronden ze hun conclusies trekken. Strikt genomen, voldoet zo'n bewijs niet aan de gangbare wiskundige normen. Maar hoe strikt moet je in de beoordeling zijn?

*opgave 4 Gegolfde cirkel*

Bij vraag 9 kon de GR een oplossing bieden: door $K_n$ te tekenen met verschillende waarden van $n$ konden zij ontdekken dat $n$ het aantal keren is dat deze grafiek over de cirkel $E$ golft. Volgens het antwoordmodel kon met deze empirische aanpak worden volstaan. Ook hier doet zich de vraag voor, wat je van de leerling dan aan tekst kunt verwachten.

Bij vraag 10 heeft het gebruik van de GR tot verschillende antwoorden geleid.

De kromme $K_{1999}$ verschijnt op het scherm als cirkel. '$K_{1999}$ is bij benadering de cirkel $E$, dus de gevraagde hoek is gelijk aan 0°' werd geconcludeerd. Leuk geprobeerd, maar fout.

Het uitrekenen van $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ met behulp van het calc-menu geeft een hoek van 26°. Ook fout, want het goede antwoord, dat verkregen wordt na differentiëren (op papier) is 45°.

De GR geeft blijkbaar een onnauwkeurig antwoord na het rekenen met een functie met periode van ongeveer $0{,}001\pi$. Er wordt van leerlingen een kritische houding ten aanzien van het gebruik van een rekenapparaat verwacht, maar hoever kun je daarin gaan? Een leerling die als antwoord 26° geeft, verdient waarschijnlijk niet het volledig aantal punten voor de vraag, maar hoe zwaar kun je hem zijn fout aanrekenen? Het antwoordmodel geeft geen uitsluitsel. Misschien had hier toch maar beter naar de exacte hoekwaarde kunnen worden gevraagd. Of, andere mogelijkheid: toon aan dat de bedoelde hoek gelijk is aan 45°.

De score op deze vraag viel overigens om andere redenen behoorlijk tegen. Enerzijds waren voor een aantal leerlingen de technische hobbels aan de hoge kant (goniofuncties in combinatie met product en kettingregel) anderzijds leverde de hoek van een raaklijn aan een 'kromme in parametervoorstelling' problemen op.

De oorzaak daarvan kan worden gezocht in het feit dat dergelijke krommen in de context van bewegingen zijn behandeld en dat de afgeleiden $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ vooral in verband zijn gebracht met (componenten van) de snelheidsvector.

De conclusie was dat dit onderdeel van het examen (in tegenstelling tot de overige veertien vragen) misschien niet geheel naadloos aansluit bij de behandelde leerstof. De originaliteit van deze opgave werd door de docenten echter op prijs gesteld.

*opgave 5 Een raaklijn aan de parabool*

Bij vraag 13 staat dat er een bewijs geleverd moet worden 'met behulp van gelijke (congruente) driehoeken'. Dient een bewijs dat geen gebruik maakt van congruente driehoeken dan fout gerekend te worden? Formeel gezien wel, want het is geen antwoord op de vraag. Kees Lagerwaard vertelde dat de zinsnede over congruente driehoeken was bedoeld als hint voor de leerlingen. Dit bleek echter niet uit de formulering. Beter zou zijn geweest: 'bewijs dat $\angle SFA = 90°$, bijvoorbeeld met ...'.

*opgave 6 Een normale kromme*

Deze opgave leverde weinig discussie op. Slechts de vraag of een leerling die om de $x$-as had gewenteld nog iets verdiende, hield de gemoederen even bezig. Toen een leerling geciteerd werd, die in alle eerlijkheid had verklaard: ik wist niet hoe het moest bij wentelen om de $y$-as, dus heb ik het maar om de $x$-as gedaan, werd een eind gemaakt aan veel twijfels.

*Een paar conclusies*

Het eindexamen is bevredigend verlopen, maar heeft wel een aantal vragen opgeleverd over het gebruik van de grafische rekenmachine. In de toekomst zal er meer duidelijkheid moeten komen, zowel voor leerlingen als voor docenten. Wat voor toelichting moet de leerling geven wanneer hij gebruik maakt van de GR? En in hoeverre moeten leerlingen de nauwkeurigheid van hun GR kunnen beoordelen? Maar is niet juist een van de doelen van dit experiment om erachter te komen wat verstandige regels voor het gebruik van de GR op het examen zullen zijn?

