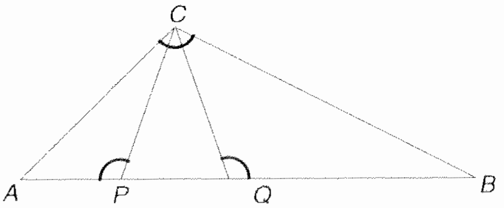
Wat te bewijzen is

Rubriek

In het boek *Great Moments in Mathematics* van H. Eves vond ik een grappige generalisatie van de stelling van Pythagoras, afkomstig van Tabit ben Qurra (836-901). Laat ABC een driehoek zijn met $\angle ACB = \gamma$. Vanuit hoekpunt C worden twee lijnen getrokken die de lijn AB snijden in de punten P en Q zó dat $\angle CPA = \angle CQB = \gamma$. Er geldt dan:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB| \cdot (|AP| + |BQ|$$



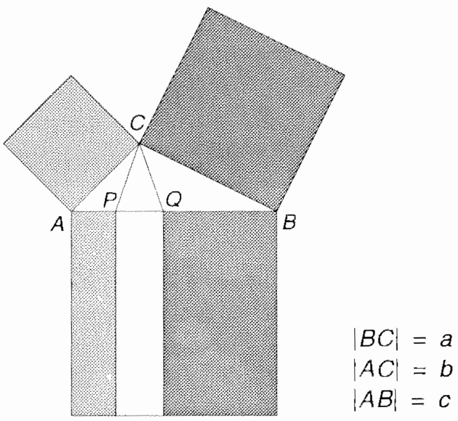
De gelijkvormige driehoeken liggen voor het oprapen: APC en CQB zijn beide gelijkvormig met ACB (vanwege de gelijkheid van de hoeken).

Gevolg: $\frac{|AP|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ en $\frac{|BQ|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|BA|}$

Dus $|AC|^2 = |AB| \cdot |AP|$ en $|BC|^2 = |AB| \cdot |BQ|$

Optellen en klaar.

De stelling wordt een stuk aanschouwelijker als je, net als bij de stelling van Pythagoras, buitenwaarts vierkanten op de zijden van driehoek ABC plaatst.

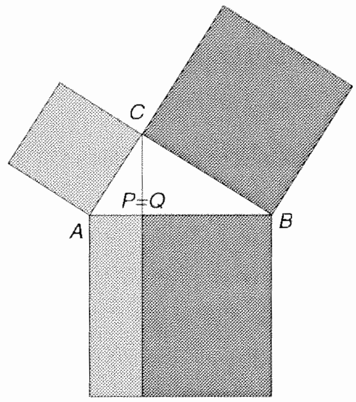


De vierkanten op de zijden AC en BC zijn gelijk aan de rechthoeken met dezelfde grijstint.

Bij een stomphoekige driehoek vallen die rechthoeken binnen het vierkant op de zijde AB en zijn ze bovendien disjunct; hierover moet even worden nagedacht.

Nu komt er leven in de brouwerij: we laten γ van grootte veranderen. Als γ groter wordt en de zijden AC en BC niet van lengte veranderen, dan wordt de tussenruimte tussen de grijze rechthoeken groter.

Laten we γ krimpen, zeg tot 90°, dan schuiven die rechthoeken naar elkaar toe om in het geval dat de driehoek rechthoekig wordt tegen elkaar aan te komen: de stelling van Pythagoras is daar!



Bij een scherphoekige driehoek zullen de rechthoeken overlappen (P en Q zijn elkaar gepasseerd). Zolang γ de grootste van de drie hoeken is, maken de rechthoeken nog deel uit van het vierkant op AB, maar als γ kleiner is dan (een van) beide overige hoeken, komen P en/of Q buiten het lijnstuk AB te liggen.

In het geval van een gelijkzijdige driehoek valt elk van de grijze rechthoeken samen met het vierkant op AB. Van dit alles kan een mooie animatie worden gemaakt met Cabri.

Cosinusregel

De stelling van Tabit ben Qurra leidt fraai naar de cosinusregel. Het plaatje met de stompe hoek toont het verschil tussen c^2 en $a^2 + b^2$: de witte strook binnen het vierkant op AB. Die strook heeft de oppervlakte $|PQ| \cdot c$

Wat kan ik zeggen over $|PQ|$?

Driehoek PQC is gelijkbenig (gelijke hoeken!), en met $|PC| = |QC| = r$ volgt nu $|PQ| = -2r \cdot \cos\gamma$

Conclusie:

$$c^2 = a^2 + b^2 + (-2rc\cos\gamma)$$

Er blijft te bewijzen dat $rc = ab$.

Let nog eens op de gelijkvormige driehoeken APC en ACB. Er geldt:

$$\frac{|PC|}{|AC|} = \frac{|CB|}{|AB|} \text{ ofwel } \frac{r}{b} = \frac{a}{c}$$

kruislings vermenigvuldigd levert dat het gewenste resultaat op en de cosinusregel voor een stomphoekige driehoek is bewezen. Voor een scherphoekige driehoek is er een tweede oogopslag nodig, maar dan zie je het ook.

Martin Kindt, Freudenthal Instituut