Naar aanleiding van een nascholingscursus kwam **Ab van der Roest** op het idee om de bekende limiet e^x in een wiskunde B klas aannemelijk te maken met behulp van een A-achtige context: vissen in een vijver.

Vissen in een vijver

In de *Nieuwe Wiskrant* van september 1998 stond een artikel van Josje Lodder getiteld 'Het getal e, een limiet ontrafeld'. Na lezing hiervan moest ik denken aan de nascholingscursus contextrijke wiskunde[1], verzorgd door onder andere Ronald Meester, waarin bijna dezelfde limiet ook aan de orde kwam, namelijk:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

In deze cursus heeft Ronald Meester deze limiet niet bewezen, maar geprobeerd deze aannemelijk te maken met behulp van een context. Ik heb dit later in een 5 VWO-klas tijdens een tweetal wiskunde-B lessen ook geprobeerd. Dit gebeurde tijdens een van de laatste weken voor de zomervakantie en had tot doel een wiskunde-A onderwerp te gebruiken bij een wiskunde-B les, omdat de B-leerlingen wel erg neerkeken op de wiskunde-A stof.

Fase 1

Na een summiere inleiding schreef ik de limiet op het bord. Om een idee te krijgen of de uitdrukking correct is, hebben we eerst enkele getallen gekozen en ingevuld bij

$$(1 + \frac{x}{n})^n - e^x = a$$

De resultaten:

$x = 2$ en $n = 1.000.000$ geeft $a = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$
$x = 10$ en $n = 1.000.000$ geeft $a = -1{,}10$
$x = 10$ en $n = 1.000.000.000$ geeft $a = -0{,}0011$

Op grond van deze rekenoefeningen kunnen we veronderstellen dat de limiet klopt, maar er blijven vraagtekens. Ten eerste: als $x = 10$ blijft a onverwacht groot; n moet erg groot gekozen worden. Ten tweede: n kan niet onbeperkt groot gekozen worden, want als $x = 10$ en $n = 1 \cdot 10^{20}$ wordt $1 + \frac{x}{n} \approx 1$ en de rekenmachine helpt ons dan niet meer.

Fase 2

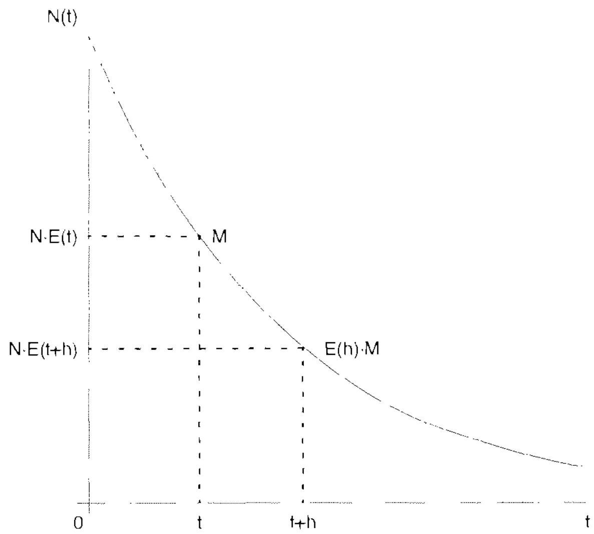
Nu het verhaal: we gaan vissen in een vijver waarin een onbeperkt aantal vissen aanwezig is; je zou dus kunnen zeggen een oneindig aantal vissen. We zijn met N_0 vissers en zodra een visser een vis gevangen heeft, gaat hij naar huis. N_0 is een groot aantal. We definiëren de functie $N(t)$ als het aantal vissers P dat op tijdstip t aan het vissen is en de functie $E(t)$ als de fractie van de vissers die in een tijdsinterval $[0, t]$ nog niets hebben gevangen. $E(t) = \frac{1}{2}$ betekent dus dat op tijdstip t de helft van de vissers nog aan het vissen is. Omdat we met N_0 vissers begonnen zijn, is het aantal vissers na t tijdseenheden $N(t) = N_0 \cdot E(t)$.

Hoe ziet $E(t)$ eruit?

Al pratend met de klas komen we tot de volgende uitspraken:

- $E(0) = 1$
- E is een dalende functie (in ieder geval niet stijgend).
- Als we aannemen dat elke visser dezelfde kans heeft om een vis te vangen, weten we dat in het begin veel vissers naar huis gaan en dat het aantal dat per tijdseenheid naar huis gaat, steeds kleiner wordt.
- Ten slotte nemen we aan dat per tijdseenheid de kans om een vis te vangen voor een visser gelijk blijft.

Deze laatste aannames gaan we verduidelijken met een grafiek.



Hieruit lezen we: $N\cdot E(t) = M$

$N\cdot E(t+h) = E(h)\cdot M = E(h)\cdot E(t)\cdot N$

Dus $E(t+h) = E(t)\cdot E(h)$.

Dit kostte wel enige moeite om in te zien. Het feit dat $N \cdot E(t+h) = E(h) \cdot M$ vroeg de nodige verklaring. Dit losten we op met behulp van een plaatje en een nieuw assenstelsel: de verticale as door (t, M). Nu is meteen duidelijk dat $E(h)\cdot M$ het aantal vissers is op tijdstip h en in het oorspronkelijke assenstelsel op tijdstip $t+h$.