Er werd opgemerkt dat over het algemeen de meetkundeopgaven beter waren gemaakt dan verwacht, terwijl de prestaties bij de analyse-opgaven wat tegenvielen. Een mogelijke verklaring hiervan is, dat er in het kader van het experiment dit examenjaar extra veel tijd aan meetkunde werd besteed, waardoor de analyse wat in het gedrang kwam. Hier en daar werd ook een groter gebrek aan algebraïsche vaardigheid gesignaleerd dan voorheen het geval was.

Bij dit alles moet worden bedacht dat dit een soort B1$\frac{1}{2}$-examen was, bestemd voor een traditionele wiskunde B-populatie. Het domein 'voortgezette analyse' is bij dit cohort niet behandeld, maar kan wél weer worden afgevraagd in het jaar 2000 en dat zal ten koste moeten gaan van enige subdomeinen van de 'voortgezette meetkunde'. Aan het eind van het project zullen, met uitzondering van de statistiek en kansrekening, alle B1,2-domeinen een of meer keren aan bod zijn geweest op het Profi-eindexamen. Voor de grote horde scholen die straks zullen deelnemen aan het eindexamens B1,2 op het VWO, zal er dan, behalve een bundeltje oefenopgaven voor het schriftelijk examen, hopelijk ook een zekere duidelijkheid over het niveau van dat examen zijn.

*Irene Gosselink en Martin Kindt, Freudenthal Instituut*

**Examen VWO**

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

19|99

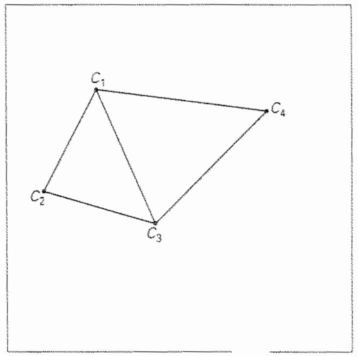
Tijdvak 1
Donderdag 20 mei
13.30–16.30 uur

## Opgave 1 Burendiagram

$C_1, C_2, C_3$ en $C_4$ zijn de centra van een Voronoi-diagram. Door de centra waarvan de Voronoi-cellen een gemeenschappelijke grenslijn hebben met elkaar te verbinden, ontstaat het burendiagram dat in figuur 1 en op de bijlage is getekend.

5p **1** □ Teken op de bijlage het Voronoi-diagram dat bij de vier centra hoort.

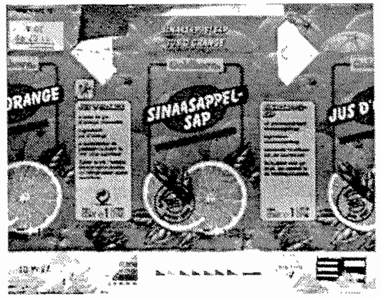
figuur 1




Het burendiagram in figuur 1 bestaat uit twee driehoeken. Door $C_3$ te verplaatsen, terwijl de andere centra op hun plaats blijven, kan er een burendiagram ontstaan dat bestaat uit een vierhoek $C_1C_2C_3C_4$ (de hoekpunten in deze volgorde).

6p **2** □ Teken in de figuur op de bijlage de plaatsen waar in dat geval $C_3$ kan komen te liggen. Leg uit waarom dit de juiste plaatsen zijn voor $C_3$.

## Opgave 2 Tetra Brik

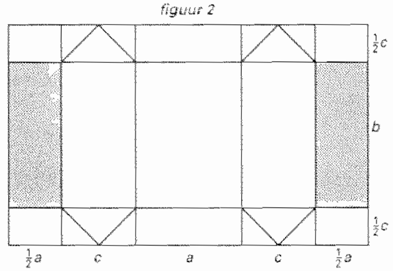




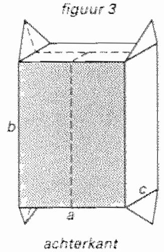
Dranken zoals sinaasappelsap tref je vaak aan in een kartonnen balkvormige verpakking. Tetra Brik is zo'n verpakking. Dit pak wordt gefabriceerd uit een rechthoekig stuk karton. Zie figuur 2. De vouwlijnen zijn er op aangegeven. De grijze stukken worden de achterkant van het pak. De linker- en rechterkant worden aan elkaar gelijmd. De bovenkant en de onderkant worden dichtgelijmd. Zo ontstaat een balk. Zie figuur 3. Aan de vier hoeken zitten driehoekige 'flappen'. De stippellijnen zijn lijmnaden.
In deze opgave nemen we aan dat de lijmnaden geen karton kosten.

figuren 2 en 3

figuur 2




figuur 3




De dikte van het pak noemen we $c$ (dm). De andere afmetingen noemen we $a$ en $b$ (dm).
De oppervlakte van het karton waarmee werd begonnen, noemen we $O$ (dm$^2$).
Voor $O$ geldt dan: $O = (2a + 2c)(b + c)$.
We kijken alleen naar pakken van 1 liter (= 1 dm$^3$); er geldt dus $a \cdot b \cdot c = 1$.
We willen $O$ minimaliseren. Dat doen we in twee gevallen.

Geval I: De dikte $c$ van het pak is 0,4.

2p **3** □ Toon aan dat hieruit volgt: $b = \dfrac{5}{2a}$.

4p **4** □ Toon aan dat in dit geval geldt: $O = 0{,}8a + \dfrac{2}{a} + 5{,}32$.

5p **5** □ Onderzoek bij welke afmetingen van het pak $O$ minimaal is. Geef die afmetingen in mm nauwkeurig.

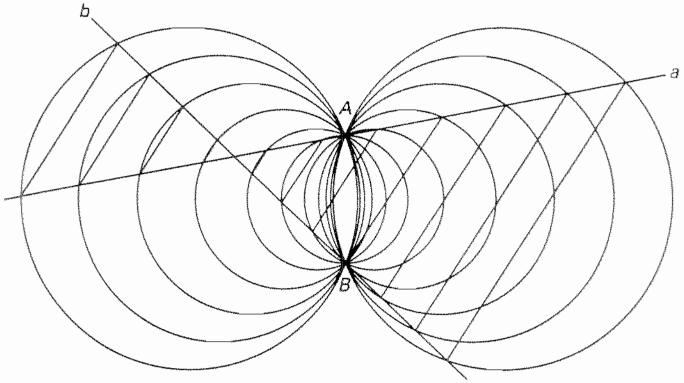
Geval II: De voorkant van het pak is vierkant; dus $a = b$.

4p **6** □ Toon aan dat voor de oppervlakte $O$ van het karton geldt: $O = 2 \cdot \left(a + \dfrac{1}{a^2}\right)^2$.

6p **7** □ Bereken de exacte waarde van $a$ waarvoor $O$ minimaal is.

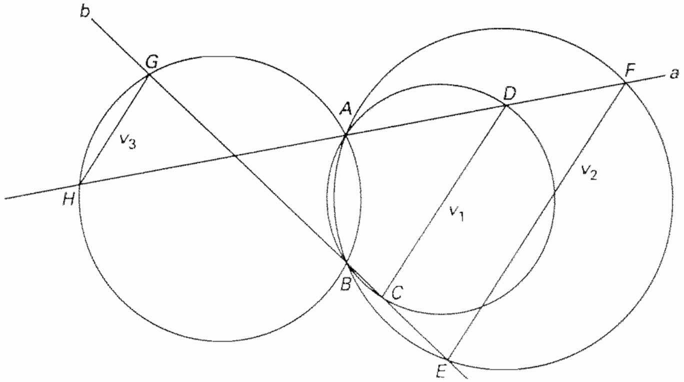
## Opgave 3 Evenwijdige koorden in een cirkelbundel

figuur 4




$A$ en $B$ zijn twee punten. In figuur 4 zijn elf exemplaren getekend van de bundel cirkels, die door $A$ en $B$ gaan. $a$ is een lijn door $A$. $b$ is een lijn door $B$. Elk van de cirkels wordt door lijn $a$ in nog een ander punt dan $A$ gesneden en door lijn $b$ in nog een ander punt dan $B$. Deze snijpunten zijn door een koorde verbonden.
In figuur 5 en in de figuur op de bijlage zijn alleen de koorden $v_1$, $v_2$ en $v_3$ getekend met de bijbehorende cirkels.

figuur 5



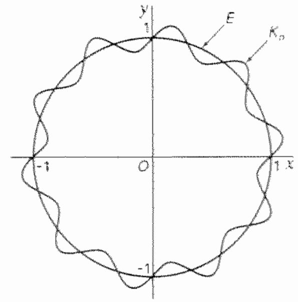

9p **8** □ Bewijs dat $v_1$, $v_2$ en $v_3$ evenwijdig zijn. Je kunt daarbij gebruik maken van de figuren op de bijlage.