$E(t+h) = E(t)\cdot E(h)$ kunnen we verder uitbouwen tot:

$$E(t_1+t_2+\ldots+t_n) = E(t_1)\cdot E(t_2)\cdot E(t_3)\ldots E(t_n).$$

Stel nu dat $E(1) = a$, en als we nu $t_i = \frac{1}{n}$ nemen, dan krijgen we:

$$E(1) = E(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}) = (E(\frac{1}{n}))^n = a$$

en zo vinden we:

$$E(\frac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}}.$$

Neem nu $t_1 = t_2 = \ldots t_n = \frac{1}{m}$, dan volgt hieruit dat:

$$E(\frac{n}{m}) = E(\frac{1}{m})^n = (a^{\frac{1}{m}})^n = a^{\frac{n}{m}} \text{ is.}$$

Dus $E(t) = a^t$ en $E'(t) = a^t \ln a = \ln a\cdot E(t)$.

Of anders gezegd $E'(t) = -\lambda E(t)$ met $\lambda = -\ln a$.

Dus $E(t) = e^{-\lambda t}$.

Hiermee hebben we dus de functie $E(t)$ gevonden.

Vervolgens gaan we weer naar de vijver om te vissen. We bekijken de kans om een vis te vangen in een klein tijdsinterval. Deze kans is:

$P(\text{een visser vangt een vis in } \langle t, t + \Delta t\rangle) \approx \lambda \cdot \Delta t$

Hier was weer een toelichting nodig:

De kans dat een willekeurig persoon in het interval $\langle t, t + \Delta t\rangle$ een vis vangt, is volgens de kansdefinitie

$$\frac{N(t) - N(t+\Delta t)}{N(t)} = \frac{E(t) - E(t+\Delta t)}{E(t)}.$$

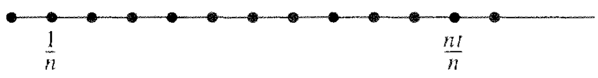
Hier is een gedeelte van het differentiequotiënt in te herkennen. Het differentiequotiënt is bij benadering gelijk aan de afgeleide functie:

$$\frac{E(t+\Delta t) - E(t)}{\Delta t} \approx E'(t).$$

Dus $P(\text{een visser vangt een vis in } \langle t, t + h\rangle) =$

$$= \frac{E(t) - E(t+\Delta t)}{E(t)} \approx \frac{-E'(t)\cdot\Delta t}{E(t)} = \frac{\lambda E(t)\cdot \Delta t}{E(t)} = \lambda\cdot\Delta t.$$

We onderzoeken nu hoe groot de kans is om geen vis gevangen te hebben op tijdtip t. Daartoe delen we het interval $[0, t]$ op de t-as in nt intervallen in met lengte $\frac{1}{n}$.



We krijgen nu:

$P(\text{geen vis gevangen op tijdstip } t) = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{nt}$ en
$P = E(t) = e^{-\lambda t}$.

Merk hierbij op dat we de complementregel gebruiken

$$(1 - \lambda\Delta t = 1 - \frac{\lambda}{n})$$

en onafhankelijke gebeurtenissen in nt intervallen.

Dus $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{nt} \rightarrow e^{-\lambda t}$;

we herschrijven dit als $\left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n\right)^t \rightarrow (e^{-\lambda})^t$

en je ziet dan direct dat als $x = -\lambda$ geldt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Conclusie

Het aardige van dit voorbeeld is dat we typische wiskunde-A activiteiten, kansrekening, met wiskunde-B leerlingen bespreken. Een A-leerling kan natuurlijk ook wel differentiëren en weet wel wat een differentiequotiënt is, maar gaat zelden zo abstract met deze begrippen om. Het is dus een mooie integratie van wiskunde-A en wiskunde-B en een prima verhaal voor de wiskunde bij N&G en N&T. Het was voor de 5 VWO-leerlingen behoorlijk pittige stof, maar pratend en bijsturend kwamen ze heel ver. Volgens mij zijn er op deze manier toch veel dingen mogelijk. Het is wat dat aangaat jammer dat we in de toekomst zo zuinig met onze contacttijd zullen moeten omspringen. De doorstap naar wachtrij-theorie is natuurlijk hier ook te maken. De functie $E(t)$ zal misschien herkend zijn als horend bij de exponentiële verdeling en bij een Poisson-proces. Hiervoor verwijs ik naar bijvoorbeeld een boek van Ross.

A.B. van der Roest, Ichthus-college te Veenendaal

Met dank aan Ronald Meester voor het lezen van het artikel en de tips die hij me daarbij gaf.

Literatuur

Lodder, J. (1998). 'Het getal e, een limiet ontrafeld.' *Nieuwe Wiskrant 18*(1) pp. 18-21.

Ross, S. (1976). *A first Course in probability*. New York: Macmillan Publishing Company.

Noot

[1] Deze nascholingscursus wordt georganiseerd door het Freudenthal Instituut en het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht. ❑