## Opgave 4 Gegolfde cirkels

Een punt beweegt over een kromme in het $Oxy$-vlak volgens de formules:
$x = r \cdot \cos t$ en $y = r \cdot \sin t$.

Als $r = 1$, is de kromme de eenheidscirkel $E$.
Als $r = 1 + \frac{1}{n} \sin nt$, is de kromme een 'gegolfde cirkel' $K_n$. Hierbij is $n$ een positief geheel getal.

figuur 6




In figuur 6 zijn getekend:

$E: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

en voor een zekere waarde van $n$

$K_n: \begin{cases} x = (1 + \frac{1}{n} \sin nt) \cdot \cos t \\ y = (1 + \frac{1}{n} \sin nt) \cdot \sin t \end{cases}$

5p **9** □ Hoe groot is die waarde van $n$? Laat zien hoe je je antwoord gevonden hebt.

9p **10** □ Bereken de hoek waaronder $K_{1999}$ en $E$ elkaar in $(1, 0)$ snijden.

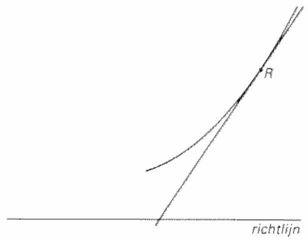
Voor elke $n$ kunnen we de gegolfde cirkel $K_n$ inklemmen tussen twee cirkels met middelpunt $(0, 0)$: de kleinste cirkel die om $K_n$ past en de grootste cirkel die binnen $K_n$ past. Zodoende ligt $K_n$ in een ringvormig gebied.

7p **11** □ Toon aan dat de oppervlakte van het ringvormige gebied gelijk is aan $\frac{4\pi}{n}$.

## Opgave 5 Een raaklijn aan een parabool

In figuur 7 is een stukje van een parabool getekend. Bovendien is de richtlijn van de parabool getekend. En in een punt $R$ van de parabool is de raaklijn getekend.
Figuur 7 staat ook op de bijlage.

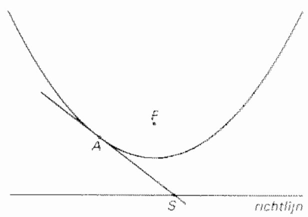
figuur 7




6p **12** □ Teken in de figuur op de bijlage de plaats van het brandpunt $F$ van de parabool. Licht je werkwijze toe.

In figuur 8 is een parabool getekend met zijn brandpunt $F$ en zijn richtlijn. $A$ is een punt van de parabool. De raaklijn in $A$ aan de parabool snijdt de richtlijn in $S$.
Figuur 8 staat ook op de bijlage.

figuur 8




7p **13** □ Bewijs met behulp van gelijke (congruente) driehoeken dat $\angle SFA = 90°$. Je kunt hierbij de figuur op de bijlage gebruiken.

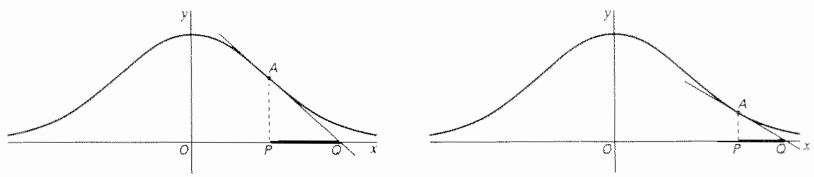
*Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.*

## Opgave 6 Een normale kromme

In de statistiek speelt de functie $f(x) = e^{-x^2}$ een belangrijke rol. De grafiek van deze functie is een zogenaamde *normale kromme*.
$A$ is een punt van de grafiek met positieve $x$-coördinaat $a$. $P$ is de projectie van $A$ op de $x$-as. $Q$ is het snijpunt van de raaklijn in $A$ aan de grafiek van $f$ met de $x$-as.

In figuur 9 is de situatie getekend voor twee verschillende plaatsen van punt $A$.

figuur 9

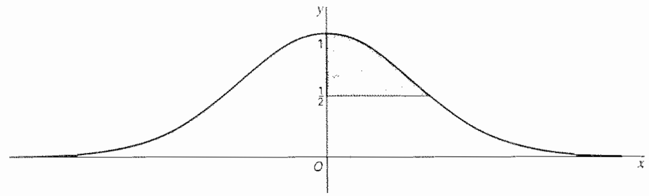



De lengte van $PQ$ verandert als punt $A$ over de grafiek beweegt: de lengte van $PQ$ is een functie van $a$.

9p **14** □ Toon aan dat bij toenemende $a$ de lengte van $PQ$ steeds kleiner wordt.

In figuur 10 is een vlakdeel aangegeven dat wordt ingesloten door de grafiek van $f$, de $y$-as en de lijn $y = \frac{1}{2}$.

figuur 10




Dit vlakdeel wordt gewenteld om de $y$-as.

6p **15** □ Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam. Rond je antwoord af op twee decimalen.

**Einde**



**Bijlage bij de vragen 1, 2, 8, 12 en 13**

Wiskunde B Profi

**Examen VWO 1999**

Tijdvak 1
Donderdag 20 mei
13.30 - 16.30 uur

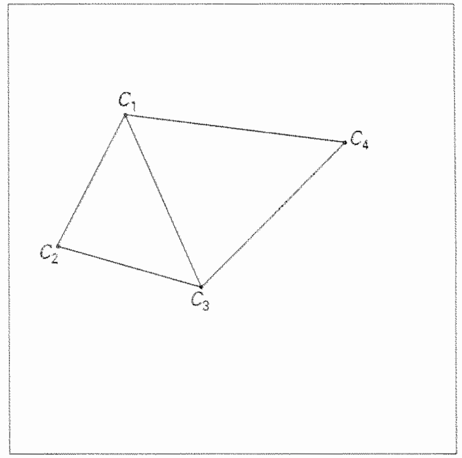
**Examennummer**

.................................

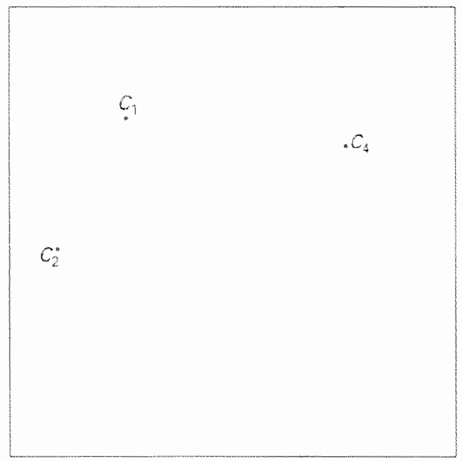
**Naam**

.................................

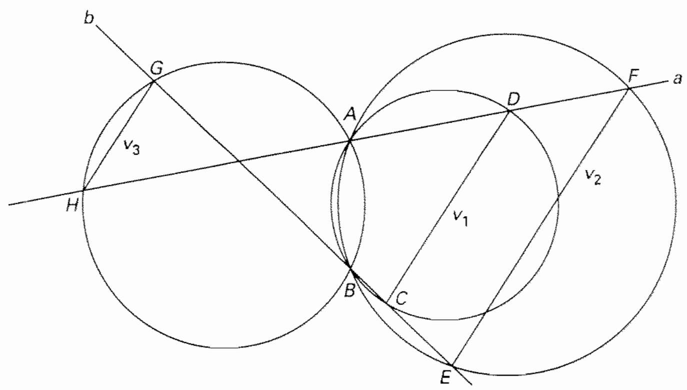
**Vraag 1**

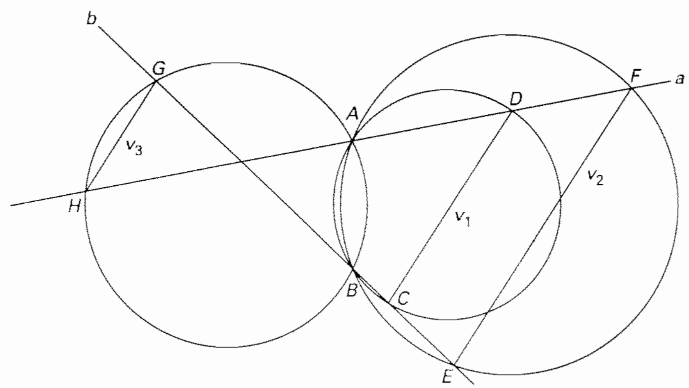



**Vraag 2**



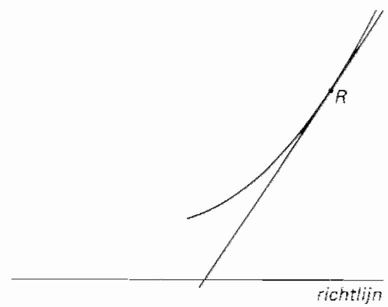
Vraag 8



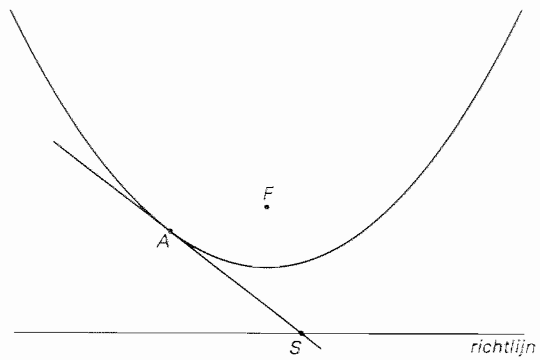




Bijlage bij de vragen 1, 2, 8, 12 en 13

Vraag 12




Vraag 13



## 4 Antwoordmodel

| | Antwoorden | Deel-scores |
|---|---|---|
| | **Opgave 1 Burendiagram** | |
| | **Maximumscore 5** | |
| 1 □ | · het tekenen van de middelloodlijnen van de lijnstukken van het burendiagram | 3 |
| | · het tekenen van het Voronoi-diagram | 2 |
| | **Maximumscore 6** | |
| 2 □ | · het tekenen van de cirkel door de punten $C_1, C_2$ en $C_4$ | 3 |
| | · het aangeven van de onderste cirkelboog $C_2C_4$ | 1 |
| | · de uitleg, bijvoorbeeld: een vierhoek $C_1C_2C_3C_4$ betekent dat er een vierlandenpunt moet ontstaan. Het middelpunt van de cirkel door $C_1, C_2$ en $C_4$ is vierlandenpunt als $C_3$ ook op die cirkel ligt. | 2 |
| | **Opgave 2 Tetra Brik** | |
| | **Maximumscore 2** | |
| 3 □ | · $a \cdot b \cdot 0{,}4 = 1$ geeft $b = \frac{1}{0{,}4a} = \frac{5}{2a}$ | 2 |
| | **Maximumscore 4** | |
| 4 □ | · de substitutie van $b = \frac{5}{2a}$ en $c = 0{,}4$ in de formule voor $O$ geeft $O = (2a + 0{,}8)(\frac{5}{2a} + 0{,}4)$ | 1 |
| | · de herleiding tot de gegeven formule | 3 |
| | **Maximumscore 5** | |
| 5 □ | · het bepalen van de waarde van $a$ waarvoor $O$ minimaal is met de GR inclusief toelichting | 3 |
| | · het antwoord 15,8 cm × 15,8 cm × 4 cm | 2 |
| | of | |
| | · de afgeleide van $O$ | 2 |
| | · $O' = 0$ als $a = \sqrt{\frac{5}{2}}$ | 1 |
| | · het antwoord 15,8 cm × 15,8 cm × 4 cm | 2 |
| | **Maximumscore 4** | |
| 6 □ | · $c = \frac{1}{a^2}$ | 2 |
| | · de substituties in de formule voor $O$ en de herleiding | 2 |
| | **Maximumscore 6** | |
| 7 □ | · de afgeleide van $O$ | 3 |
| | · $O' = 0$ geeft $a^3 = 2$ | 2 |
| | · $a = \sqrt[3]{2}$ | 1 |
| | **Opgave 3 Evenwijdige koorden in een cirkelbundel** | |
| | **Maximumscore 9** | |
| 8 □ | · $ABCD$ en $ABEF$ zijn koordenvierhoeken | 2 |
| | · $\angle ADC$ en $\angle AFE$ zijn beide $180° - \angle ABC$ | 2 |
| | · $v_1 \,//\, v_2$ ($F$-hoeken) | 1 |
| | · $\angle GHA = \angle ABG$, want ze staan beide op dezelfde boog $GA$ | 2 |
| | · $\angle ABG = \angle ADC$, want ze zijn beide $180° - \angle ABC$ | 1 |
| | · $v_1 \,//\, v_3$ ($Z$-hoeken) | 1 |
| | **Opgave 4 Gegolfde cirkels** | |
| | **Maximumscore 5** | |
| 9 □ | · $K_n$ en $E$ snijden elkaar 20 keer | 1 |
| | · $K_n$ snijdt $E$ als $r = 1$, dus als $\sin nt = 0$ | 2 |
| | · er zijn $2n$ van zulke waarden van $t$ op $[0, 2\pi\rangle$ | 1 |
| | · het antwoord $n = 10$ | 1 |
| | of | |
| | · $K_n$ heeft 10 hele golven op de cirkelomtrek | 1 |
| | · één zo'n golf heeft dus periode $\frac{2\pi}{10}$ | 1 |
| | · de periode van $r = 1 + \frac{1}{n}\sin nt$ is $\frac{2\pi}{n}$ | 2 |
| | · het antwoord $n = 10$ | 1 |
| | of | |
| | · de tekening van $K_{10}$: $x = (1 + 0{,}1 \cdot \sin 10t) \cdot \cos t$ en $y = (1 + 0{,}1 \cdot \sin 10t) \cdot \sin t$ op de GR is precies de getekende kromme | 4 |
| | · het antwoord $n = 10$ | 1 |

| Antwoorden | | Deel-scores |
|---|---|---|
| | **Maximumscore 9** | |
| 10 □ | · richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan $K_{1999}$ is $\dfrac{y'(0)}{x'(0)}$ | 1 |
| | · $x'(t) = \cos 1999t \cdot \cos t - (1 + \frac{1}{1999} \sin 1999t) \cdot \sin t$ | 2 |
| | · $x'(0) = 1$ | 1 |
| | · $y'(t) = \cos 1999t \cdot \sin t + (1 + \frac{1}{1999} \sin 1999t) \cdot \cos t$ | 2 |
| | · $y'(0) = 1$ | 1 |
| | · de raaklijn aan $K_{1999}$ in $(1, 0)$ maakt een hoek van 45° met de $x$-as | 1 |
| | · omdat de raaklijn aan $E$ in $(1, 0)$ verticaal is, snijden $K_{1999}$ en $E$ elkaar onder een hoek van 45° | 1 |
| | **Maximumscore 7** | |
| 11 □ | · de straal van de buiten-cirkel is $1 + \frac{1}{n}$ en de straal van de binnen-cirkel is $1 - \frac{1}{n}$ | 3 |
| | · de oppervlakte van het ringvormige gebied is $\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - \pi\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$ | 2 |
| | · de vereenvoudiging tot $\dfrac{4\pi}{n}$ | 2 |

## Opgave 5 Een raaklijn aan een parabool

| | | |
|---|---|---|
| | **Maximumscore 6** | |
| 12 □ | · de lijn $k$ door $R$, loodrecht op de richtlijn | 2 |
| | · de raaklijn is de middelloodlijn van $F$ en het voetpunt | 2 |
| | · het tekenen van het spiegelbeeld $F$ van het voetpunt in de raaklijn | 2 |
| | **Maximumscore 7** | |
| 13 □ | · het vergelijken van driehoek $ASF$ en driehoek $ASP$, waarbij $P$ het voetpunt is van de loodlijn uit $A$ op de richtlijn | 3 |
| | · het bewijs dat deze driehoeken congruent zijn ($ZHZ$) | 3 |
| | · de conclusie dat $\angle AFS = \angle APS = 90°$ | 1 |



| Antwoorden | | Deel-scores |
|---|---|---|

## Opgave 6 Een normale kromme

| | | |
|---|---|---|
| | **Maximumscore 9** | |
| 14 □ | · $f'(a) = -2a \cdot e^{-a^2}$ | 2 |
| | · $\dfrac{AP}{PQ} = 2a \cdot e^{-a^2}$ | 2 |
| | · $AP = e^{-a^2}$ | 2 |
| | · de gevolgtrekking $PQ = \dfrac{1}{2a}$ | 2 |
| | · de conclusie | 1 |
| | of | |
| | · $f'(a) = -2a \cdot e^{-a^2}$ | 2 |
| | · een vergelijking van de raaklijn | 2 |
| | · de coördinaten van $Q$ | 2 |
| | · de gevolgtrekking $PQ = \dfrac{1}{2a}$ | 2 |
| | · de conclusie | 1 |
| | **Maximumscore 6** | |
| 15 □ | · de inhoud is $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \pi x^2 \mathrm{d}y$ | 2 |
| | · $x^2 = -\ln y$ | 2 |
| | · de integraal is 0,48 | 2 |

**Einde**